59. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

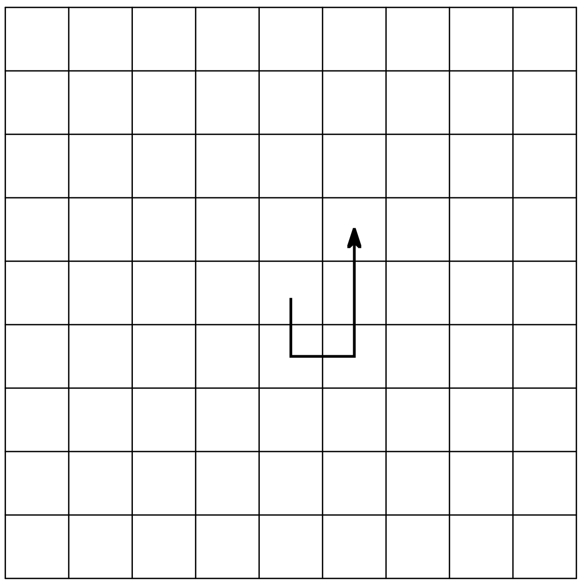
Matěj a jeho kamarádi šli koledovat. Kromě jablíček, oříšků a perníků dostal každý z chlapců i pomeranče. Jarda dostal jeden pomeranč, Milan také. Po dvou pomerančích dostali Radek, Patrik, Michal a Dušan. Matěj dostal dokonce čtyři pomeranče, což bylo nejvíc ze všech chlapců. Ostatní chlapci dostali po třech pomerančích. Kolik chlapců šlo na koledu, když všichni dohromady dostali 23 pomerančů? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Chlapci, jejichž jména známe, dostali celkem $1+1+2+2+2+2+4 = 14$ pomerančů. Na chlapce, jejichž jména neznáme, zbývá $23 - 14 = 9$ pomerančů. Protože každý z těchto chlapců dostal tři pomeranče, muselo jich být $9 : 3 = 3$. Sedm chlapců známe jménem, další tři chlapce ne, takže celkem šlo na koledu 10 chlapců.

Hodnocení. 2 body za určení počtu pomerančů, které dostali chlapci známých jmen; 1 bod za určení počtu pomerančů, které dostali chlapci neznámých jmen; 2 body za určení počtu chlapců neznámých jmen; 1 bod za určení počtu všech chlapců.

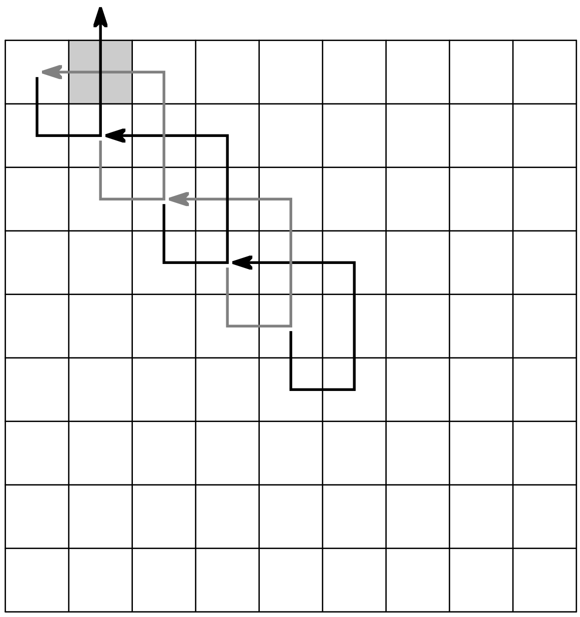
Z5–II–2

Ruměnice Josefína dopadla na stůl doprostřed čtvercové sítě tvořené 81 čtverečky, viz obrázek. Rozhodla se, že z ní nepoleze pryč přímo, ale následujícím způsobem: nejprve jeden čtvereček na jih, pak jeden na východ, dále dva na sever, poté dva na západ a opět jeden na jih, jeden na východ, dva na sever, dva na západ... Na kterém čtverečku byla těsně předtím, než slezla z této sítě? Po kolika čtverečcích této sítě lezla?



(*M. Petrová*)

Možné řešení. Zakreslíme do obrázku celou cestu ruměnice Josefíny po této čtvercové síti.



Předtím, než Josefína slezla ze čtvercové sítě, byla na šedě vyznačeném políčku. Celkem lezla po dvaceti čtverečcích této sítě.

Hodnocení. 3 body za znázornění nebo zdůvodnění správné cesty Josefíny po čtvercové síti; 1 bod za označení příslušného políčka ve čtvercové síti; 2 body za určení počtu políček, po kterých lezla. Dopustí-li se řešitel při načrtávání cesty chyby z nepozornosti, udělte celkem 2 body.

Z5–II–3

Jura má tyčky délek 2 cm, 3 cm, 3 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm a 9 cm. Skládá z nich strany trojúhelníků tak, že žádná tyčka není součástí strany dvou a více trojúhelníků. Může použít tolik tyček, kolik chce, ale nesmí je lámat a použité tyčky musí ležet celé na hranici trojúhelníku. Jura tvrdí, že se dají použít na poskládání stran tří trojúhelníků se stejnými obvody. Má pravdu? Jaký největší obvod by měly tyto trojúhelníky?

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Mají-li mít trojúhelníky největší možný obvod, potřebujeme použít co nejvíc co nejdelších tyček.

Všechny tyčky měří dohromady 51 cm. Kdybychom použili všechny, byl by obvod jednoho trojúhelníku $51 : 3 = 17$ (cm). V jednom z těchto trojúhelníků by musela být tyčka dlouhá 9 cm a na zbývající dvě strany by připadalo dohromady 8 cm. To by ovšem znamenalo, že součet délek dvou stran v trojúhelníku by byl menší než délka strany třetí, takže tyčku délky 9 cm nemůžeme pro trojúhelník s obvodem 17 cm použít. Samozřejmě ji nelze použít ani pro trojúhelník s ještě menším obvodem.

Zbývající tyčky mají součet délek 42 cm, takže na obvod jednoho trojúhelníku připadá 14 cm. To už je možné realizovat, a to kteroukoli z následujících možností (všechny veličiny jsou v cm):

- 6, 6, 2; 5, 5, 4; 5, 3+3, 3.
- 6, 5, 3; 5, 5, 4; 6, 3+3, 2.
- 6, 5, 3; 5, 5, 4; 6, 3, 3+2.
- 6, 5, 3; 6, 5, 3; 5, 4+2, 3.
- 6, 5, 3; 6, 5, 3; 5, 4, 2+3.

Ve všech pěti případech je u všech takto sestavených trojic splněna trojúhelníková nerovnost, takže Jura má pravdu a největší možné obvody jsou 14 cm.

Hodnocení. 1 bod za výpočet maximálního obvodu 17 cm; 2 body za vyloučení tyčky délky 9 cm; 1 bod za nalezení obvodu 14 cm; 1 bod za rozdělení tyček k jednotlivým obvodům; 1 bod za nějaké ověření trojúhelníkové nerovnosti u tohoto rozdělení. Za experimentálně nalezené jedno řešení a zjištění obvodů 14 cm bez vysvětlení, proč řešitel nepoužívá tyčku dlouhou 9 cm, udělte celkem 3 body.