II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Čtyřmístným palindromem nazveme každé čtyřmístné přirozené číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě tisíců a které zároveň má na místě desítek stejnou číslici jako na místě stovek. Kolik existuje dvojic čtyřmístných palindromů, jejichž rozdíl je 3 674? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Jednotlivé číslice palindromu označíme písmeny. Skutečnost, že dva čtyřmístné palindromy mají požadovaný rozdíl, pak můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{r} A\,B\,B\,A \\ -C\,D\,D\,C \\ \hline 3\;\;6\;\;7\;\;4 \end{array}$$

Ve sloupci tisíců a ve sloupci jednotek se odčítají tytéž číslice. Ve sloupci tisíců vidíme, že $A > C$. Při odčítání ve sloupci jednotek tedy nedochází k „přechodu přes desítku“ a platí

$$A - C = 4. \tag{1}$$

Ve sloupci desítek a ve sloupci stovek, kde se odčítají stejné číslice, dochází „k přechodu přes desítku“, protože ve výsledku je na místě desítek číslice o 1 větší než na místě stovek. Platí

$$10 + B - D = 7,$$

po úpravě této rovnice dostaneme

$$D - B = 3. \tag{2}$$

Ještě provedeme rozbor sloupce tisíců, abychom se přesvědčili, že zadaný rozdíl umožňuje nalézt vyhovující dvojice palindromů. Protože při odčítání ve sloupci stovek došlo k „přechodu přes desítku“, musí být ve výsledku na místě tisíců číslice o 1 menší než na místě jednotek. Vidíme, že to je v zadaném rozdílu splněno.

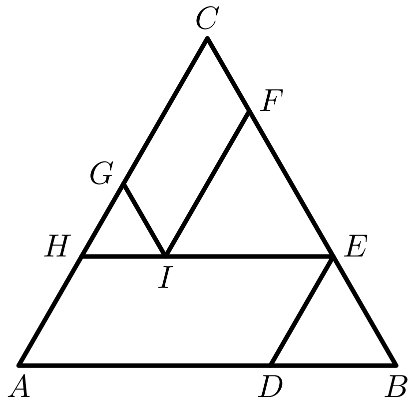
V zadání je čtyřmístný palindrom definován jako čtyřmístné přirozené číslo určitých vlastností, proto $A \neq 0$ a $C \neq 0$. Má-li být navíc splněn vztah (1), A může být rovno pouze číslicím 9, 8, 7, 6 nebo 5 a C je pak vždy o 4 menší. Ze vztahu (2) dostáváme, že D může být rovno jedině číslicím 9, 8, 7, 6, 5, 4 nebo 3 a B je vždy o 3 menší. Písmena A a C tak můžeme nahradit pěti různými dvojicemi číslic a písmena B a D sedmi různými dvojicemi číslic. Tyto dvojice lze spolu jakkoli seskupovat, dohromady tak dostáváme $5 \cdot 7 = 35$ různých dvojic palindromů s žádanými vlastnostmi.

Hodnocení. 2 body za určení, ve kterých sloupcích dochází k přechodu přes desítku a ve kterých ne; 2 body za počty dvojic A, C a B, D; 2 body za výsledek. (Práci, v níž se za C chybně dosazuje 0 a která tak dochází k výsledku $6 \cdot 7 = 42$, můžete ohodnotit až 5 body.)

Z9–II–2

Na následujícím obrázku jsou rovnostranné trojúhelníky ABC, DBE, IEF a HIG. Obsahy trojúhelníků DBE, IEF a HIG jsou v poměru 9 : 16 : 4. V jakém poměru jsou

1. délky úseček HI a IE,
2. obsahy trojúhelníků ABC a HEC? (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Pro dva rovnostranné trojúhelníky s délkami stran a, b platí, že poměr jejich obsahů je $a^2 : b^2$. Opačně, jestliže poměr obsahů je $a^2 : b^2$, pak poměr stran je $a : b$. Toto tvrzení lze zdůvodnit obecným pravidlem pro dva podobné útvary nebo taky explicitním výpočtem, kde obsah rovnostranného trojúhelníku se stranou a je $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$.

1. Jestliže obsahy trojúhelníků HIG a IEF jsou v poměru 4 : 16, pak poměr $|HI| : : |IE|$ jejich stran bude $2 : 4 = 1 : 2$.

