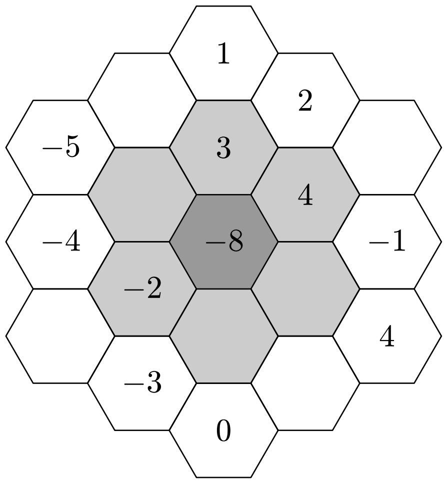
59. ročník Matematické olympiády

# II. kolo kategorie Z9

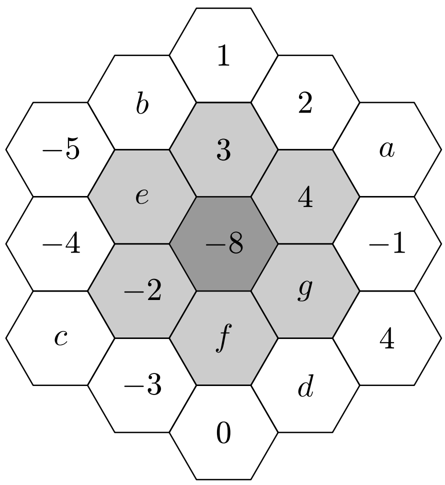
**Z9–II–1**

Doplňte do prázdných políček následujícího obrázku čísla tak, aby v každém políčku byl součet čísel ze všech s ním přímo sousedících světlejších políček. Tedy ve světle šedém políčku je součet čísel ze všech bílých sousedních políček, v tmavě šedém políčku je součet čísel ze všech světle šedých sousedních políček.




(*S. Bednářová*)

**Možné řešení.** Doplňovaná čísla označme $a$ až $g$, viz obrázek.




Číslo v každém světle šedém poli je součtem tří čísel v bílých polích. Pokud z takové čtveřice čísel chybí jen jediné, určíme ho snadno:

$$a = 4 - (-1) - 2 = 3,$$
$$b = 3 - 2 - 1 = 0,$$
$$c = -2 - (-4) - (-3) = 5.$$

Po zjištění čísla $b$ známe všechna tři čísla potřebná pro doplnění čísla $e$:

$$e = 0 + (-5) + (-4) = -9.$$

Čísla $f$ a $g$ jsou obě závislá na čísle $d$ a pomocí něho je vyjádříme:

$$\begin{aligned} f &= -3 + 0 + d = d - 3,\\ g &= d + 4 + (-1) = d + 3. \end{aligned}$$

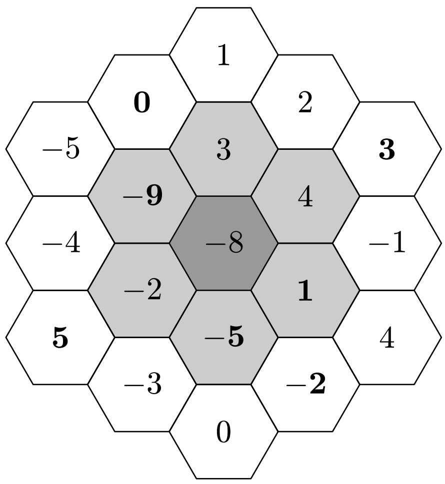
Číslo v tmavě šedém poli je rovno součtu čísel v šesti světle šedých polích. Tak docházíme k rovnici o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} -8 &= 4 + 3 + (-9) + (-2) + (d - 3) + (d + 3),\\ -8 &= -4 + 2d,\\ d &= -2. \end{aligned}$$

Dosazením za $d$ určíme hodnotu čísel $f$ a $g$:

$$\begin{aligned} f &= d - 3 = -2 - 3 = -5,\\ g &= d + 3 = -2 + 3 = 1. \end{aligned}$$

Obrazec tedy lze vyplnit čísly jediným způsobem a ten ukazuje následující obrázek.




