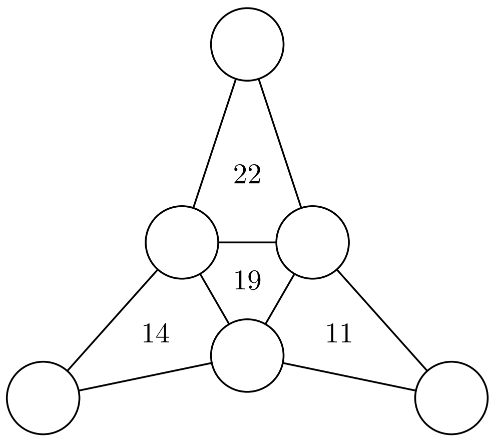
I. kolo kategorie Z7

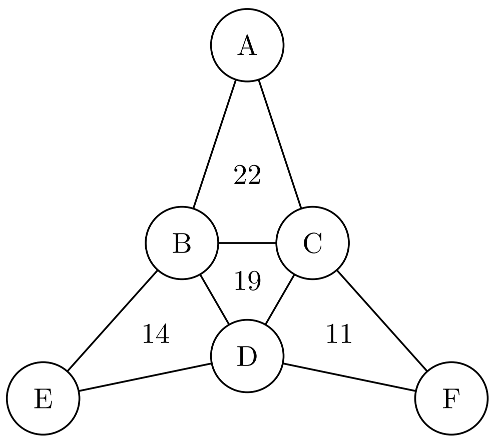
Z7–I–1

Na obrázku je šest kroužků, které tvoří vrcholy čtyř trojúhelníků. Napište do kroužků navzájem různá jednomístná přirozená čísla tak, aby v každém trojúhelníku platilo, že číslo uvnitř je součtem čísel napsaných v jeho vrcholech. Najděte všechna řešení. (*E. Novotná*)



Nápověda. Všímejte si dvojic trojúhelníků se společnou stranou.

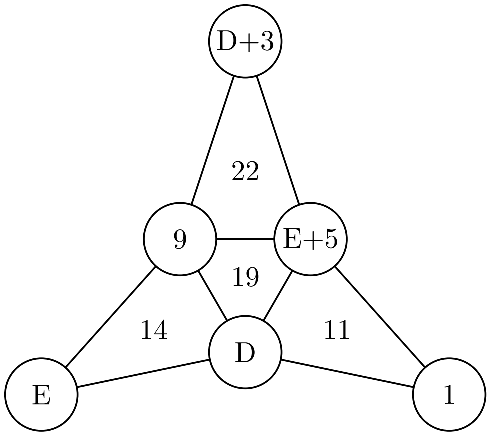
Možné řešení. Označme si čísla v kroužcích jako na následujícím obrázku. Budeme si postupně všímat dvojic trojúhelníků, které mají společnou stranu.



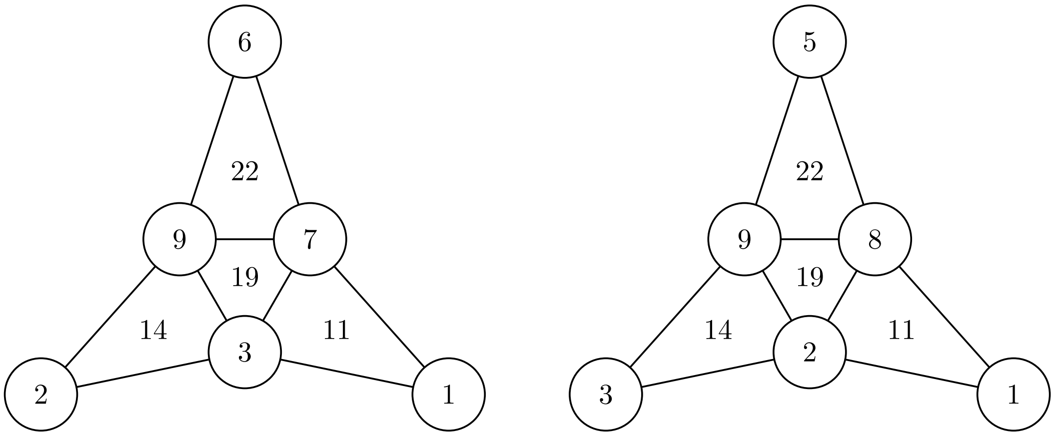
Trojúhelníky se společnou stranou DC: Protože součet čísel v trojúhelníku DCB je 19 a součet čísel v trojúhelníku DCF je 11, musí být číslo B o 8 větší než číslo F. V kroužcích mohou být jen přirozená čísla od 1 do 9, máme tedy jedinou možnost: $B = 9$ a $F = 1$.

