62. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Libor si myslí trojmístné přirozené číslo, které má všechny své číslice liché. Pokud k němu přičte 421, dostane trojmístné číslo, které nemá ani jednu svou číslici lichou. Najděte všechna čísla, která si může Libor myslet. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Zapište si čísla pod sebe a uvažujte jako při písemném sčítání.

Možné řešení. Číslice myšleného čísla označíme po řadě L_1, L_2, L_3. Sčítání zmíněné v zadání ukazuje následující schéma:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \\ 4 & 2 & 1 \\ \hline S_1 & S_2 & S_3 \end{array}$$

Pro každé liché L_3 je součet $L_3 + 1$ sudý. Avšak pro každé liché L_2 je součet $L_2 + 2$ lichý. Abychom přesto dostali ve výsledku ve sloupci desítek sudou číslici, musí při sčítání ve sloupci jednotek dojít k přechodu přes desítku. Tedy L_3 může být jedině 9.

Pro každé liché L_1 je součet $L_1 + 4$ lichý. Má-li přesto být ve výsledku ve sloupci stovek sudá číslice, musí při sčítání ve sloupci desítek dojít k přechodu přes desítku. Tedy L_2 může být pouze 9 a 7.

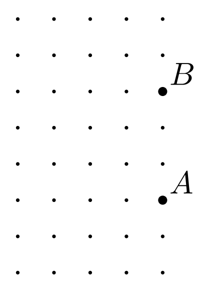
Při sčítání na místě stovek k přechodu přes desítku dojít nesmí, jelikož výsledek má být dle zadání trojmístný. Tedy L_1 může být jen 1 nebo 3.

Seskupením přípustných číslic dostáváme celkem čtyři čísla, která si Libor mohl myslet:

179, 199, 379 a 399.

Z6–I–2

Na obrázku jsou vyznačeny uzlové body čtverečkové sítě, z nichž dva jsou pojmenovány A a B. Bod C nechť je jeden ze zbylých uzlových bodů. Najděte všechny možné polohy bodu C tak, aby trojúhelník ABC měl obsah 4,5 čtverečku. (*E. Novotná*)

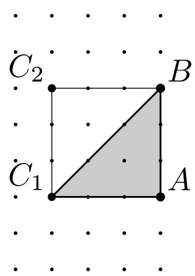


Nápověda. Obsah každého trojúhelníku lze vyjádřit pomocí obsahu (nejvýše) dvou pravoúhlých trojúhelníků.

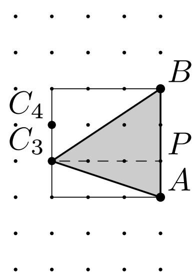
Možné řešení. Náhodným zkoušením uzlových bodů velmi brzy zjistíme, že potřebujeme diskutovat tři kvalitativně odlišné případy, kdy trojúhelník ABC je a) pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A nebo B, b) ostroúhlý nebo c) tupoúhlý.

a) Předpokládejme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A nebo B. Budeme uvažovat první možnost, řešení ve druhém případě bude souměrné.

Takový trojúhelník tvoří právě polovinu pravoúhelníku, jehož jedna strana je AB a druhá AC. Obsah tohoto pravoúhelníku má být roven 9 čtverečkům. Velikost AB je 3 jednotky, bod C tedy musí být $9 : 3 = 3$ jednotky od A. Tento bod označíme C_1, souměrné řešení vlevo od bodu B je označeno C_2.

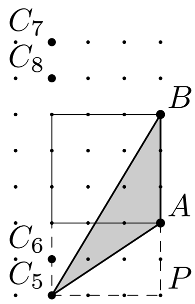


b) Předpokládejme nyní, že bod C je nějaký uzlový bod v pásu mezi přímkami AC_1 a BC_2. Trojúhelník ABC rozdělíme výškou na stranu AB na dva menší pravoúhlé trojúhelníky. Každý z těchto trojúhelníků je polovinou nějakého pravoúhelníku, viz obrázek. Tyto dva pravoúhelníky tvoří větší pravoúhelník, jehož obsah je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC. Jedna strana tohoto pravoúhelníku je AB a druhá je shodná s výškou CP. Hledáme tedy bod C tak, aby obsah takového pravoúhelníku byl 9 čtverečků. Zkoušením nebo úvahou jako výše odhalíme dvě řešení, jež jsou vyznačena jako C_3 a C_4:



c) Nakonec musíme diskutovat ještě možnosti, kdy bod C je nějaký uzlový bod vně pásu určeného přímkami AC_1 a BC_2. Trojúhelník ABC je v tomto případě tupoúhlý a výška na stranu AB jde mimo něj; patu této výšky označíme opět P. Budeme uvažovat pouze trojúhelníky s tupým úhlem u vrcholu A, zbylá řešení jsou souměrná.

