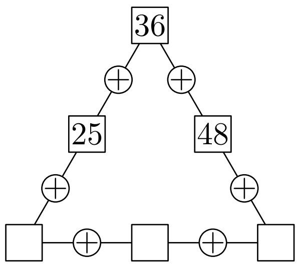
58. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z9

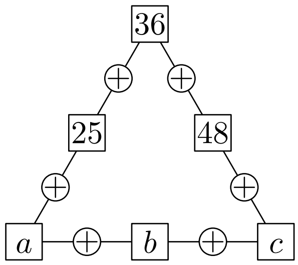
Z9–II–1

Do prázdných čtverců na obrázku patří taková přirozená čísla, aby součet tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný. Kolik různých trojic přirozených čísel lze do obrázku doplnit?



(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Čísla patřící do prázdných polí označme po řadě a, b, c.



Ze součtů na levé a pravé straně trojúhelníku odvodíme

$$a = (36 + 48 + c) - (36 + 25) = c + 23.$$

Podobně vyjádříme pomocí proměnné c i proměnnou b, tedy

$$b = (36 + 48 + c) - (c + c + 23) = 61 - c.$$

Aby výrazu $61 - c$ odpovídalo přirozené číslo, musí platit $c < 61$. Za c tedy můžeme dosadit jakékoli přirozené číslo od 1 do 60, do obrázku lze tudíž doplnit 60 různých trojic přirozených čísel.

Jiné řešení. Do pole c dosadíme nejmenší možné číslo, tedy 1. Pak ve spodním řádku budou čísla 24, 60, 1. Dáme-li do pole c číslo o 1 větší, zvětší se součet na pravé straně trojúhelníku o 1. Abychom dostali tentýž součet i na zbylých stranách, číslo v poli a zvětšíme oproti předchozímu způsobu vyplnění o 1, číslo v poli b zmenšíme o 1. Ve spodním řádku tak dostaneme čísla 25, 59, 2. Stejným způsobem bychom postupně získali všechna řešení, poslední by mělo v poli b číslo 1. Existuje tedy 60 různých řešení.

Hodnocení. 3 body za odvození počtu řešení (holý výpočet) a další 3 body za zdůvodnění. Za pouhé uvedení jedné možnosti doplnění udělte 1 bod. Za pouhé uvedení správného počtu možností bez jakéhokoliv výpočtu či zdůvodnění udělte rovněž 1 bod.

Z9–II–2

Noční hlídač si psal pro ukrácení času posloupnost čísel. Začal jistým přirozeným číslem. Každý další člen posloupnosti vytvořil tak, že k předchozímu členu přičetl určité číslo: k prvnímu členu přičetl 1, k druhému 3, ke třetímu 5, ke čtvrtému 1, k pátému 3, k šestému 5, k sedmému 1 a tak dále. Víme, že se v jeho posloupnosti nacházejí čísla 40 a 874.

1. Které číslo následuje v posloupnosti těsně po čísle 40 a které těsně po čísle 874?
2. V posloupnosti najdeme dva těsně po sobě jdoucí členy, jejichž součet je 491. Která dvě čísla to jsou?

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. 1. Po čísle 40 postupoval hlídač přičítáním $+1+3+5$ nebo $+3+5+1$ nebo $+5+1+3$. Každopádně se však dostal k číslu 49. Určitě došel i k číslům 58, 67 atd., tj. obecně $40 + a \cdot 9$, kde a je přirozené číslo. Nejvyšším takovým číslem menším než 874 je $868 = 40 + 92 \cdot 9$. Aby hlídač dostal číslo 874, mohl k 868 přičítat jedině $+5+1$. Z toho odvodíme pořadí sčítanců, které hlídač přičítal mezi čísly 859 a 868 a stejně tak mezi čísly 40 a 49. Toto pořadí je $+5+1+3$. Nyní je už zřejmé, že v posloupnosti následuje po čísle 40 číslo 45 a po čísle 874 číslo 877.

2. Rozdíl dvou sousedních čísel v posloupnosti může být 1, 3 nebo 5. Podle toho hledaná čísla mohou být a) 245 a 246, b) 244 a 247 nebo c) 243 a 248. Najdeme člen posloupnosti, jehož hodnota je blízká hledaným číslům. Tím je např. číslo 238, protože $238 = 40 + 22 \cdot 9$. Z předchozí části úlohy víme, že po takovém čísle následuje přičítání $+5+1+3$. Část posloupnosti tedy tvoří čísla …, 238, 243, 244, 247, 252, … a hledanými členy posloupnosti jsou 244 a 247.

