59. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Křemílek a Vochomůrka našli bedničku s pokladem. Každý z nich si nabral do jedné kapsy stříbrné mince a do druhé kapsy zlaté mince. Křemílek měl v pravé kapse díru a cestou polovinu svých zlatek ztratil. Vochomůrka měl díru v levé kapse a cestou domů ztratil polovinu svých stříbrňáků. Doma věnoval Vochomůrka třetinu svých zlatek Křemílkovi a Křemílek čtvrtinu svých stříbrňáků Vochomůrkovi. Každý potom měl přesně 12 zlatek a 18 stříbrňáků. Kolik zlatek a kolik stříbrňáků si vzal každý z nich z nalezeného pokladu?

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Protože se ztráta i darování mincí týká vždy jen jednoho druhu mincí (buď zlatek, nebo stříbrňáků), budeme jejich množství počítat odděleně.

Zlatky: Vochomůrkovi zůstalo 12 zlatek, což jsou $\frac{2}{3}$ jeho původního množství. Přinesl si tedy 18 zlatek a 6 jich dal Křemílkovi. Tomu tedy zbylo v kapse po příchodu domů 6 zlatek, což je $\frac{1}{2}$ jeho původního množství. Odnesl si tedy 12 zlatek.

Stříbrňáky: Křemílkovi zůstalo 18 stříbrňáků, což jsou $\frac{3}{4}$ jeho původního množství. Přinesl si tedy 24 stříbrňáků a 6 jich dal Vochomůrkovi. Tomu tedy zbylo v kapse po příchodu domů 12 stříbrňáků, což je $\frac{1}{2}$ jeho původního množství. Odnesl si tedy 24 stříbrňáků.

Křemílek si vzal z pokladu 12 zlatek a 24 stříbrňáků, Vochomůrka 18 zlatek a 24 stříbrňáků.

Hodnocení. Za výpočet množství mincí prvního druhu každé z postav udělte 2 body, tj. dohromady 4 body; za analogický výpočet množství mincí druhého druhu každého skřítka udělte 1 bod, tj. dohromady 2 body.

Z7–II–2

Na tabuli jsou napsána tři přirozená čísla x, y a z. Určete která, pokud víte, že současně platí:

- x je z nich největší,
- nejmenší společný násobek čísel x a y je 200,
- nejmenší společný násobek čísel y a z je 300,
- nejmenší společný násobek čísel x a z je 120.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Zadané hodnoty nejmenších společných násobků rozložíme na součin prvočísel:

- $n(x, y) = 200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$,
- $n(y, z) = 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$,
- $n(x, z) = 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Do tabulky budeme postupně zapisovat prvočíselné činitele rozkladů čísel x, y a z, přičemž se budeme držet těchto zásad:

- Prvočíslo, které není v rozkladu nejmenšího společného násobku dvou neznámých, nemůže být ani v rozkladech těchto neznámých.
- Kolikrát je určité prvočíslo v rozkladu nejmenšího společného násobku dvou neznámých, tolikrát musí být v rozkladu jedné z těchto neznámých a maximálně tolikrát může být v rozkladu druhé neznámé.

Protože prvočíslo 2 je v rozkladu $n(x,y)$ třikrát, musí být v řádku x nebo v řádku y třikrát. V rozkladu $n(y,z)$ je však prvočíslo 2 jen dvakrát, takže v řádku y být třikrát nemůže. Prvočíslo 2 je tedy třikrát v řádku x. Podobně posoudíme i výskyt dvou prvočísel 5 v rozkladu $n(x,y)$ a jednoho prvočísla 5 v rozkladu $n(x,z)$, pak výskyt prvočísla 3 v rozkladu $n(y,z)$ a jeho absenci v rozkladu $n(x,y)$. Tabulka pak vypadá takto:

x	$2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$
y	$5 \cdot 5 \ldots$
z	$3 \ldots$

Pokud i nadále budeme v zadání přihlížet pouze k podmínkám o nejmenších společných násobcích, nedoplníme do tabulky už žádné prvočíslo jednoznačně. Všimneme si proto podmínky, že x je z neznámých největší. V řádku x máme zatím menší hodnotu než v řádku y, do řádku x tedy musíme ještě činitel doplnit. Prvočíslo 2 je obsaženo již v maximálním počtu, prvočíslo 3 doplnit nemůžeme, protože není v rozkladu $n(x,y)$. Doplnit lze už jen prvočíslo 5, avšak pouze jednou, protože v rozkladu $n(x,z)$ je jednou. Zjistili jsme tedy hodnotu první neznámé:

x	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
y	$5 \cdot 5 \ldots$
z	$3 \ldots$