**Hodnocení.** 2 body za čísla $a$, $b$, $c$, $e$ (je-li jedno z nich špatně, udělte 1 bod, jsou-li dvě z nich špatně, udělte 0 bodů); 2 body za patřičné zdůvodnění při doplňování čísel $d$, $f$, $g$; 1 bod za určení jednoho z čísel $d$, $f$, $g$; 1 bod za určení obou zbylých čísel z této trojice.

**Z9–II–2**

Šárka nalila džus do skleničky a hrnku a obě nádoby doplnila vodou. Hrnek měl dvakrát větší objem než sklenička. Poměr džusu a vody ve skleničce byl 2 : 1 a v hrnku 4 : 1. Poté přelila obsah skleničky i obsah hrnku do džbánu. Jaký byl poměr džusu a vody ve džbánu? (*L. Hozová*)

**Možné řešení.** Pokud označíme objem skleničky $V$, pak podle zadání bylo ve skleničce $\frac{2}{3}V$ džusu a $\frac{1}{3}V$ vody. Objem hrnku byl dvakrát větší než objem skleničky, tedy $2V$. Džusu v něm bylo $\frac{4}{5} \cdot 2V = \frac{8}{5}V$ a vody v něm bylo $\frac{1}{5} \cdot 2V = \frac{2}{5}V$. Objem džusu ve džbánu pak byl $\frac{2}{3}V + \frac{8}{5}V = \frac{10+24}{15}V = \frac{34}{15}V$. Objem vody ve džbánu byl $\frac{1}{3}V + \frac{2}{5}V = \frac{5+6}{15}V = \frac{11}{15}V$. Kýžený poměr džusu a vody ve džbánu byl $\frac{34}{15}V : \frac{11}{15}V$, tj. po zkrácení $34 : 11$.

**Hodnocení.** 1 bod za vyjádření objemů v jedné nádobě; 2 body za vyjádření objemů ve druhé nádobě pomocí stejné neznámé jako u první nádoby; 2 body za vyjádření objemů ve džbánu; 1 bod za výsledný poměr.

**Poznámka.** V případě skleničky a hrnku můžeme vyjadřovat jen objem jedné složky. Až ve džbánu potřebujeme znát objem obou složek. Tehdy můžeme objem druhé složky určit odečtením objemu první složky od celkového objemu směsi, tj. např. $\frac{34}{15}V = 3V - \frac{11}{15}V$.

## Z9–II–3

Dostal jsem zadána dvě dvojmístná přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Určete, která čísla jsem měl zadána, jestliže současně platí:

- rozdíl zaokrouhlených čísel je stejný jako rozdíl čísel původních,
- součin zaokrouhlených čísel je o 184 větší než součin čísel původních.

(*L. Šimůnek*)

**Možné řešení.** Přirozené číslo zaokrouhlujeme na desítky tak, že k němu přičteme vhodné celé číslo od $-4$ do 5. Je-li rozdíl původních a zaokrouhlených čísel stejný, znamená to, že k oběma původním číslům jsme při zaokrouhlování přičítali stejné číslo, tedy že původní čísla mají na místě jednotek stejnou číslici.

Součin zaokrouhlených čísel má na místě jednotek číslici 0. Součin původních čísel je podle zadání o 184 menší, tedy na místě jednotek má číslici 6. Hodnotu této číslice ovlivňuje pouze číslice na místě jednotek hledaných čísel. Hledaná čísla proto mohla mít na místě jednotek buď číslici 4 ($4 \cdot 4 = 16$), nebo číslici 6 ($6 \cdot 6 = 36$). Z druhé podmínky v zadání však jasně plyne, že hledaná čísla byla zaokrouhlena nahoru. Musela tedy končit číslicí 6.