Jiné řešení 2. části. Nejprve zjistíme, zda do posloupnosti patří dvojice čísel a) 245 a 246. Z rozdílu těchto čísel odvodíme, že číslo 245 by musel hlídač získat přičtením $+\,5$, tedy předchozím členem by bylo 240. Členu 240 by předcházela trojice sčítanců $+\,5+1+3$, tedy ta, která následuje po členu 40. To však není možné, protože $240 - 40 = 200$ a 200 není násobek devíti. Podobně můžeme vyšetřit i zbylé dvojice b) a c).

Hodnocení. V 1. části 2 body za správnou odpověď a 2 body za zdůvodnění; v 2. části 1 bod za správnou odpověď a 1 bod za zdůvodnění.

Z9–II–3

Vojta Vodník se bavil tím, že přeléval vodu mezi třemi nádobami. Nejprve přelil po jedné třetině vody z druhé nádoby do první a třetí. Poté přelil po jedné čtvrtině vody z první nádoby do druhé a třetí a nakonec ještě po jedné pětině vody ze třetí nádoby do první a druhé nádoby. Pak bylo v každé nádobě po jednom litru vody. Kolik vody měl Vojta původně v jednotlivých nádobách? (*M. Petrová*)

Možné řešení. (Řešení „od začátku“) Označme množství vody v jednotlivých nádobách x, y a z. Celý proces přelévání je ve zkratce znázorněn následující tabulkou; všechny hodnoty jsou v litrech.

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
na začátku	x	y	z
1. přelévání	$+\frac{y}{3}$	$-2\cdot\frac{y}{3}$	$+\frac{y}{3}$
po přelévání	$x+\frac{y}{3}$	$\frac{y}{3}$	$z+\frac{y}{3}$
2. přelévání	$-2\cdot\frac{x+\frac{y}{3}}{4}$	$+\frac{x+\frac{y}{3}}{4}$	$+\frac{x+\frac{y}{3}}{4}$
po přelévání	$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}$	$\frac{x}{4}+\frac{5y}{12}$	$\frac{x}{4}+\frac{5y}{12}+z$
3. přelévání	$+\frac{\frac{x}{4}+\frac{5y}{12}+z}{5}$	$+\frac{\frac{x}{4}+\frac{5y}{12}+z}{5}$	$-2\cdot\frac{\frac{x}{4}+\frac{5y}{12}+z}{5}$
na konci	$\frac{11x}{20}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}$	$\frac{3x}{10}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}$	$\frac{3x}{20}+\frac{y}{4}+\frac{3z}{5}$

Nyní snadno sestavíme soustavu rovnic, kterou budeme řešit:

$$\begin{aligned}\frac{11x}{20}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}&=1,\\ \frac{3x}{10}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}&=1,\\ \frac{3x}{20}+\frac{y}{4}+\frac{3z}{5}&=1,\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}11x+5y+4z&=20,\\ 6x+10y+4z&=20,\\ 3x+5y+12z&=20.\end{aligned}$$

Odečtením prvních dvou rovnic dostáváme

$$5x-5y=0,\ \text{tj. } y=x.$$

Dosadíme do upravené druhé a třetí rovnice:

$$16x + 4z = 20,$$
$$8x + 12z = 20.$$

Tyto rovnice od sebe opět odečteme:

$$8x - 8z = 0, \text{ tj. } z = x.$$

To znamená, že Vojta Vodník měl původně ve všech třech nádobách stejné množství vody, tj. po jednom litru jako na konci přelévání.

Hodnocení. 3 body za odvození množství vody v nádobách po třetím přelévání a 3 body za vyřešení soustavy rovnic.

Jiné řešení. (Řešení „od konce") Budeme postupovat obráceně. Na konci po třetím přelévání máme v každé nádobě po jednom litru vody. Jeden litr ve třetí nádobě představuje $\frac{3}{5}$ množství vody, jež bylo v této nádobě před třetím přeléváním. Přelévali jsme tedy po $\frac{1}{3}$ litru. Tuto vodu „vrátíme zpět":

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
po 3. přelévání	1	1	1
přelévání zpět	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
před 3. přeléváním	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$

V první nádobě jsou nyní $\frac{2}{3}$ litru, které představují $\frac{2}{4}$ množství vody v této nádobě před druhým přeléváním. Opět jsme přelévali po $\frac{1}{3}$ litru. Tuto vodu zase vrátíme zpátky:

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
po 2. přelévání	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
přelévání zpět	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
před 2. přeléváním	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