Porovnáme-li trojúhelníky se společnou stranou CB, zjistíme, že číslo A je o 3 větší než číslo D. Tuto dvojici neumíme zatím určit jednoznačně, proto píšeme $A = D + 3$.

Obdobně porovnáním trojúhelníků se společnou stranou BD určíme, že $C = E + 5$.



Z trojúhelníku se součtem čísel 19 teď vidíme, že $9 + E + 5 + D = 19$, tj. $E + D = 5$. Protože číslo 1 jsme již použili, musí být $E = 2$ a $D = 3$, nebo naopak. Každá ze dvou uvedených možností vede k jednomu řešení, jež vidíme na obrázcích níže. (V obou případech jsou čísla v kroužcích navzájem různá.)



Z7–I–2

Před naší školou je květinový záhon. Jednu pětinu všech květin tvoří tulipány, dvě devítiny narcisy, čtyři patnáctiny hyacinty a zbytek jsou macešky. Kolik květin je celkem na záhonu, jestliže od žádného druhu jich není více než 60 ani méně než 30? (*M. Petrová*)

Nápověda. Mohlo by být na záhonu např. 100 květin?

Možné řešení. Celkový počet květin musí být dělitelný pěti, protože jednu pětinu tvoří tulipány. Z podobného důvodu musí být počet všech květin dělitelný devíti (kvůli narcisům) a patnácti (kvůli hyacintům). Počet všech květin na záhonu je tedy nějaký společný násobek čísel 5, 9 a 15. Nejmenší společný násobek těchto tří čísel je 45, tudíž celkový počet květin je násobkem čísla 45.

V následující tabulce procházíme postupně násobky 45 a určujeme odpovídající počty jednotlivých druhů květin. Hledáme takový řádek, kde jsou všechny tyto počty v rozmezí od 30 do 60 (včetně).

celkem (c)	tulipány ($t = \frac{1}{5}c$)	narcisy ($n = \frac{2}{9}c$)	hyacinty ($h = \frac{4}{15}c$)	macešky ($m = c - t - n - h$)
45	9	10	12	14
90	18	20	24	28
135	27	30	36	42
180	**36**	**40**	**48**	**56**
225	45	50	60	70

Jediný vyhovující případ je zvýrazněn tučně. Se zvětšujícím se celkovým počtem květin se zvětšují i počty květin jednotlivých druhů, takže další výše neuvedené možnosti zřejmě výše uvedeným požadavkům nevyhovují. Na záhonu před školou máme celkem 180 květin.

Poznámka. Jakmile v řádku najdeme číslo menší než 30 nebo větší než 60, nemusíme ostatní položky dopočítávat — tato možnost totiž jistě nevyhovuje. Předchozí diskuse tedy může být úplná, i když tabulka je neúplná.

Jiné řešení. Nejprve dopočítáme, jakou část mezi všemi květinami zaujímají macešky:

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{9} - \frac{4}{15} = \frac{14}{45}.$$

Aby byl počet macešek přirozeným číslem, musí být počet všech květin násobkem čísla 45. V takovém případě jsou i počty ostatních květin přirozená čísla.

Počty všech jednotlivých druhů jsou v rozmezí od 30 do 60 (včetně), odkud umíme určit rozmezí celkového počtu květin:

Tulipány tvoří $\frac{1}{5}$ celkového počtu květin, tudíž počet všech květin musí být

$$\text{od } 30 \cdot 5 = 150 \text{ do } 60 \cdot 5 = 300,$$

podle poměrného zastoupení narcisů musí být počet všech květin

$$\text{od } 30 \cdot \frac{9}{2} = 135 \text{ do } 60 \cdot \frac{9}{2} = 270,$$

podle hyacintů musí být počet všech květin

$$\text{od } 30 \cdot \frac{15}{4} = 112{,}5 \text{ do } 60 \cdot \frac{15}{4} = 225$$

a podle macešek

$$\text{od } 30 \cdot \frac{45}{14} \doteq 96{,}4 \text{ do } 60 \cdot \frac{45}{14} \doteq 192{,}9.$$

Předchozí čtyři podmínky mají platit současně, tzn. celkový počet květin se pohybuje v rozmezí od 150 do 192 (včetně). Mezi těmito čísly je jediný násobek 45, totiž 180. Na záhonu roste celkem 180 květin.