2. Pokud si zvolíme jednotku $j = \frac{1}{2}|HI|$, pak $|IE| = |EF| = 4j$. V rovnostranném trojúhelníku HEC platí $|HI|+|IE| = |EF|+|FC|$, $|IE| = |EF|$, proto $|FC| = |HI| = 2j$. Dále z poměru 9 : 16 obsahů trojúhelníků DBE a IEF plyne, že $|BE| : |EF| = 3 : 4$, tedy

$$|BE| = \frac{3}{4}|EF| = \frac{3}{4} \cdot 4j = 3j.$$

Tedy strana BC trojúhelníku ABC má velikost

$$|BC| = |BE| + |EF| + |FC| = 3j + 4j + 2j = 9j.$$

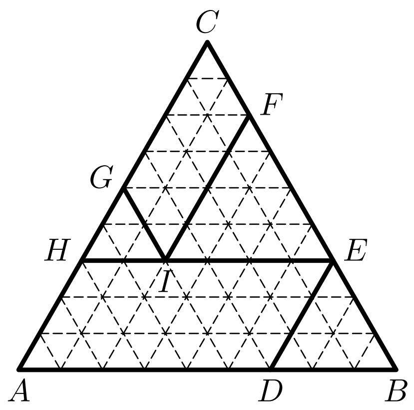
Podobně délka strany HE trojúhelníku HEC je

$$|HE| = |HI| + |IE| = 2j + 4j = 6j.$$

Poměr stran trojúhelníků ABC a HEC je 9 : 6, po zkrácení 3 : 2. Poměr obsahů těchto trojúhelníků je $3^2 : 2^2 = 9 : 4$.

Hodnocení. 1 bod za úvodní úvahu; 1 bod za první část úlohy; po 1 bodu za vyjádření stran trojúhelníků HEC a ABC; 2 body za výpočet poměru obsahů trojúhelníků ABC a HEC. (Výsledné poměry nemusí být uvedeny v základním tvaru.)

Jiné řešení. Rozdělme trojúhelník ABC na rovnostranné trojúhelníčky s délkou strany $\frac{1}{2}|HI| = 1j$. Poměr 9 : 16 : 4 obsahů trojúhelníků DBE, IEF, HIG udává i poměr počtů těchto trojúhelníčků v příslušných trojúhelnících. Protože trojúhelník HIG je rozdělen na 4 trojúhelníčky, pak musí trojúhelníky IEF a DBE sestávat ze 16 a 9 trojúhelníčků.



Z obrázku plyne následující:

1. Poměr $|HI| : |IE|$ je $2j : 4j = 1 : 2$.

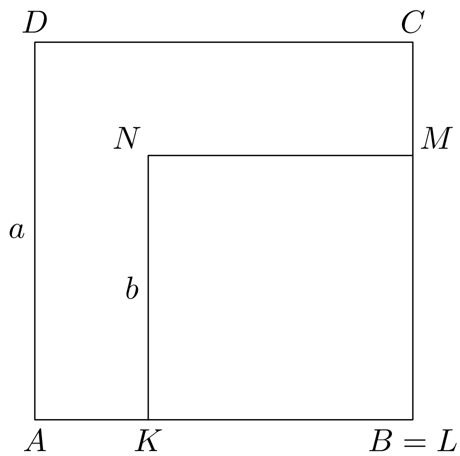
2. Poměr $S_{ABC} : S_{HEC}$ je shodný s poměrem počtů trojúhelníčků obsažených v těchto trojúhelnících, tedy $81 : 36 = 9 : 4$.

Hodnocení. 1 bod za rozdělení trojúhelníků HIG a IEF na trojúhelníčky; 1 bod za výpočet poměru $|HI| : |IE|$; 2 body za rozdělení zbylé plochy trojúhelníku ABC na trojúhelníčky; 2 body za výpočet poměru $S_{ABC} : S_{HEC}$. (Výsledné poměry nemusí být uvedeny v základním tvaru.)

Z9–II–3

Máme čtverce $ABCD$ a $KLMN$. Délky stran obou čtverců jsou v centimetrech vyjádřeny celým číslem. Bod K je vnitřním bodem úsečky AB, bod L leží v bodě B a bod M je vnitřním bodem úsečky BC. Obsah šestiúhelníku $AKNMCD$ je $225\,\mathrm{cm}^2$. Jaký může být obvod tohoto šestiúhelníku? Najděte všechny možnosti. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Délku strany čtverce $ABCD$ označíme a a délku strany čtverce $KLMN$ označíme b, obě v centimetrech (obrázek). Úloha se ptá na obvod šestiúhelníku $AKNMCD$, a ten je stejný jako obvod čtverce $ABCD$, tj. $4a$.



