

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Paní Hovorková měla 1. července 2010 na svém mobilu kredit 157,0 Kč. Z kreditu se postupně odečítají částky za hovory, a to tak, že za každou započatou minutu se odečte 4,5 Kč. Textové zprávy paní Hovorková nepíše a ani žádné další placené služby nepoužívá. Svůj kredit dobíjí podle potřeby, a to vždy částkou 400 Kč. Dne 31. prosince 2010 byl její kredit 353,0 Kč. Kolikrát minimálně dobíjela paní Hovorková za zmíněný půlrok svůj kredit?
(L. Šimůnek)

Možné řešení. Částka v korunách, kterou paní Hovorková provolala v období od 1.7. do 31.12., je celé číslo, protože počáteční i konečný stav kreditu a dobíjené částky jsou vždy rovny celému číslu. Za každou započatou minutu je účtováno 4,5 Kč, a proto aby se došlo k celému číslu, musel být účtován sudý počet minut. Částka provolaná za toto období je tedy beze zbytku dělitelná číslem devět.

Protože počáteční kredit je menší než konečný, musela paní Hovorková ve sledované době aspoň jednou dobíjet. Kdyby dobíjela jen jednou, provolaná částka by činila $157 + 400 - 353 = 204$ (Kč). Podle ciferného součtu čísla 204 vidíme, že nejde o násobek devíti, a tak tuto možnost zavrhneme. Kdyby dobíjela dvakrát, provolaná suma by byla o 400 Kč větší, tedy 604 Kč. Tuto možnost zavrhneme, protože ani 604 není násobek devíti. Podobně zamítneme i možnost tří dobítí vedoucí k částce 1 004 Kč. Pokud by dobíjela čtyřikrát, provolaná suma by byla 1 404 Kč. To je možné, protože 1 404 je násobkem devíti. Paní Hovorková tedy ve sledovaném období dobíjela minimálně čtyřikrát.

Jiné řešení. Je zřejmé, že paní Hovorková dobíjela svůj kredit aspoň jednou. V tabulce budeme postupně uvažovat o různých počtech dobíjení: vždy určíme provolanou částku za sledované období a kolika minutám tato částka odpovídá. Budeme pokračovat tak dlouho, dokud počet účtovaných minut nevyjde jako celé číslo.

| počet dobíjení | provolaná částka v Kč | počet účtovaných minut |
|----------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 1 | $157 + 400 - 353 = 204$ | $204 : 4,5 \doteq 45,3$ |
| 2 | $157 + 2 \cdot 400 - 353 = 604$ | $604 : 4,5 \doteq 134,2$ |
| 3 | $157 + 3 \cdot 400 - 353 = 1\,004$ | $1\,004 : 4,5 \doteq 223,1$ |
| 4 | $157 + 4 \cdot 400 - 353 = 1\,404$ | $1\,404 : 4,5 = 312$ |

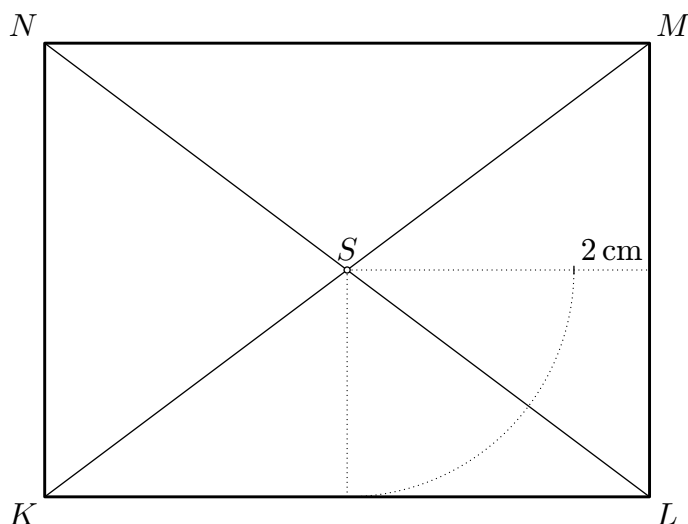
Paní Hovorková ve sledovaném období dobíjela minimálně čtyřikrát.

