

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

61. ROČNÍK, 2011/2012

<http://math.muni.cz/mo>

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ZŠ	ročník		kategorie
	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.

Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto

letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **7. listopadu 2011** a druhou trojici úloh do **9. ledna 2012**.

Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **12. prosince 2011** a druhou trojici úloh do **27. února 2012**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **25. ledna 2012**,
pro kategorií Z6 až Z8 **11. dubna 2012**,
pro kategorií Z5 **25. ledna 2012**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 90 minut.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **21. března 2012** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky*. Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO*. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověřeni učitelé matematiky. Vy se obračejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2011/2012
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlíte, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázkou uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8-II-1. Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a , b . Nový obdélník má délky stran $a + 4$, $b - 5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{array}{ll} ab - 4b + 5a = -20 & \text{(Odečteme 20,} \\ ab - 4b + 5a - 20 = -40 & \text{abychom levou} \\ (a - 4)(b + 5) = -40 & \text{stranu mohli} \\ & \text{rozložit na součin.)} \end{array}$$

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \quad \text{a} \quad (-1) \cdot 40 = -40.$$

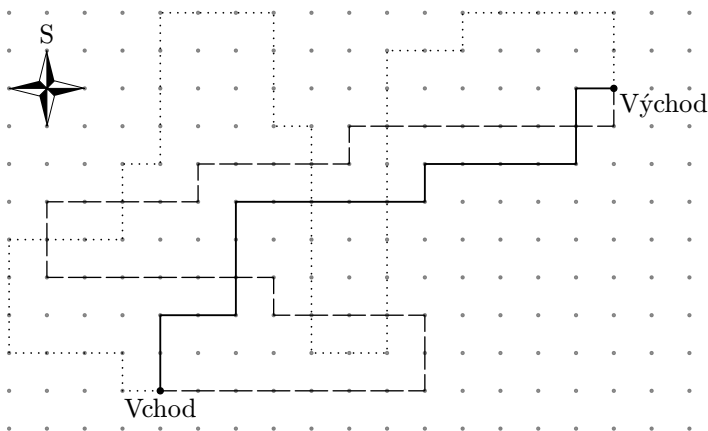
V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5-I-1

Tři kamarádi Pankrác, Servác a Bonifác šli o prázdninách na noční procházku přírodním labyrintem. U vstupu dostal každý svíčku a vydali se různými směry. Všichni labyrintem úspěšně prošli, ale každý šel jinou cestou. V následující čtvercové síti jsou vyznačeny jejich cesty. Víme, že

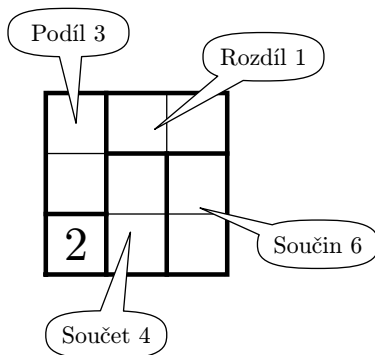


Pankrác nikdy nešel na jih a že Servác nikdy nešel na západ. Kolik metrů ušel v labyrintu Bonifác, když Pankrác ušel přesně 500 m? (M. Petrová)

Z5-I-2

Do každého nevyplněného čtverečku na následujícím obrázku doplňte číslo 1, 2, nebo 3 tak, aby v každém sloupci a řádce bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.

(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.)



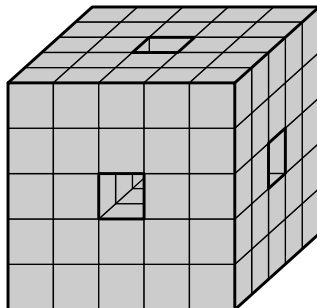
(S. Bednářová)

Z5-I-3

Jolana připravuje pro své kamarádky občerstvení — chlebičky. Namaže je bramborovým salátem a navrch chce dát ještě další přísady: šunku, tvrdý sýr, plátek vajíčka a proužek nakládané papričky. Jenže nechce, aby některé dva její chlebičky obsahovaly úplně stejnou kombinaci přísad. Jaký největší počet navzájem různých chlebiček může vytvořit, jestliže žádný z nich nemá mít všechny čtyři přísady a žádný z nich není pouze se salátem (tj. bez dalších přísad)? (M. Petrová)

Z5-I-4

Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Z kolika kostiček je stavba slepena? (M. Krejčová)

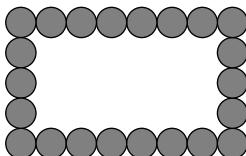


Z5-I-5

V pohádce o sedmero krkavcích bylo sedm bratrů, z nichž každý se narodil přesně rok a půl po předchozím. Když byl nejstarší z bratrů právě čtyřikrát starší než nejmladší, matka všechny zaklela. Kolik let bylo sedmero bratrům krkavcům, když je jejich matka zaklela? (M. Volfová)