Obsah šestiúhelníku $AKNMCD$ je roven

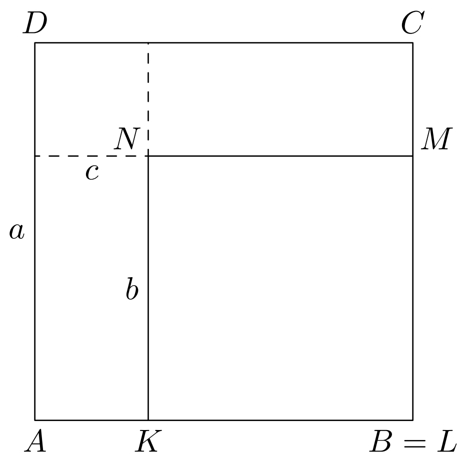
$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) = 225.$$

Protože podle zadání je bod K vnitřním bodem úsečky AB a $L = B$, je jasné, že $b \neq 0$ a $b < a$. Činitelé $a - b$ a $a + b$ jsou tedy dvě různá přirozená čísla. V tabulce níže uvádíme všechny rozklady čísla 225 na součin dvou různých přirozených čísel (při jejich hledání nám pomůže rozklad čísla 225 na prvočinitele: $225 = 3^2 \cdot 5^2$). V tabulce neuvádíme konkrétní hodnoty a a b, protože je pro řešení úlohy nepotřebujeme. Avšak ve třetím sloupci, kde sečtením činitelů $a - b$ a $a + b$ dostáváme $2a$, kontrolujeme, zda jsme získali sudé číslo, tedy zda a je číslem celým. Je-li a celé číslo, uvádíme ve čtvrtém sloupci hodnotu $4a$ jako možný obvod šestiúhelníku $AKNMCD$.

$a-b$	$a+b$	$2a$	$4a$
1	225	226	452
3	75	78	156
5	45	50	100
9	25	34	68

Úloha má čtyři řešení: obvod šestiúhelníku $AKNMCD$ může být 68 cm, 100 cm, 156 cm a 452 cm.

Jiné řešení. Délku strany čtverce $ABCD$ označíme a a délku strany čtverce $KLMN$ označíme b. Šestiúhelník $AKNMCD$ lze beze zbytku rozdělit na dva stejné obdélníky a čtverec, jehož stranu označíme c, vše v centimetrech, viz obrázek.



Protože podle zadání je bod K vnitřním bodem úsečky AB a $L = B$, je zřejmé, že $b > 0$ a $c > 0$. Délky a, b jsou podle zadání celá čísla, délka c rovněž, protože $c = a - b$.

Obsah šestiúhelníku $AKNMCD$ můžeme vyjádřit takto:

$$225 = 2bc + c^2.$$

Do této rovnice budeme za c postupně dosazovat přirozená čísla a vždy určíme, zda b vychází také jako přirozené číslo. Tento postup ukazuje následující tabulka, v níž vynecháváme prověřování všech sudých c. Pokud by totiž c bylo sudé, z výše uvedené rovnice by výraz $2bc$ vyšel jako lichý a b by tak nemohlo být celé číslo.

c	$2bc = 225 - c^2$	$b = 2bc : 2c$
1	224	112
3	216	36
5	200	20
7	176	176 není dělitelné číslem 7
9	144	8
11	104	104 není dělitelné číslem 11
13	56	56 není dělitelné číslem 13
15	0	0

Už jsme uvedli, že $b > 0$, a proto poslední řádek nevede k řešení úlohy. V hledání možných řešení dále nepokračujeme, protože b by evidentně vycházelo jako záporné. Úloha má tedy právě čtyři řešení. Požadovaný obvod šestiúhelníku $AKNMCD$ vypočítáme jako $4b + 4c$. Obvod daného šestiúhelníku tak může být 68 cm, 100 cm, 156 cm nebo 452 cm.

Hodnocení. Za každý výsledný obvod 1 bod; 2 body za vysvětlený postup, který musí ukazovat, že není více řešení.

Z9–II–4

Martina si vymyslela postup na výrobu číselné posloupnosti. Začala číslem 128. Z něj odvodila další člen posloupnosti takto: $8^2 + 5 = 64 + 5 = 69$. Potom pokračovala stejným způsobem dále a z čísla 69 dostala $9^2 + 5 = 81 + 5 = 86$. Vždy tedy z předchozího členu posloupnosti vezme číslici na místě jednotek, umocní ji na druhou a k této mocnině přičte konstantu 5.

