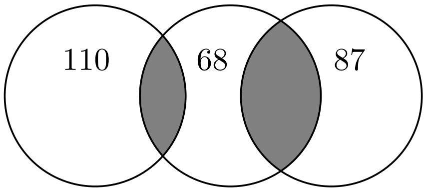
61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z6

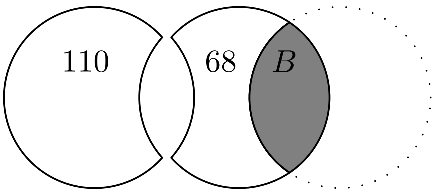
Z6–I–1

Na obrázku jsou tři stejně velké kruhy. Společné části sousedních kruhů jsme šedě vybarvili. Bílé části mají v obrázku zapsány své obsahy, a to v centimetrech čtverečních. Vypočítejte obsahy obou šedých částí. (*L. Šimůnek*)

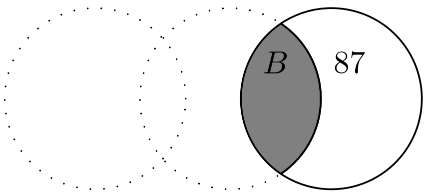


Nápad. Obsah celého kruhu se hodí, ale nesnažte se jej určovat hned na začátku.

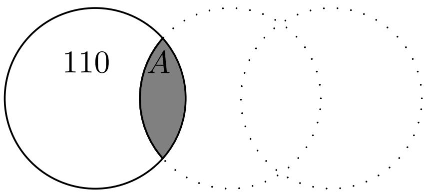
Možné řešení. Společnou část prvních dvou kruhů nazveme A, společnou část druhého a třetího kruhu nazveme B. Z druhého kruhu zůstane po odtržení části A zbytek, který musí mít stejný obsah jako část, která zbude po odtržení části A z kruhu prvního. V zadání se uvádí, že tato zbylá část má obsah 110, a díky tomu spočítáme obsah části B: $110-68 = 42$.



Nyní známe obsah třetího kruhu: $42 + 87 = 129$.



Stejný obsah mají i ostatní kruhy, s pomocí prvního určíme obsah části A: $129-110 = 19$.



Šedé plochy mají obsahy popořadě zleva $19\,\mathrm{cm}^2$ a $42\,\mathrm{cm}^2$.

Z6–I–2

Do hračkářství přivezli nová plyšová zvířátka: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nohou a 4 křídla, každý pštros má 2 nohy a 2 křídla a každý krab má 8 nohou a 2 klepeta. Dohromady mají tyto přivezené hračky 118 nohou, 22 křídel a 22 klepet. Kolik mají dohromady hlav? (*M. Petrová*)

Nápad. Využijte toho, že ze zmíněných zvířátek mají klepeta pouze krabi.

Možné řešení. Pro přehlednost si údaje o jednotlivých hračkách zaznamenáme do tabulky:

	nohy	křídla	klepeta	hlavy
vážka	6	4	0	1
pštros	2	2	0	1
krab	8	0	2	1

Je zřejmé, že klepeta mají pouze krabi. Protože všech klepet je 22 a každý krab má klepeta dvě, musí být krabů $22 : 2 = 11$. Tito krabi mají dohromady $11 \cdot 8 = 88$ nohou. Na vážky a pštrosy tak zbývá $118 - 88 = 30$ nohou.

Vážky a pštrosi tak mají dohromady 30 nohou a 22 křídel. Abychom určili počty jednotlivých hraček, všimneme si následujícího:

	nohy	křídla
jedna vážka	6	4
jeden pštros	2	2
dva pštrosi	4	4

Vidíme, že dva pštrosi mají dohromady stejně křídel jako jedna vážka, ale mají o 2 nohy méně. Můžeme si to představit tak, že ze dvou pštrosů „vyrobíme" jednu vážku tak, že jim „přidáme" ještě dvě nohy.

Podle křídel máme 11 pštrosů ($22 : 2 = 11$). Ti by ale měli jen 22 nohou ($11 \cdot 2 = 22$). Zbývá nám tedy 8 nohou ($30 - 22 = 8$), kterými budeme „předělávat pštrosy na vážky". Vždy dvě nohy promění dva pštrosy v jednu vážku, vážky jsou proto $8 : 2 = 4$.