Hodnocení. 4 body za prověřování možností 204, 604, 1 004, 1 404; 1 bod za vysvětlení, proč možnosti zamítáme; 1 bod za správný závěr.

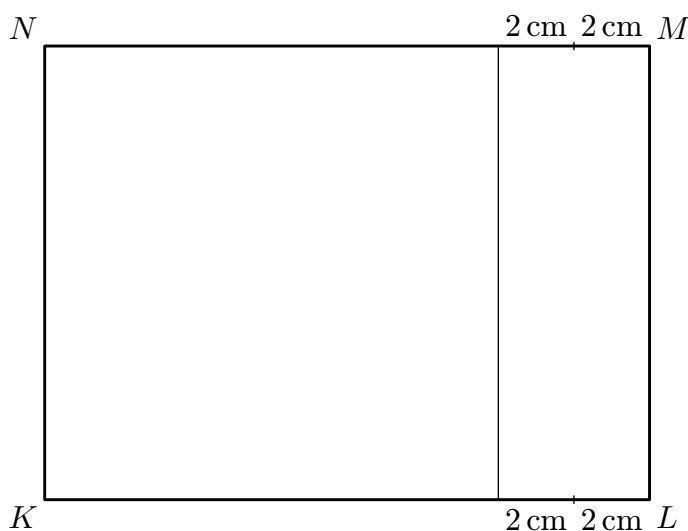
Z6–II–2

V obdélníku $KLMN$ je vzdálenost průsečíku úhlopříček od přímky KL o 2 cm menší než jeho vzdálenost od přímky LM . Obvod obdélníku je 56 cm. Jaký je obsah obdélníku $KLMN$? (L. Hozová)

Možné řešení. Průsečík úhlopříček v obdélníku $KLMN$ označíme S . Je-li vzdálenost bodu S od strany KL o 2 cm menší než od strany LM , znamená to, že strana KL je o $2 + 2 = 4$ (cm) delší než strana LM .



Jestliže tedy zkrátíme délku obdélníku (tj. strany KL a MN) o 4 cm, získáme tak čtverec, jehož strana je stejná jako šířka původního obdélníku. Tento čtverec má obvod $56 - 2 \cdot 4 = 48$ (cm).



Strana čtverce, a tedy i strany LM a NK obdélníku měří $48 : 4 = 12$ (cm). To znamená, že strany KL a MN měří $12 + 4 = 16$ (cm). Obsah obdélníku je tudíž $S = 16 \cdot 12 = 192$ (cm²).

Hodnocení. 2 body za určení vztahů mezi stranami KL a LM ; 2 body za určení velikostí stran KL a LM pomocí obvodu; 2 body za určení obsahu obdélníku.

Z6–II–3

V létě se u babičky sjelo šest vnoučat a víme o nich, že

- Martinka se někdy musí starat o brášku Tomáška, který je o 8 let mladší,
- Věrka, která je o 7 let starší než Ida, ráda vypráví strašidelné příběhy,
- s Martinkou se často pere o rok mladší Jaromír,
- Tomášek je o 11 let mladší než Kačka,
- Ida často zlobí svého o 4 roky staršího bratra Jaromíra,
- klukům je dohromady 13 let.

Jak staré jsou všechny zmiňované děti?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Martinka je o 8 let starší než Tomášek a o 1 rok starší než Jaromír, Jaromír je tedy o 7 let starší než Tomášek. Navíc klukům je dohromady 13 let. Kdyby byl Tomášek o 7 let starší (tedy stejně starý jako Jaromír), bylo by jim dohromady 20 let. Jaromírovi je tedy 10 let a Tomáškovi 3 roky.

Odtud již snadno dopočítáme stáří ostatních vnoučat: Martinka je o 8 let starší než Tomášek, je jí tedy 11 let, Kačka je o 11 let starší než Tomášek, je jí 14 let, Jaromír je o 4 roky starší než Ida, Idě je 6 let, Věrka je o 7 let starší než Ida, je jí 13 let.

Hodnocení. 3 body za určení věků obou kluků (z toho 1 bod je za uvedení postupu); 3 body za určení věků čtyř vnuček (z toho 1 bod je za uvedení postupu).