1. Jaké je 2011. číslo takto vzniklé posloupnosti?
2. Martina opět začala číslem 128, ale místo čísla 5 zvolila jako konstantu jiné přirozené číslo. Tentokrát jí na 2011. místě vyšlo číslo 16. Jakou konstantu zvolila v tomto případě? (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Při vytváření dalšího čísla v posloupnosti využíváme z předchozího čísla pouze číslici na místě jednotek. Protože číslic je pouze deset, po několika číslech posloupnosti se musí začít čísla opakovat (ale ne nutně od prvního, tj. od čísla 128).

1. Budeme postupně vypisovat čísla Martininy posloupnosti, a to tak dlouho, dokud se nezačnou opakovat:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: 69,
- 3. číslo: 86,
- 4. číslo: $6^2 + 5 = 41$,
- 5. číslo: $1^2 + 5 = 6$,
- 6. číslo: $6^2 + 5 = 41$,
- 7. číslo: $1^2 + 5 = 6$,
- atd.

Je zřejmé, že od 4. čísla se v posloupnosti pravidelně střídají čísla 41 a 6. Číslo 41 se vyskytuje vždy na sudém místě (počínaje čtvrtým), číslo 6 vždy na lichém místě (počínaje pátým). My hledáme 2011. číslo. Protože 2011 je liché, je na tomto místě číslo 6.

2. Číslo 16 vzniklo jako součet druhé mocniny jednomístného čísla (číslice na místě jednotek předchozího čísla) a neznámé konstanty. Předchozí číslo může mít na místě jednotek jedině číslici 0 nebo 1 nebo 2 nebo 3, takže hledaná konstanta může být (po řadě) 16, 15, 12 nebo 7. Kdyby totiž byla na místě jednotek předchozího čísla číslice 4 nebo větší, nebyla by hledaná konstanta přirozené číslo.

Nyní vyzkoušíme, která z konstant 16, 15, 12 a 7 vyhovuje zadání. Postup je analogický postupu z 1. úkolu.

a) Konstanta 16:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 16 = 80$,
- 3. číslo: $0^2 + 16 = 16$,
- 4. číslo: $6^2 + 16 = 52$,
- 5. číslo: $2^2 + 16 = 20$,
- 6. číslo: $0^2 + 16 = 16$,
- 7. číslo: $6^2 + 16 = 52$,
- atd.

Od 3. čísla se v posloupnosti opakují čísla 16, 52 a 20. Zaměříme se pouze na příslušných 2009 čísel (tj. 3. až 2011.). Protože 2009 : 3 je 669, zbytek 2, bude na 2011. místě druhé z opakujících se čísel, tj. číslo 52. Konstanta 16 tedy požadavkům ze zadání nevyhovuje.

b) Konstanta 15:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 15 = 79$,
- 3. číslo: $9^2 + 15 = 96$,
- 4. číslo: $6^2 + 15 = 51$,
- 5. číslo: $1^2 + 15 = 16$,
- 6. číslo: $6^2 + 15 = 51$,
- atd.

Od 4. čísla se v posloupnosti střídají čísla 51 a 16; číslo 51 na sudých místech, číslo 16 na lichých místech. To znamená, že na 2011. místě (tj. lichém místě) bude číslo 16. Číslo 15 může být hledanou konstantou.

c) Konstanta 12:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 12 = 76$,
- 3. číslo: $6^2 + 12 = 48$,
- 4. číslo: $8^2 + 12 = 76$,
- atd.

Od 2. čísla se v posloupnosti střídají čísla 76 a 48, takže číslo 16 v této posloupnosti vůbec není. Konstanta 12 tedy nevyhovuje.

d) Konstanta 7:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 7 = 71$,
- 3. číslo: $1^2 + 7 = 8$,
- 4. číslo: $8^2 + 7 = 71$,
- atd.

Od 2. čísla se v posloupnosti střídají čísla 71 a 8, takže číslo 16 se nevyskytuje ani v této posloupnosti. Konstanta 7 tedy rovněž nevyhovuje.

V průběhu řešení jsme našli pouze jediné vyhovující číslo a to číslo 15, které si Martina zvolila jako novou konstantu.

Jiné řešení 2. úkolu. Neznámá konstanta je nějaké přirozené číslo. Nemůžeme vyzkoušet všechna přirozená čísla, ale přitom potřebujeme mít jistotu, že nalezneme všechna řešení úlohy. Jak už bylo řečeno při řešení 1. úkolu, každé číslo v posloupnosti ovlivňuje jen číslice na místě jednotek předchozího čísla a přičítaná konstanta. Proto např. při použití konstanty 1 a 11 dostaneme sice různé posloupnosti, ale odpovídající si čísla budou mít vždy stejnou číslici na místě jednotek. Stejné číslice na místě jednotek budou vycházet pro libovolné konstanty ze skupiny 1, 11, 21, 31, ... Podobně při použití konstanty ze skupiny 2, 12, 22, 32, ... nebo 3, 13, 23, 33, ... atd.