Čtyři vážky mají dohromady 24 nohou ($4 \cdot 6 = 24$) a 16 křídel ($4 \cdot 4 = 16$). Na pštrosy tak zbývá 6 nohou ($30 - 24 = 6$) a 6 křídel ($22 - 16 = 6$). Jsou tedy celkem 3 ($6 : 2 = 3$). Předchozí úvahy můžeme schematicky znázornit následovně (symbol ìí představuje dvě křídla a dvě nohy, tedy určující prvky jednoho pštrosa):

$$\text{ìí} \quad \text{ìí} \quad \text{ìí} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}}$$

Do hračkářství přivezli 11 krabů, 4 vážky a 3 pštrosy. Protože každé z těchto zvířat má jednu hlavu, dohromady mají 18 hlav $(11 + 4 + 3 = 18)$.

Jiné řešení. Stejně jako u předchozího řešení určíme, že přivezli 11 krabů a že vážky a pštrosi mají dohromady 30 nohou a 22 křídel.

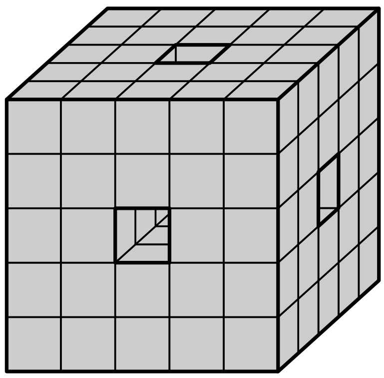
Jelikož vážky mají po 6 nohách, může jich být nejvýše 5 a jednotlivé možnosti postupně probereme. Kdyby vážka byla jedna, zbývalo by na pštrosy $30-6 = 24$ nohou a $22-4 = 18$ křídel. Aby souhlasily počty nohou, muselo by být pštrosů 12, ale aby souhlasily počty křídel, muselo by jich být 9 — jedna vážka proto být nemůže.

Ostatní případy rozepisovat nebudeme, diskuzi shrneme následující tabulkou a závěr je stejný jako výše.

vážek	zbyde nohou	zbyde křídel	pštrosů
1	24	18	—
2	18	14	—
3	12	10	—
4	6	6	**3**
5	0	2	—

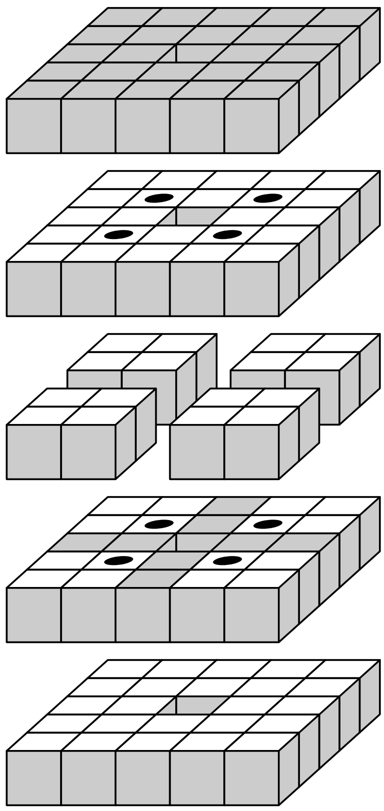
Z6–I–3

Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Hotovou stavbu jsme celou ponořili do barvy. Kolik kostiček má obarvenu aspoň jednu stěnu? (*M. Krejčová*)



Nápad. Zjistěte, kolik kostiček nemá obarvenu ani jednu stěnu.

Možné řešení. Stavbu rozdělíme čtyřmi vodorovnými řezy na pět vrstev tak, jak ukazuje následující obrázek. Prostřední vrstva se skládá z 16 kostiček, ostatní vždy z 24 kostiček. Celkový počet kostiček je $16+4\cdot 24 = 112$. Kostičky, které nemají obarvenu ani jednu stěnu, jsme v obrázku označili černým puntíkem — je jich 8. Ostatní kostičky mají obarvenu aspoň jednu stěnu a je jich tedy $112 - 8 = 104$.



Jiný nápad. Počítejte přímo po vrstvách.

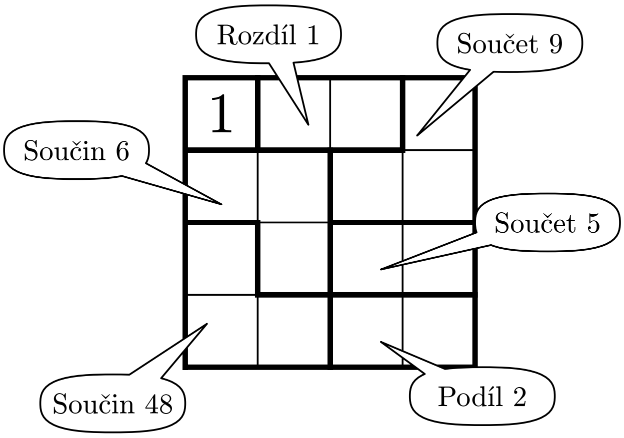
Jiné řešení. Pracujeme s výše uvedeným obrázkem. Ve spodní vrstvě mají všechny kostičky, kterých je 24, obarveny aspoň jednu stěnu. Ve druhé vrstvě je 8 kostiček s jednou obarvenou stěnou a 12 se dvěma obarvenými stěnami. V prostřední vrstvě je všech 16 kostiček se dvěma obarvenými stěnami. Čtvrtá vrstva se shoduje s druhou a pátá s první. Kostiček, které mají obarvenu aspoň jednu stěnu, jsme celkově napočítali