Z5-I-6

Janka a Hanka si rády hrají s modely zvířátek. Hanka pro své kravičky sestavila z uzávěrů od PET lahví obdélníkovou ohrádku jako na obrázku. Janka ze všech svých uzávěrů složila pro ovečky ohrádku tvaru rovnostranného trojúhelníku. Poté ji rozebrala a postavila pro ně ohradu čtvercovou, rovněž ze všech svých uzávěrů. Kolik mohla mít Janka uzávěrů? Najděte aspoň 2 řešení. (M. Volfová)

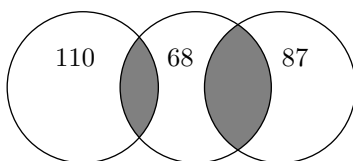


KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Na obrázku jsou tři stejně velké kruhy. Společné části sousedních kruhů jsme šedě vybarvili. Bílé části mají v obrázku zapsány své obsahy, a to v centimetrech čtverečních. Vypočítejte obsahy obou šedých částí.

(L. Šimůnek)



Z6–I–2

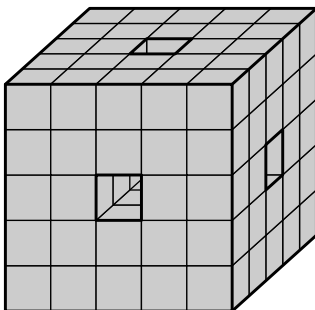
Do hračkářství přivezli nová plyšová zvířátka: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nohou a 4 křídla, každý pštros má 2 nohy a 2 křídla a každý krab má 8 nohou a 2 klepeta. Dohromady mají tyto přivezené hračky 118 nohou, 22 křídel a 22 klepet. Kolik mají dohromady hlav?

(M. Petrová)

Z6–I–3

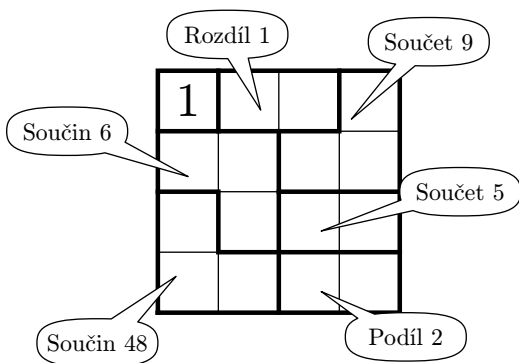
Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Hotovou stavbu jsme celou ponořili do barvy. Kolik kostiček má obarvenu aspoň jednu stěnu?

(M. Krejčová)



Z6-I-4

Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, 3, nebo 4 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.



(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.) (S. Bednářová)

Z6-I-5

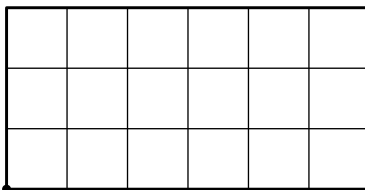
Ondra, Matěj a Kuba dostali k Vánocům od prarodičů každý jednu z následujících hraček: velké hasičské auto, vrtulník na dálkové ovládání a stavebnici Merkur. Bratranec Petr doma vyprávěl:

„Ondra dostal to velké hasičské auto. Přál si ho sice Kuba, ale ten ho nedostal. Matěj nemá v oblíbené stavebnici, takže Merkur nebyl pro něj.“

Ukázalo se, že ve sdělení, jaký dárek kdo dostal či nedostal, se Petr dvakrát mýlil a jen jednou vypovídal správně. Jak to tedy s dárky bylo? (M. Volfová)

Z6-I-6

Marta, Libuše a Marie si vymyslely hru, kterou chtějí hrát na obdélníkovém hřišti složeném z 18 stejných čtverců (obrázek). Ke hře potřebují hřiště rozdělit dvěma rovnými čarami na tři stejně velké části. Navíc tyto



čáry musejí obě procházet tím rohem hřiště, který je na obrázku vlevo dole. Poradte děvčatům, jak mají dokreslit čáry, aby si mohla začít hrát.
(*E. Trojáková*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

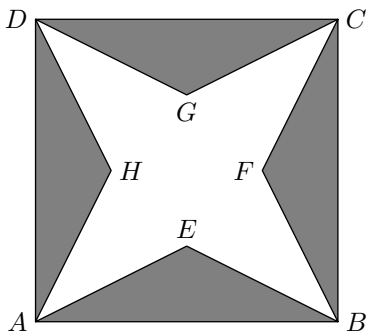
Trpaslíci si chodí k potoku pro vodu. Džbánek každého z trpaslíků je jinak velký: mají objemy 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 litrů. Trpaslíci si džbány mezi sebou nepůjčují a vždy je přinesou plné vody.