Nejprve proto určíme, se kterou takovou skupinou konstant vůbec dostáváme na místě jednotek číslici 6, poté se soustředíme na 2011. číslo v odpovídající posloupnosti. Za tímto účelem postačí prověřit pouze posloupnosti určené konstantou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10.

konstanta	posloupnost
1	128, 65, 26, 37, 50, 1, 2, 5, 26, ...
2	128, 66, 38, 66, ...
3	128, 67, 52, 7, ...
4	128, 68, ...
5	128, 69, 86, 41, 6, 41, ...
6	128, 70, 6, 42, 10, ...
7	128, 71, 8, ...
8	128, 72, 12, ...
9	128, 73, 18, ...
10	128, 74, 26, 46, ...

Číslice 6 se na místě jednotek objevuje pouze v posloupnostech určených konstantou 1, 2, 5, 6 nebo 10. Tyto případy budeme nyní diskutovat podrobněji.

a) Konstanta 1. V odpovídající posloupnosti se od 3. čísla na místě jednotek opakují po řadě číslice 6, 7, 0, 1, 2, 5. Zaměříme se pouze na příslušných 2009 čísel (tj. 3. až 2011.). Protože 2009 : 6 je 334, zbytek 5, bude mezi nimi 334 úplných šestic čísel (končících 6, 7, 0, 1, 2, 5) a z následující šestice prvních pět. To znamená, že 2011. číslo posloupnosti má na místě jednotek číslici 2. Takže konstanta, kterou Martina přičítala, nebyla ze skupiny konstant končících číslicí 1.

b) Konstanta 2. Na místě jednotek se střídají po řadě číslice 8 a 6. Protože číslo 2011 je liché, bude na místě jednotek příslušného čísla posloupnosti číslice 8. Takže konstanta, kterou Martina přičítala, nebyla ani z této skupiny.

c) Konstanta 5. Od 3. čísla se střídají na místě jednotek po řadě číslice 6 a 1; číslice 6 u čísel na lichých místech, číslice 1 u čísel na sudých místech. Protože číslo 2011 je liché, bude na místě jednotek příslušného čísla posloupnosti číslice 6. Takže konstanta, kterou Martina přičítala, mohla být z této skupiny.

Z předchozího, tj. 2010. čísla přičítáme 1 k hledané konstantě, čímž dostaneme uváděné číslo 16. Martina tedy mohla přičítat konstantu $16 - 1 = 15$.

d) Konstanta 6. Počínaje 2. číslem se na místě jednotek opakují po řadě číslice 0, 6 a 2. Zaměříme se pouze na příslušných 2010 čísel (tj. 2. až 2011.). Protože $2010 : 3 = 670$ (beze zbytku), budou tvořit 670 úplných trojic čísel (končících 0, 6 a 2). To znamená, že 2011. číslo posloupnosti má na místě jednotek číslici 2 a že Martina nepřičítala konstantu z této skupiny.

e) Konstanta 10. Na místě jednotek se počínaje 3. číslem vyskytuje pouze číslice 6. Takže konstanta, kterou Martina přičítala, mohla být i z této skupiny.

Z předchozího, tj. 2010. čísla přičítáme $6^2 = 36$ k hledané konstantě, čímž máme dostat číslo 16. Toho lze docílit jen odečtením (nikoli přičtením) přirozeného čísla, takže Martina nemohla přičítat konstantu z této skupiny.

Pouze v odstavci c) jsme našli jedinou konstantu, kterou mohla Martina přičítat, bylo to číslo 15.

Poznámka. Místo konstanty 10 můžeme prověřovat konstantu 0. To sice není přirozené číslo (tedy ona sama nemůže být hledaným řešením), ale patří do stejné skupiny jako 10 a počítání s ní je jednodušší.

Hodnocení. 1 bod za úvahu o opakování číslic na místě jednotek (včetně odůvodnění); 2 body za nalezení čísla 6 v prvním úkolu a vysvětlení postupu; 3 body za nalezení konstanty 15 a příslušné zdůvodnění. Jestliže řešitel po nalezení konstanty 15 již další řešení nehledal, udělte mu celkem nejvýše 5 bodů.