Obsah trojúhelníku ABC je nyní rozdílem obsahů pravoúhlých trojúhelníků CPB a CPA. Každý z těchto trojúhelníků je polovinou vhodného pravoúhelníku, viz obrázek. Rozdíl obsahů těchto pravoúhelníků je tedy dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC a je stejný jako obsah pravoúhelníku, jenž je na obrázku obtažen nepřerušovanou čarou. Jedna strana tohoto pravoúhelníku je AB a druhá je shodná s výškou CP. Hledáme tedy bod C tak, aby obsah takového pravoúhelníku byl 9 čtverečků. Zkoušením nebo úvahou jako výše odhalíme dvě řešení, jež jsou označena jako C_5 a C_6. Souměrná řešení nad přímkou BC_2 jsou C_7 a C_8.



Úloha má celkem 8 řešení, která jsme postupně označili $C_1, \ldots, C_8$.

Poznámky. Představa se součtovým pravoúhelníkem v odstavci b), příp. rozdílovým pravoúhelníkem v odstavci c), není nutná k úspěšnému dořešení úlohy. Stačí, když si řešitel uvědomí, že obsah trojúhelníku ABC je součtem, příp. rozdílem, obsahů pravoúhlých trojúhelníků CPB a CPA. Zdůvodnění, že např. vyznačený bod C_5 je řešením, pak může vypadat následovně:

$$S_{ABC_5} = \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Všimněte si, že pro libovolný bod C na přímce C_1C_2 vyjde podle předchozích úvah obsah trojúhelníku ABC také 4,5 čtverečku. Vlastně jsme tak dokázali, že obsah libovolného trojúhelníku je roven polovině pravoúhelníku, který má jednu stranu společnou s trojúhelníkem a druhou shodnou s výškou na tuto stranu.

Pokud žák tento fakt již zná, je řešení obzvlášť snadné: stačí najít jeden vyhovující bod a všechny ostatní jsou právě uzlové body ležící na rovnoběžce s přímkou AB, která prochází tímto vyhovujícím bodem.

Z6–I–3

Obři Koloděj a Bobr mluví některé dny jenom pravdu a někdy jenom lžou. Koloděj mluví pravdu v pondělí, v pátek a v neděli, v ostatní dny lže. Bobr mluví pravdu ve středu, čtvrtek a pátek, ostatní dny lže.

1. Určete, kdy může Koloděj říci: „Včera jsem mluvil pravdu.“
2. Jednoho dne oba řekli: „Včera jsem lhal.“ V který den to bylo?

(*M. Volfová*)

Nápověda. Pomozte si přehlednou tabulkou, ze které by bylo patrné, kdy který obr lže a kdy ne.

Možné řešení. Informace ze zadání pro přehlednost vepíšeme do tabulky:

	Koloděj	Bobr
pondělí	+	−
úterý	−	−
středa	−	+
čtvrtek	−	+
pátek	+	+
sobota	−	−
neděle	+	−

1. Koloděj jistě může říci „včera jsem mluvil pravdu“ v pondělí, protože v pondělky mluví pravdu a o nedělích (včera) také. Jiná dvojice po sobě jdoucích dnů, kdy mluví pravdu, není. Pokud by Koloděj říkal tentýž výrok v den, kdy zrovna lže, znamenalo by to, že předchozí den ve skutečnosti lhal. To by se mohlo stát jedině ve středu nebo ve čtvrtek. Koloděj tedy může tvrdit „včera jsem mluvil pravdu“ v pondělí, ve středu nebo ve čtvrtek.

2. Podobně, pokud některý z obrů říká „včera jsem lhal,“ může to být buď v den, kdy mluví pravdu a současně předchozí den lhal, nebo naopak. Koloděj může tento výrok prohlásit v úterý, v pátek, v sobotu nebo v neděli; Bobr ve středu nebo v sobotu. Jediný den, kdy mohou oba tvrdit „včera jsem lhal,“ je sobota.

Z6–I–4

Eva má tři papírky a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou dvojice čísel z papírků, dostane výsledky 48, 192 a 36. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích? (*E. Novotná*)

Nápověda. Všimněte si, že $192 = 48 \cdot 4$.

Možné řešení. Předpokládejme, že výsledek 48 dostaneme, když vynásobíme čísla z prvního a druhého papírku, výsledek 192 dostaneme z prvního a třetího papírku a výsledek 36 z druhého a třetího papírku.

Protože $192 = 48 \cdot 4$, číslo na třetím papírku musí být čtyřnásobkem čísla na druhém papírku. Na druhém papírku je tedy takové číslo, že když jej vynásobíme se svým čtyřnásobkem, dostaneme 36. To znamená, že kdybychom toto číslo vynásobili se sebou samým, dostaneme čtvrtinu předchozího výsledku, tj. 9. Na druhém papírku je tedy číslo 3. Na třetím papírku potom musí být $3 \cdot 4 = 12$ a na prvním $48 : 3 = 16$. Na Eviných papírcích jsou napsána tato čísla: 16, 3 a 12.

Jiná nápověda. Každé přirozené číslo lze napsat jako součin dvou přirozených čísel pouze konečně mnoha způsoby.

Jiné řešení. Stejně jako u předchozího řešení předpokládáme, že výsledek 48 dostaneme vynásobením čísel z prvního a druhého papírku, výsledek 192 dostaneme z prvního a třetího papírku a výsledek 36 z druhého a třetího papírku.