- Kejchal přinese ve svém džbánu víc vody než Štístko.
- Dřímál by musel jít pro vodu třikrát, aby přinesl právě tolik vody jako Stydlín v jednom svém džbánu.
- Prófův džbánek je jen o 2 litry větší než Štístkův.
- Sám Šmudla přinese tolik vody jako Dřímál a Štístko dohromady.
- Když jdou pro vodu Prófa a Šmudla, přinesou stejně vody jako Rejpal, Kejchal a Štístko.

Kolik vody přinesou dohromady Kejchal a Šmudla? (M. Petrová)

Z7–I–2

Na obrázku je čtverec $ABCD$, ve kterém jsou umístěny čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABE , BCF , CDG a DAH , všechny šedě vybarvené. Strany čtverce $ABCD$ jsou základnami těchto rovnoramenných trojúhelníků. Víme, že šedé plochy čtverce $ABCD$ mají dohromady stejný obsah jako jeho bílá plocha. Dále víme, že $|HF| = 12$ cm. Určete velikost strany čtverce $ABCD$. (L. Šimůnek)



Z7–I–3

Sedm bezprostředně po sobě jdoucích celých čísel stálo v řadě, seřazeno od nejmenšího po největší. Po chvíli se čísla začala nudit, a tak se nejdřív

první vyměnilo s posledním, potom se prostřední posunulo úplně na začátek řady a nakonec si největší z čísel stouplu doprostřed. Ke své veliké radosti se tak ocitlo vedle čísla se stejnou absolutní hodnotou. Kterých sedm čísel mohlo stát v řadě? (S. Bednářová)

Z7-I-4

Učitelka Smolná připravovala prověrku pro svou třídu ve třech verzích, aby žáci nemohli opisovat. V každé verzi zadala tři hrany kvádrů a dala za úkol vypočítat jeho objem. Úlohy si ale dopředu nevyřešila, a tak netušila, že výsledek je ve všech třech verzích stejný. Do zadání žákům zapsala tyto délky hran: 12, 18, 20, 24, 30, 33 a 70, všechny v centimetrech. Z devíti délek hran, které učitelka Smolná zadala, jsme vám tedy prozradili pouze sedm a ani jsme nesdělili, které délky patří do téhož zadání. Určete zbylé dvě délky hran. (L. Šimůnek)

Z7-I-5

Jeden vnitřní úhel v trojúhelníku měří 50° . Jak velký úhel svírají osy zbývajících dvou vnitřních úhlů? (L. Hozová)

Z7-I-6

Hledáme šestimístný číselný kód, o němž víme, že:

- žádná číslice v něm není vícekrát,
- obsahuje i 0, ta však není na předposledním místě,
- ve svém zápisu nemá nikdy vedle sebe dvě liché ani dvě sudé číslice,
- sousední jednomístná čísla se liší aspoň o 3,
- čísla, která získáme přečtením prvního a druhého dvojčíslí, jsou obě násobkem čísla vzniklého přečtením třetího, tedy posledního dvojčíslí.

Určete hledaný kód. (M. Volfová)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Korespondenční matematická soutěž probíhá ve třech kolech, jejichž náročnost se stupňuje. Do druhého kola postupují jen ti řešitelé, kteří byli úspěšní v prvním kole, do třetího kola postupují jen úspěšní řešitelé druhého kola. Vítězem je každý, kdo je úspěšným řešitelem posledního, tedy třetího kola. V posledním ročníku této soutěže bylo přesně 14 % řešitelů úspěšných v prvním kole, přesně 25 % řešitelů druhého kola postoupilo do třetího kola a přesně 8 % řešitelů třetího kola zvítězilo.

Jaký je nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola? Kolik by v takovém případě bylo vítězů? *(M. Petrová)*

Z8–I–2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB dlouhou 10 cm a rameny dlouhými 20 cm. Bod S je střed základny AB . Rozdělte trojúhelník ABC čtyřmi přímkami procházejícími bodem S na pět částí se stejným obsahem. Zjistěte, jak dlouhé úsečky vytnou tyto přímky na ramenech trojúhelníku ABC . *(E. Trojáková)*

Z8–I–3

Hledáme pětimístné číslo s následujícími vlastnostmi: je to palindrom (tj. čte se pozpátku stejně jako zepředu), je dělitelné dvanácti a ve svém zápisu obsahuje číslici 2 bezprostředně za číslici 4. Určete všechna možná čísla, která vyhovují zadaným podmínkám. *(M. Mach)*

Z8–I–4

Na střed hrncířského kruhu jsme položili krychli, která měla na každé své stěně napsáno jedno přirozené číslo. Těsně předtím, než jsme kruh roztočili, jsme ze svého stanoviště viděli tři stěny krychle a tedy pouze tři čísla. Jejich součet byl 42. Po otočení hrncířského kruhu o 90° jsme ze stejného místa pozorovali tři stěny s čísly dávajícími součet 34 a po otočení o dalších 90° jsme stále z téhož místa viděli tři čísla o součtu 53.

1. Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších 90° .
2. Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli. *(L. Šimůnek)*

Z8–I–5

Pankrác, Servác a Bonifác jsou bratři, kteří mají P , S a B let. Víme, že P , S a B jsou přirozená čísla menší než 16, pro něž platí:

$$P = \frac{5}{2}(B - S),$$

$$S = 2(B - P),$$

$$B = 8(S - P).$$

Určete stáří všech tří bratrů.

(*L. Hozová*)

Z8–I–6

Janka si narýsovala obdélník s obvodem 22 cm a délkami stran vyjádřenými v centimetrech celými čísly. Potom obdélník rozdělila beze zbytku na tři obdélníky, z nichž jeden měl rozměry 2 cm \times 6 cm. Součet obvodů všech tří obdélníků byl o 18 cm větší než obvod původního obdélníku. Jaké rozměry mohl mít původní obdélník? Najděte všechna řešení.

(*M. Dillingerová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Pokladní v galerii prodává návštěvníkům vstupenky s číslem podle toho, kolikátí ten den přišli. První návštěvník dostane vstupenku s číslem 1, druhý s číslem 2, atd. Během dne však došel žlutý papír, na který se vstupenky tiskly, proto musela pokladní pokračovat tisknutím na papír červený. Za celý den prodala stejně žlutých vstupenek jako červených. Zjistila, že součet čísel na žlutých vstupenkách byl o 1 681 menší než součet čísel na červených vstupenkách. Kolik toho dne prodala vstupenek?

(*M. Mach*)

Z9–I–2

Filoména má mobil s následujícím rozmístěním tlačítek:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Devítimístné telefonní číslo její nejlepší kamarádky Kunhuty má tyto vlastnosti:

- všechny číslice Kunhutina telefonního čísla jsou různé,
- první čtyři číslice jsou seřazeny podle velikosti od nejmenší po největší a středy jejich tlačítek tvoří čtverec,
- středy tlačítek posledních čtyř číslic také tvoří čtverec,
- telefonní číslo je dělitelné třemi a pěti.

Kolik různých devítimístných čísel by mohlo být Kunhutinyým telefonním číslem?

(*K. Pazourek*)

Z9–I–3

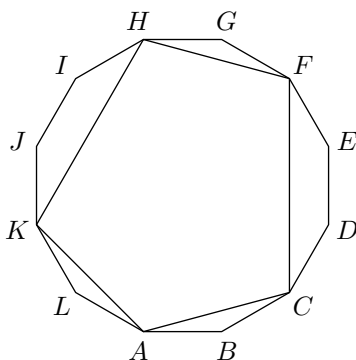
Amálka pozorovala veverka na zahrádce hájenky, kde rostly tyto tři stromy: smrk, buk a jedle. Veverka seděla v klidu na stromech, takže je mohla spočítat — bylo jich 34. Když přeskákalo 7 veverka ze smrku na buk, bylo jich na buku stejně jako na obou dvou jehličnanech dohromady. Poté ještě přeskákalo 5 veverka z jedle na buk, v tu chvíli bylo na jedli

stejně veverka jako na smrku. Na buku jich poté bylo dvakrát tolik, co na jedli ze začátku. Kolik veverka původně sedělo na každém ze stromů?
(*M. Mach*)

Z9-I-4

V pravidelném dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ vepsaném do kružnice o poloměru 6 cm určete obvod pětiúhelníku $ACFHK$.

(*K. Pazourek*)



Z9-I-5

Před vánočním koncertem nabízeli žáci k prodeji 60 výrobků z hodin výtvarné výchovy. Cenu si mohl každý zákazník určit sám a celý výtěžek šel na dobročinné účely. Na začátku koncertu žáci spočítali, kolik korun v průměru utržili za jeden prodaný výrobek, a vyšlo jim přesně celé číslo. Protože stále neprodali všech 60 výrobků, nabízeli je i po koncertě. To si lidé koupili ještě dalších sedm, za které dali celkem 2505 Kč. Tím se průměrná tržba za jeden prodaný výrobek zvýšila na rovných 130 Kč. Kolik výrobků pak zůstalo neprodaných?
(*L. Šimůnek*)

Z9-I-6

V obdélníkové zahradě roste broskvoň. Tento strom je od dvou sousedních rohů zahrady vzdálen 5 metrů a 12 metrů a vzdálenost mezi zmíněnými dvěma rohy je 13 metrů. Dále víme, že broskvoň stojí na úhlopříčce zahrady. Jak velká může být plocha zahrady?
(*M. Mach*)