Pokud označíme hledaná čísla jako $p$ a $q$, pak podle druhé podmínky v zadání sestavíme rovnici

$$(p+4) \cdot (q+4) = pq + 184,$$

kterou upravíme

$$\begin{aligned} pq + 4p + 4q + 16 &= pq + 184, \\ 4(p+q) &= 168, \\ p + q &= 42. \end{aligned}$$

Jediná dvojmístná čísla končící číslicí 6 a vyhovující této rovnici jsou 16 a 26.

**Jiné řešení.** Stejným postupem jako výše určíme, že obě hledaná čísla mají na místě jednotek číslici 6. Hledaná čísla, dle zadání dvojmístná, lze zapsat jako $10a + 6$ a $10b + 6$, kde $a$ a $b$ představují číslice na místě desítek. Čísla mají po zaokrouhlení hodnotu $10a + 6 + 4 = 10(a+1)$ a $10b + 6 + 4 = 10(b+1)$. Rovnice podle druhé podmínky v zadání pak je

$$(10a + 6) \cdot (10b + 6) + 184 = 10(a+1) \cdot 10(b+1)$$

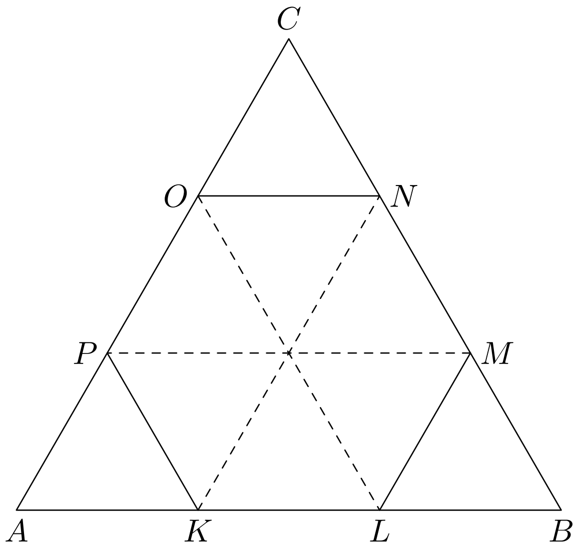
a po úpravách dostaneme $a + b = 3$. Neznámé $a$ a $b$ jsou číslice na místě desítek dvou hledaných čísel. Číslici 0 na místě desítek nepřipouští zadání, protože má jít o čísla dvojmístná. Součet 3 tak mohou dát jen číslice 1 a 2 a hledaná čísla jsou 16 a 26.

**Hodnocení.** 1 bod za poznatek, že hledaná čísla končí stejnou číslicí; 2 body za zdůvodnění, že tato číslice je 6; 1 bod za sestavení rovnice; 2 body za správný závěr.

**Z9–II–4**

Do rovnostranného trojúhelníku $ABC$ je vepsán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ tak, že body $K$, $L$ leží na straně $AB$, body $M$, $N$ leží na straně $BC$ a body $O$, $P$ leží na straně $AC$. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $KLMNOP$, jestliže obsah trojúhelníku $ABC$ je $60\,\mathrm{cm}^2$. (*K. Pazourek*)

**Možné řešení.** Vepišme šestiúhelník $KLMNOP$ do trojúhelníku $ABC$ předepsaným způsobem.




Úhel $AKP$ je vedlejším úhlem úhlu $PKL$. Úhel $PKL$ je vnitřní úhel pravidelného šestiúhelníku, tj. měří 120°. Velikost úhlu $AKP$ je tedy $180° - 120° = 60°$. Potom trojúhelník $AKP$ je rovnostranný, protože jeho vnitřní úhly $PAK$ a $AKP$ (a tudíž i $KPA$) měří 60°. Stejnou úvahou lze ověřit rovnostrannost trojúhelníků $LBM$ a $ONC$.