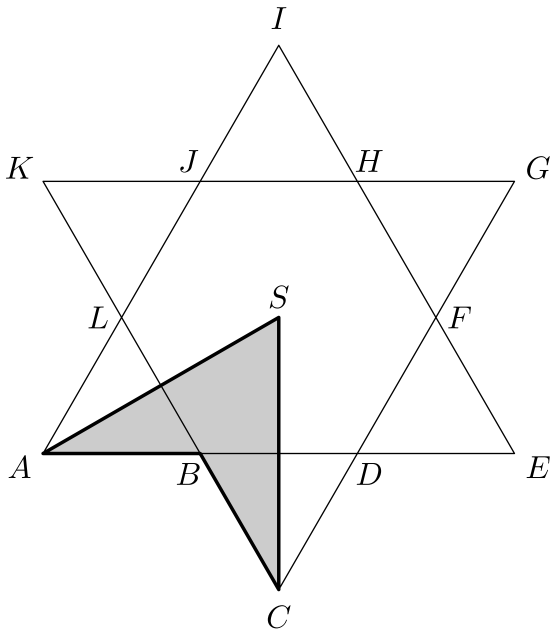
Do řádku y nelze dopsat už žádný činitel, y by jinak bylo větší než x. Tudíž $y = 25$. Do řádku z pak musíme dle rozkladu $n(y,z)$ doplnit dvě prvočísla 2. Hodnota v tomto řádku pak bude 12 a nepůjde už doplnit žádné prvočíslo 5, protože pak by hodnota v tomto řádku byla větší než v řádku x. Úloha má tedy jediné řešení, které ukazuje následující tabulka:

x	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
y	$5 \cdot 5 = 25$
z	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

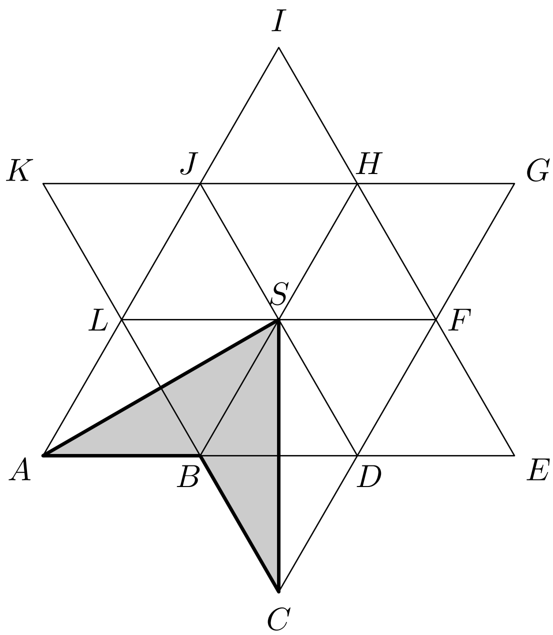
Hodnocení. 2 body za zjištění, že x je dělitelné osmi, y dvaceti pěti a z třemi; 2 body za konečné výsledky; další 2 body podle kvality komentáře.

Z7–II–3

Pravidelná šesticípá hvězda $ABCDEFGHIJKL$ se středem S, znázorněná na obrázku, vznikla sjednocením dvou rovnostranných trojúhelníků, z nichž každý měl obsah $72\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte obsah čtyřúhelníku $ABCS$. (*S. Bednářová*)



Možné řešení. Hvězda je souměrná podle šesti os souměrnosti, souměrný podle těch samých os musí být i šestiúhelník $BDFHJL$. Z toho plyne, že má všechny strany stejně dlouhé, všechny vnitřní úhly stejně velké, a že je tudíž pravidelný. Do obrázku ještě doplníme úsečky LS, BS, DS, FS, HS a JS, které tento pravidelný šestiúhelník rozdělují na šest shodných rovnostranných trojúhelníků.



Trojúhelníky LAB, BCD, DEF, FGH, HIJ a JKL jsou rovnostranné, protože všechny jejich vnitřní úhly mají evidentně velikost $60°$. S výše zmíněnými trojúhelníky mají vždy společnou jednu stranu. Teď vidíme, že jsme hvězdu rozdělili celkem na dvanáct shodných trojúhelníků.

Vypočítáme obsah jednoho z těchto malých trojúhelníků. Víme, že každý z původních rovnostranných trojúhelníků (tj. AEI a CGK) měl obsah $72\,\mathrm{cm}^2$. Dále víme, že je každý složen z devíti malých trojúhelníků. Jeden malý trojúhelník má proto obsah $72 : 9 =$

$= 8\,(\mathrm{cm}^2)$. Obsah čtyřúhelníku $ABCS$ odpovídá obsahu dvou takových trojúhelníků, je tedy roven $2 \cdot 8 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím postupu rozdělíme hvězdu na dvanáct shodných rovnostranných trojúhelníků, z nichž každý má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$. Celá hvězda má proto obsah $12 \cdot 8 = 96\,(\mathrm{cm}^2)$. Úsečky AS, CS, ES, GS, IS a KS ji rozdělují na šest čtyřúhelníků, které jsou vzájemně shodné: mají stejně dlouhé odpovídající si strany a stejně velké odpovídající si úhly (což rovněž vyplývá ze symetrií hvězdy). Jedním z těchto čtyřúhelníků je i $ABCS$. Jeho obsah je tedy šestkrát menší než obsah hvězdy, tj. $96 : 6 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$.

Hodnocení. 2 body za zdůvodněné rozdělení hvězdy na 12 shodných rovnostranných trojúhelníků nebo analogický poznatek; 2 body za obsah $8\,\mathrm{cm}^2$ jednoho malého trojúhelníku; 2 body za odvození obsahu čtyřúhelníku $ABCS$.