$$2 \cdot 24 + 2 \cdot (8 + 12) + 16 = 48 + 40 + 16 = 104.$$

Z6–I–4

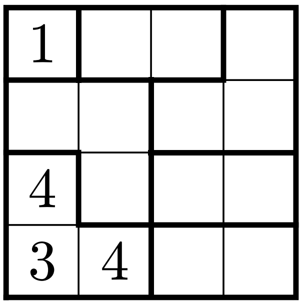
Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, 3, nebo 4 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.

(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.) (*S. Bednářová*)

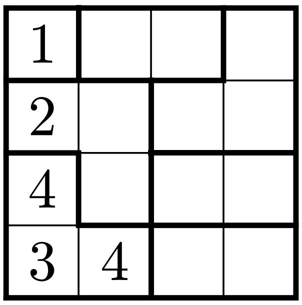


Nápad. Začněte součinem 48.

Možné řešení. Začneme součinem 48: Potřebujeme rozložit číslo 48 na součin tří čísel tak, aby činitelé byli pouze 1, 2, 3 nebo 4. To lze jediným způsobem, $48 = 3 \cdot 4 \cdot 4$, a činitelé mohou být v odpovídající oblasti doplněni jedině takto:



Do druhého políčka prvního sloupce doplníme číslo 2, které v tomto sloupci chybí.



Nyní se budeme zabývat součinem 6, který lze získat z daných čísel jen jako $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. To znamená, že ve druhém sloupci budou, kromě již napsaného čísla 4, ještě čísla 1 a 3 (zatím nevíme, v jakém pořadí). Takže v prvním políčku druhého sloupce musí být číslo 2.

1	2		
2	*		
4	*		
3	4		

Rozdíl 1: Rozdíl dvou čísel má být 1, jedno z čísel je 2, takže druhé číslo musí být 1 nebo 3. Protože číslo 1 je již v prvním řádku napsáno, musí být ve třetím políčku tohoto řádku číslo 3.

Do čtvrtého políčka prvního řádku tak musíme doplnit číslo 4, které jediné v tomto řádku ještě není.

1	2	3	4
2	*		
4	*		
3	4		

Uvažujme tentokrát jinak. Zatím jsme doplnili třikrát číslo 4, takže ještě jedno zbývá. Protože v prvním, třetím a čtvrtém řádku čtyřky zastoupeny jsou, bude to poslední ve druhém řádku. Stejně tak je čtyřka doplněna v prvním, druhém a čtvrtém sloupci, takže chybí ve třetím sloupci. To znamená, že poslední, čtvrté, číslo 4 musí být ve druhém řádku třetího sloupce.

1	2	3	4
2	*	4	
4	*		
3	4		

Součet 9: V této oblasti chybí poslední číslo, a to musí být $9 - 4 - 4 = 1$.

1	2	3	4
2	*	4	1
4	*		
3	4		

Ve druhém políčku druhého řádku musí být číslo 3, které zde jako jediné ještě není. To znamená, že ve třetím políčku druhého sloupce bude číslo 1 (buď proto, že v tomto sloupci chybí, nebo proto, že chybí v oblasti se součinem 6).

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1		
3	4		

Nyní můžeme uvažovat stejně jako při doplňování posledního čísla 4. Doplnili jsme třikrát číslo 1, které zatím není ve čtvrtém řádku a ve třetím sloupci. Stejně tak doplníme i poslední číslo 3, které chybí pouze ve třetím řádku a ve čtvrtém sloupci.

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1		3
3	4	1	

Nyní už chybí jen dvě čísla 2. Snadno ověříme, že po jejich doplnění do prázdných políček splňují všechna zapsaná čísla všechny požadované podmínky.

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1	2	3
3	4	1	2

Poznámka. Samozřejmě lze postupovat mnoha různými způsoby, v každém případě si však rychle všimnete, že v zadání je podstatně víc informací, než je potřeba k jednoznačnému dořešení úlohy. Pokud se např. přednostně soustředíte na požadavek, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z čísel 1, 2, 3, 4 právě jednou, pak stačí už jen tři ze šesti dále zmíněných informací — které tři by kupříkladu stačily?

