II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Na kartě je napsáno čtyřmístné přirozené číslo, ve kterém můžeme vyškrtnout jakékoli dvě číslice a vždy dostaneme dvojmístné přirozené číslo, jež je beze zbytku dělitelné číslem 5. Kolik takových čtyřmístných přirozených čísel existuje? (Pozor, např. číslo 06 není dvojmístné.) (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Číslice vyhovujícího čtyřmístného čísla označíme takto: v je na místě tisíců, x na místě stovek, y na místě desítek a z na místě jednotek. Přirozené číslo je dělitelné pěti, právě když má na místě jednotek číslici 0 nebo 5. Po vyškrtnutí dvou číslic z původního čísla se na místo jednotek mohou dostat číslice x, y nebo z, proto tyto číslice mohou být jedině 0 nebo 5. Podle zadání dostaneme po vyškrtnutí jakýchkoli dvou číslic dvojmístné číslo. Takto vzniklé číslo může mít na místě desítek číslice v, x nebo y, tyto číslice tedy nemohou být 0.

Shrneme-li oba předchozí poznatky, může být číslice v rovna jakékoli číslici od 1 do 9, číslice x a y mohou být jedině 5 a číslice z může být 0 nebo 5. Dohromady tak existuje $9 \cdot 2 = 18$ čtyřmístných čísel vyhovujících zadání.

Hodnocení. 1 bod za poznatek, že po škrtání se na místo jednotek dostávají číslice x, y, z; 1 bod za podmínku $v, x, y \neq 0$; 1 bod za zjištění, že x a y je 5; 1 bod za poznatek, že z je 0 nebo 5; 1 bod za počet možností pro číslici v; 1 bod za výsledek 18.

Žáka ohodnoťte plným počtem bodů, i když stanoví podmínky a pak dojde k počtu 18 vypsáním všech vyhovujících čísel. Řešení, v němž jsou vypsány všechny možnosti bez jakéhokoli komentáře, ohodnoťte nejvýše 4 body.

Z7–II–2

Karel a Vojta zjistili, že kuchyňské hodiny na chalupě se předbíhají o 1,5 minuty za každou hodinu a hodiny v ložnici se o půl minuty každou hodinu zpožďují. V pravé poledne seřídili hodiny na stejný a správný čas. Hodiny v kuchyni i v ložnici mají obvyklý dvanáctihodinový ciferník. Urči, kdy nejdříve budou (bez dalšího opravování)

1. kuchyňské hodiny ukazovat opět přesný čas,
2. hodiny v ložnici ukazovat opět přesný čas,
3. oboje hodiny ukazovat opět stejný (i když možná nesprávný) čas.

(*M. Volfová*)

Možné řešení. 1. Hodiny budou ukazovat opět přesný čas, když předběhnou skutečný čas o 12, 24, 36, ... hodin. Nejdříve tedy, když předběhnou skutečný čas o 12 hodin neboli o 720 minut. Toho dosáhnou za $720 : 1{,}5 = 480$ hodin. Kuchyňské hodiny budou opět ukazovat přesný čas nejdříve za 480 hodin (což je právě 20 dnů).

2. Nejdříve budou hodiny ukazovat opět přesný čas, když se oproti skutečnému času opozdí o 12 hodin neboli o 720 minut. Toho dosáhnou za $720 : 0{,}5 = 1\,440$ hodin. Hodiny v ložnici budou opět ukazovat přesný čas nejdříve za 1 440 hodin (což je právě 60 dnů).

3. Každou hodinu se rozdíl času, který ukazují kuchyňské hodiny, oproti času, který ukazují hodiny v ložnici, zvýší o $1{,}5+0{,}5 = 2$ minuty. Tento rozdíl musí postupně dosáhnout 720 minut, a to se stane za $720 : 2 = 360$ hodin. Hodiny budou opět ukazovat stejný čas nejdříve za 360 hodin (což je právě 15 dnů).

Hodnocení. Každá část úlohy je za 2 body, z nichž je vždy 1 bod za zdůvodnění.

Z7–II–3

V trojúhelníku ABC označíme středy stran CB a CA písmeny K a L. Víme, že čtyřúhelník $ABKL$ má obvod 10 cm a trojúhelník KLC má obvod 6 cm. Vypočítej délku úsečky KL. (*J. Mazák*)

Možné řešení. Úsečka KL je v trojúhelníku ABC střední příčkou rovnoběžnou s AB, neboť K a L jsou středy stran BC a AC. Platí tedy $2|KL| = |AB|$ a také víme, že $|AL| = |LC|$ a $|CK| = |KB|$.

Obvod trojúhelníku KLC je $|CK| + |KL| + |LC| = 6$. Obvod čtyřúhelníku $ABKL$ je

$$|AB| + |BK| + |KL| + |LA| = 10.$$

Součet na levé straně právě zmíněné rovnosti můžeme podle předchozích pozorování vyjádřit jako $2|KL| + (|CK| + |KL| + |LC|)$, neboli $2|KL| + 6$. Zmíněná rovnost tak získává tvar

$$2|KL| + 6 = 10,$$

odkud dostáváme $2|KL| = 4$, tj. $|KL| = 2\,(\mathrm{cm})$.

Hodnocení. 2 body za zjištění a zdůvodnění, že $|AB| = 2|KL|$; 2 body za úvahy o obvodech; 2 body za výpočet $|KL|$.