I. kolo kategorie Z6

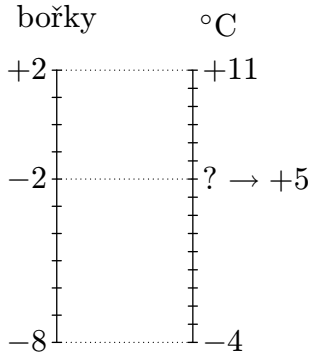
Z6–I–1

Když Bořek natíral vrata garáže, přetřel omylem i stupnici nástěnného venkovního teploměru. Trubička se rtutí však zůstala nepoškozená, a tak Bořek původní stupnici přelepil páskem vlastní výroby. Na něj pečlivě vyrýsoval dílky, všechny byly stejně velké a označené čísly. Jeho dílek měl však jinou velikost než původní dílek, který představoval jeden stupeň Celsia, a i nulu Bořek umístil jinam, než kde bylo 0 °C. Takto začal Bořek měřit teplotu ve vlastních jednotkách: bořcích. Když by měl teploměr ukazovat teplotu 11 °C, ukazoval 2 bořky. Když by měl ukazovat −4 °C, ukazoval −8 bořků. Jaká je teplota ve stupních Celsia, vidí-li Bořek na svém teploměru teplotu −2 bořky? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Při 11 °C ukazuje teploměr 2 bořky. Když teplota klesne na −4 °C, tedy o 15 °C, ukazuje teploměr −8 bořků, tedy o 10 bořků méně než v prvém případě. Změna teploty o 10 bořků odpovídá změně o 15 °C, tudíž změna o 1 bořek představuje změnu o 1,5 °C. Teplota −2 bořky, na kterou se ptá úloha, je o 4 bořky menší než teplota uvedená v úvodu našeho řešení. Teplota −2 bořky je proto ve stupních Celsia rovna

$$11 - 4 \cdot 1{,}5 = 5.$$

Jiné řešení. Úlohu lze řešit i graficky např. na milimetrovém papíře:



Z6–I–2

Začínající písničkář prodával vždy po vystoupení CD se svou hudbou. Ve čtvrtek prodal osm stejných CD. Den nato už nabízel i své nové CD a lidé si tak mohli koupit to samé jako ve čtvrtek nebo nové. V sobotu chtěli všichni posluchači nové CD a písničkář jich prodal ten den šest. V jednotlivých dnech utržil 590 Kč, 720 Kč a 840 Kč, neprozradíme však, která částka patří ke kterému dni.

- Kolik stálo starší CD?
- Kolik nových CD prodal v pátek?

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Nejprve se pokusíme přiřadit jednotlivé částky ke dnům. Čtvrteční tržba musí být násobkem osmi, sobotní násobkem šesti. Čísla 720 a 840 jsou obě násobky šesti

i osmi. Číslo 590 není násobkem šesti ani osmi. Tedy písničkář buď utržil a) ve čtvrtek 720 Kč a v sobotu 840 Kč nebo b) naopak. V pátek získal určitě 590 Kč. Prověřme obě možnosti.

a) Cena starého CD by byla $720 : 8 = 90$ (Kč) a cena nového $840 : 6 = 140$ (Kč). Ověříme, zda lze z uvedených dvou cen složit pátečních 590 Kč. Uvažujme postupně různé počty nových CD, jejich celkovou cenu vždy odečtěme od 590 Kč a sledujme, zda je výsledný rozdíl dělitelný číslem 90.

za nová CD	0	$1 \cdot 140$	$2 \cdot 140$	$3 \cdot 140$	$4 \cdot 140$
za stará CD	590	450	310	170	30

Tabulka ukazuje, že z cen 90 Kč a 140 Kč lze složit částku 590 Kč, a to jediným způsobem: $1 \cdot 140 + 5 \cdot 90$.

b) Cena starého CD by byla $840 : 8 = 105$ (Kč) a cena nového $720 : 6 = 120$ (Kč). Podobně jako v předchozím případě ověříme, zda lze z uvedených dvou cen složit pátečních 590 Kč. (Tabulka bude jednodušší, uvážíme-li dopředu, že páteční tržba za stará CD musí mít na místě jednotek nulu, aby i tržba za nová CD měla na místě jednotek nulu.)

za stará CD	0	$2 \cdot 105$	$4 \cdot 105$
za nová CD	590	380	170

Tabulka ukazuje, že z cen 105 Kč a 120 Kč nelze složit 590 Kč.

Úloha má jediné řešení: staré CD stálo 90 Kč a v pátek písničkář prodal jedno nové CD.

Z6–I–3

Vojta napsal číslo 2010 stokrát bez mezer za sebou. Kolik čtyřmístných a kolik pětimístných souměrných čísel bylo ukryto v tomto zápise? (Souměrné číslo je takové číslo, které je stejné, je-li čteno zepředu i zezadu, např. 39193.) (*L. Hozová*)

Možné řešení. Vojtův zápis začíná takto: 2010201020102010... Kdyby Vojta napsal 2010 dvakrát za sebou, bylo by v zápise jedno pětimístné souměrné číslo 20102 a jedno pětimístné souměrné číslo 10201. Kdyby napsal 2010 třikrát za sebou, bylo by v zápise každé z výše uvedených souměrných čísel dvakrát. Pokračujeme-li v této úvaze dál, zjišťujeme, že když Vojta napsal 2010 stokrát za sebou, bylo v zápise každé uvedené souměrné číslo 99krát, tj. 99krát číslo 20102 a 99krát číslo 10201.

V zápise tedy bylo ukryto $2 \cdot 99 = 198$ pětimístných souměrných čísel. Čtyřmístná souměrná čísla v zápise nejsou.