Pokud rozdělíme šestiúhelník $KLMNOP$ na šest shodných rovnostranných trojúhelníků, zjistíme, že jsou shodné s rovnostrannými trojúhelníky $AKP$, $LBM$ a $ONC$ (kvůli společným stranám $PK, LM, NO$). Mají proto všechny stejný obsah. Šestiúhelník se skládá ze šesti takovýchto trojúhelníků, trojúhelník $ABC$ z devíti, proto poměr jejich obsahů je $6 : 9 = 2 : 3$. Tedy obsah šestiúhelníku $KLMNOP$ je $\frac{2}{3} \cdot 60 = 40\,(\mathrm{cm}^2)$.

**Hodnocení.** 2 body za vysvětlení, že trojúhelníky $AKP$, $LBM$, $ONC$ jsou rovnostranné; 2 body za vysvětlení, že tyto trojúhelníky a šest trojúhelníků tvořících šestiúhelník jsou shodné; 1 bod za porovnání obsahů obou útvarů; 1 bod za výsledek.

**Jiné řešení.** Nejprve stejně jako v předchozím řešení dokážeme, že trojúhelníky $AKP$, $LBM$, $ONC$ jsou rovnostranné. Protože vždy jedna strana těchto trojúhelníků je stranou pravidelného šestiúhelníku $KLMNOP$, trojúhelníky $AKP$, $LBM$, $ONC$ jsou shodné a platí $|AK| = |KL| = |LB| = \frac{1}{3}|AB|$, tj. body $K$, $L$ dělí úsečku $AB$ na třetiny. Podobně body $M$, $N$ (respektive $O$, $P$) dělí úsečku $BC$ (respektive $AC$) na třetiny.

Označme délku strany šestiúhelníku $KLMNOP$ jako $a$. Pak obsah $S_1$ tohoto šestiúhelníku spočteme podle vzorce

$$S_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Obsah rovnostranného trojúhelníku $ABC$ pak je

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Odtud plyne $S_1 = \frac{2}{3}S_2$, po dosazení $S_1 = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40\,(\mathrm{cm}^2)$.

**Hodnocení.** 2 body za vysvětlení, že trojúhelníky $AKP$, $LBM$, $ONC$ jsou rovnostranné; 1 bod za zdůvodnění, že $|KL| = \frac{1}{3}|AB|$; 1 bod za vyjádření obsahů obou útvarů pomocí jedné neznámé; 1 bod za poměr obsahů obou útvarů nebo analogický poznatek; 1 bod za výsledek.

**Ještě jiné řešení.** Další možnost v podstatě kopíruje předchozí postup s tím, že díky obsahu daného trojúhelníku přibližně vypočítáme všechny potřebné údaje. Všechny výpočty jsou provedeny s pomocí tabulek a bez kalkulačky.

Nejprve vypočteme ze vzorce pro obsah rovnostranného trojúhelníku délku jeho strany:

$$60 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

odtud $b \doteq 11{,}8\,(\mathrm{cm})$. Analogicky jako v předchozích řešeních dokážeme, že trojúhelníky $AKP$, $LBM$, $ONC$ jsou rovnostranné a že body $K$, $L$, $M$, $N$, $O$, $P$ dělí příslušné strany trojúhelníku na třetiny. Potom strana $a$ šestiúhelníku $KLMNOP$ měří $a = b : 3 \doteq 3{,}93\,(\mathrm{cm})$. Odtud ze vzorce pro obsah pravidelného šestiúhelníku vypočítáme obsah $KLMNOP$:

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \doteq 40{,}1\,(\mathrm{cm}^2).$$

**Hodnocení.** 1 bod za výpočet délky strany trojúhelníku $ABC$; 2 body za vysvětlení, že trojúhelníky $AKP$, $LBM$, $ONC$ jsou rovnostranné; 2 body za výpočet délky strany šestiúhelníku a zdůvodnění úvahy; 1 bod za výpočet obsahu šestiúhelníku.