Číslo 36 můžeme napsat jako součin dvou přirozených čísel pouze pěti způsoby:

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

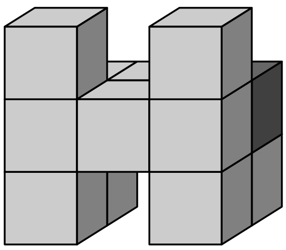
Přitom ze zadání víme, že na třetím papírku musí být větší číslo než na druhém papírku (součin čísel z prvního a třetího papírku je větší než součin čísel z prvního a druhého). Odtud máme pouze čtyři možné dvojice čísel na druhém a třetím papírku. Ze známých hodnot součinů čísel na papírcích dopočítáme dvojím způsobem číslo na prvním papírku, a pokud se tyto výsledky shodují, máme řešení.

2. číslo	3. číslo	1. číslo	
(x)	(y)	($48 : x$)	($192 : y$)
1	36	48	–
2	18	24	–
3	12	16	16
4	9	12	–

(Pomlčka značí, že čísla nelze dělit beze zbytku, tj. výsledek není přirozené číslo.) Vidíme jedinou vyhovující možnost: na Eviných papírcích jsou napsána čísla 16, 3 a 12.

Z6–I–5

Na obrázku je stavba složená z dvanácti shodných krychlí. Na kolik různých míst můžeme přemístit tmavou kostku, chceme-li, aby se povrch sestaveného tělesa nezměnil?

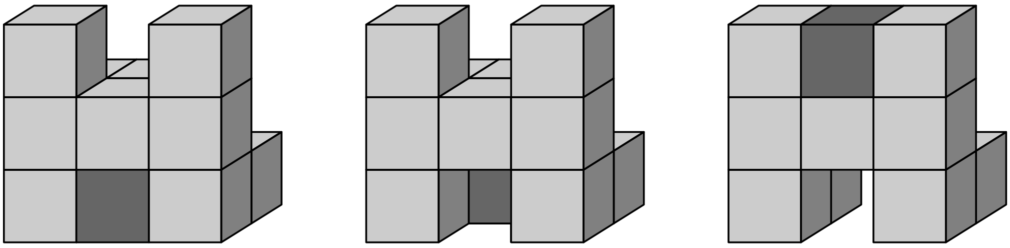


Stejně jako u původní stavby se i u stavby nové musejí kostky dotýkat celými stěnami. Polohu světlých kostek měnit nelze. (*D. Reichmann*)

Nápověda. Jak se změní povrch tělesa po odstranění tmavé kostky?

Možné řešení. Původně jsou na povrchu sestaveného tělesa tři stěny tmavé kostky, ostatní tři její stěny se dotýkají světlých kostek. Po odstranění tmavé kostky se celkový povrch tělesa nezmění (tři tmavé stěny jsou nahrazeny třemi světlými).

Aby se povrch tělesa nezměnil ani po přemístění tmavé kostky, musí se tato dotýkat právě tří světlých kostek (tři světlé stěny budou nahrazeny třemi tmavými). Zkoušením rychle zjistíme, že tmavou kostku můžeme přemístit jedině na následující tři místa:



Z6–I–6

Číšník v restauraci U Šejdíře vždy započítává platícímu hostovi do účtu i datum: celkovou utracenou částku zvětší o tolik korun, kolikátý den v měsíci zrovna je.

V září se v restauraci dvakrát sešla trojice přátel. Poprvé platil každý z nich zvlášť, číšník tedy vždy přičetl datum a žádal od každého 168 Kč. Za čtyři dny tam obědvali znovu a dali si přesně totéž co minule. Tentokrát však jeden platil za všechny dohromady. Číšník tedy připsal datum do účtu jen jednou a řekl si o 486 Kč. Přátelům se nezdálo, že ač se ceny v jídelním lístku nezměnily, mají oběd levnější než minule, a číšníkův podvod ten den odhalili. Kolikátého zrovna bylo? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Určete, jaká by byla jejich celková útrata, kdyby i podruhé zaplatil každý zvlášť.

Možné řešení. Kdyby v den, kdy přátelé odhalili číšníkův podvod, platil každý zvlášť, řekl by si číšník od každého o $168+4 = 172$ (Kč). Celkem by tak zaplatili $3 \cdot 172 = 516$ (Kč). Tím, že platil jeden za všechny, se cena snížila o částku odpovídající dvěma datům. Tato cena je podle zadání 486 Kč. Dvěma datům tedy odpovídá částka $516 - 486 = 30$ (Kč). Číslo v datu je $30 : 2 = 15$; přátelé podvod odhalili 15. září.

Poznámka. Svůj výsledek si můžeme ověřit závěrečným shrnutím: Poprvé byli přátelé v restauraci 11. září. Každý měl podle jídelního lístku platit 157 Kč, platil však $157 + 11 =$ $= 168$ (Kč). Podruhé se v restauraci sešli 15. září. Jeden za všechny měl podle jídelního lístku zaplatit $3 \cdot 157 = 471$ (Kč), číšník si však řekl o $471 + 15 = 486$ (Kč).