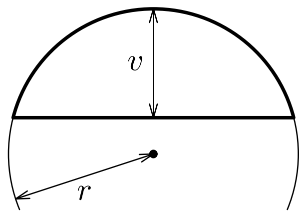
Celou úvahu zopakujeme ještě jednou. Množství vody v druhé nádobě představuje $\frac{1}{3}$ původního množství vody v této nádobě. Znamená to, že zpět vrátíme po $\frac{1}{3}$ litru vody:

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
po 1. přelévání	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
přelévání zpět	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
na začátku	1	1	1

Hodnocení. U každého přelévání 1 bod za určení, jaká část vody zůstala v nádobě, a 1 bod za stanovení množství vody v nádobách před přeléváním.

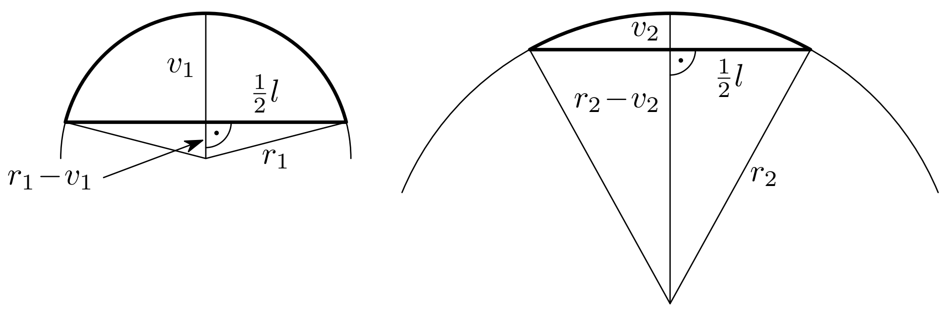
Z9–II–4

V Kocourkově plánovali postavit přes řeku ozdobný most, jehož oblouk má být částí kružnice. Profil oblouku vymezuje spolu s vozovkou kruhovou úseč. V původním návrhu byla ale výška oblouku mostu příliš velká. Postavili tedy most, jehož výška oblouku byla třikrát menší, tím se však poloměr příslušné kružnice dvakrát zvětšil. V jakém poměru byla výška oblouku mostu a poloměr příslušné kružnice u návrhu a v jakém u postaveného mostu?



(*M. Petrová*)

Možné řešení. Je třeba si uvědomit, že délka mostu l je v obou případech stejná. Označme dále r_1 a v_1 poloměr příslušné kružnice a výšku oblouku navrženého mostu, podobně r_2 a v_2 značí odpovídající veličiny u postaveného mostu.



Střed oblouku kružnice a krajní body vozovky mostu tvoří rovnoramenný trojúhelník, jehož základnou je vozovka mostu (vozovka mostu je tětivou příslušné kružnice). Potom pro délku mostu l podle Pythagorovy věty platí

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = r_1^2 - (r_1 - v_1)^2 = 2r_1v_1 - v_1^2, \tag{1}$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = r_2^2 - (r_2 - v_2)^2 = 2r_2v_2 - v_2^2. \tag{2}$$

Porovnáme rovnosti (1) a (2):

$$2r_1v_1 - v_1^2 = 2r_2v_2 - v_2^2. \tag{3}$$

Ze zadání ještě víme, že

$$v_1 = 3v_2, \tag{4}$$
$$r_2 = 2r_1. \tag{5}$$

Dosadíme do rovnice (3) a dále upravíme:

$$\begin{aligned}
2r_1(3v_2) - (3v_2)^2 &= 2(2r_1)v_2 - v_2^2,\\
6r_1v_2 - 9v_2^2 &= 4r_1v_2 - v_2^2,\\
2r_1v_2 &= 8v_2^2,\\
r_1v_2 &= 4v_2^2.
\end{aligned}$$

Protože v_2 je číslo kladné, můžeme jím rovnici vydělit:

$$r_1 = 4v_2. \tag{6}$$

Využijeme vztah (5):

$$r_2 = 2r_1 = 2 \cdot 4v_2 = 8v_2.$$

Nyní zjistíme hledané poměry:

- poměr u návrhu je $v_1 : r_1 = (3v_2) : (4v_2) = 3 : 4$,
- poměr u postaveného mostu je $v_2 : r_2 = v_2 : (8v_2) = 1 : 8$.

Hodnocení. 1 bod za správné užití Pythagorovy věty; 1 bod za porovnání délek mostu; 1 bod za vztahy (4) a (5); 1 bod za odvození vztahu (6) či za analogický vztah; po 1 bodu za každý výsledný poměr.