Z6–I–5

Ondra, Matěj a Kuba dostali k Vánocům od prarodičů každý jednu z následujících hraček: velké hasičské auto, vrtulník na dálkové ovládání a stavebnici Merkur. Bratranec Petr doma vyprávěl:

„Ondra dostal to velké hasičské auto. Přál si ho sice Kuba, ale ten ho nedostal. Matěj nemá v oblibě stavebnice, takže Merkur nebyl pro něj.“

Ukázalo se, že ve sdělení, jaký dárek kdo dostal či nedostal, se Petr dvakrát mýlil a jen jednou vypovídal správně. Jak to tedy s dárky bylo? (*M. Volfová*)

Nápad. Nejdřív zjistěte, kdo dostal hasičské auto.

Možné řešení. Petrovy výpovědi o chlapcích jsou:

1. Ondra dostal hasičské auto,
2. Kuba nedostal hasičské auto,
3. Matěj nedostal Merkur.

Kdyby hasičské auto dostal Ondra, byly by první dvě výpovědi pravdivé. Ale pravdivé má být jen jedno sdělení, takže hasičské auto Ondra dostat nemohl.

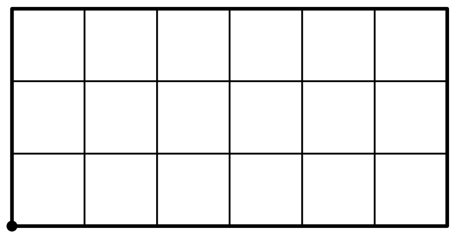
Kdyby hasičské auto dostal Matěj, byly by opět dvě výpovědi pravdivé, totiž druhá a třetí, a to nelze.

Hasičské auto tedy musel dostat Kuba. První i druhé tvrzení je proto nepravdivé a pravdivé musí být třetí, že Matěj nedostal Merkur. Matěj nedostal ani hasičské auto (to dostal Kuba), takže musel dostat vrtulník.

Dárky byly rozděleny takto: Kuba dostal hasičské auto, Matěj vrtulník a Ondra Merkur.

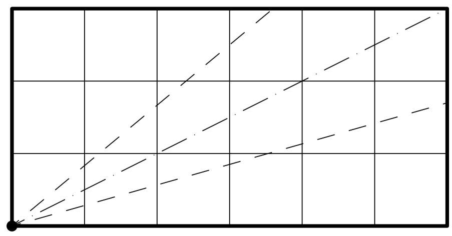
Z6–I–6

Marta, Libuše a Marie si vymyslely hru, kterou chtějí hrát na obdélníkovém hřišti složeném z 18 stejných čtverců (obrázek). Ke hře potřebují hřiště rozdělit dvěma rovnými čárami na tři stejně velké části. Navíc tyto čáry musejí obě procházet tím rohem hřiště, který je na obrázku vlevo dole. Poraďte děvčatům, jak mají dokreslit čáry, aby si mohla začít hrát. (*E. Trojáková*)



Nápad. Dvě ze tří částí musejí být trojúhelníky.

Možné řešení. Hřiště složené z 18 stejných čtverců je třeba rozdělit na tři stejně velké části. Velikost jedné části potom bude $18 : 3 = 6$ čtverců. Úhlopříčka dělí hřiště na dva stejné trojúhelníky s obsahem $18 : 2 = 9$ čtverců. To znamená, že pokud máme dostat tři části s obsahem 6 čtverců, musí být jedna z dělicích čar „pod“ a druhá „nad“ touto úhlopříčkou, viz obrázek. Dvě z takto vzniklých částí tvoří trojúhelníky a jedna čtyřúhelník. Nyní stačí určit čáry tak, aby trojúhelníky měly obsah 6 čtverců. Zbylý čtyřúhelník potom bude mít tentýž obsah.



Podívejme se nejprve na trojúhelník vlevo. Tento trojúhelník je polovinou obdélníku, jehož svislá strana je dlouhá 3 dílky. Obsah tohoto obdélníku má být $2 \cdot 6 = 12$ čtverců, takže jeho druhá strana musí být dlouhá $12 : 3 = 4$ dílky — můžeme nakreslit první dělicí čáru.

Postupujme podobně i u druhého trojúhelníku. Tento trojúhelník je polovinou obdélníku s obsahem 12 čtverců, jehož vodorovná strana je dlouhá 6 dílků. Jeho svislá strana musí být $12 : 6 = 2$ dílky dlouhá — můžeme nakreslit druhou dělicí čáru.

Děvčata by měla rozdělit hřiště jako na následujícím obrázku.