Z7–I–3

Obři Bobr a Koloděj mluví některé dny jenom pravdu a některé dny jenom lžou. Bobr mluví pravdu pouze o víkendech, Koloděj mluví pravdu v pondělí, v pátek a v neděli, v ostatní dny lže.

Jednoho dne Bobr řekl: „Včera jsme oba lhali.“

Koloděj však nesouhlasil: „Aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu.“

Který den v týdnu můžou obři vést takový rozhovor?

(*M. Volfová a V. Žádník*)

Nápověda. Pomozte si přehlednou tabulkou, ze které by bylo patrné, kdy který obr lže a kdy ne.

Možné řešení. Informace ze zadání pro přehlednost vepíšeme do tabulky:

	Bobr	Koloděj
pondělí	–	+
úterý	–	–
středa	–	–
čtvrtek	–	–
pátek	–	+
sobota	+	–
neděle	+	+

Bobr může tvrdit „včera jsme oba lhali“ buď v den, kdy mluví pravdu a současně předchozí den oba obři lhali (což se stát nemůže), nebo v den, kdy lže a současně předchozí den aspoň jeden z obrů mluvil pravdu (tj. v pondělí nebo v úterý). Bobr tedy může říci „včera jsme oba lhali“ jedině v pondělí nebo v úterý.

Koloděj může tvrdit „aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu“ buď v den, kdy mluví pravdu a současně předchozí den aspoň jeden z obrů mluvil pravdu (tj. v pondělí nebo v neděli), nebo v den, kdy lže a současně předchozí den žádný z nich pravdu nemluvil (tj. ve středu nebo ve čtvrtek). Koloděj tedy může nesouhlasit „aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu“ jedině v pondělí, ve středu, ve čtvrtek nebo v neděli.

Jediný den, kdy můžou obři vést uvedený rozhovor, je tudíž pondělí.

Z7–I–4

Paní učitelka napsala na tabuli následující čísla:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43.$$

Dvě sousední čísla se liší vždy o stejnou hodnotu, v tomto případě o 3. Pak z tabule smazala všechna čísla kromě 1, 19 a 43. Dále mezi tato tři čísla dopsala několik celých čísel tak, že se každá dvě sousední čísla opět lišila o stejnou hodnotu a přitom žádné číslo nebylo napsáno dvakrát.

Kolika způsoby mohla paní učitelka čísla doplnit? (*K. Pazourek*)

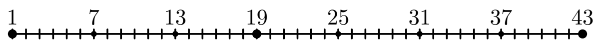
Nápověda. Může být mezi doplněnými čísly např. 5?

Možné řešení. Jeden ze způsobů, jak čísla doplnit, je samozřejmě ten, který paní učitelka smazala (v tomto případě je rozdíl sousedních čísel roven 3). Další možný, zřejmě nejjednodušší, způsob je doplnit všechna přirozená čísla od 1 do 43 (v tomto případě je rozdíl roven 1).

Každé doplnění podle zadání je zcela určeno rozdílem sousedních čísel, který si označíme d. Všechna možná doplnění lze tedy určit zkusmo uvažováním všech možných rozdílů d a kontrolou, zda v odpovídající posloupnosti (začínající 1) jsou obsažena také čísla 19 a 43.

Nicméně, aby v takové posloupnosti bylo obsaženo číslo 19, musí být rozdíl $19-1=18$ nějakým násobkem určující konstanty d. Podobně, aby v takové posloupnosti bylo obsaženo také číslo 43, musí být rozdíl $43-19=24$ nějakým násobkem čísla d. Jinými slovy, d musí být společným dělitelem čísel 18 a 24. Všechna možná doplnění tedy odpovídají všem společným dělitelům čísel 18 a 24, což jsou právě čísla 1, 2, 3 a 6. Paní učitelka mohla doplnit čísla na tabuli čtyřmi způsoby.

Poznámka. Předchozí úvahy můžou být vhodně podpořeny představou na číselné ose; zde je zvýrazněno dělení s největším možným rozdílem $d=6$:

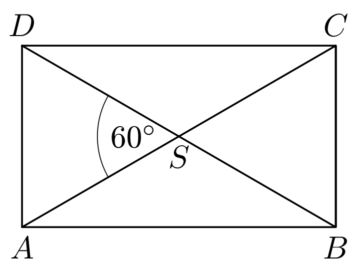


Z7–I–5

Ve sportovním areálu je upravená plocha tvaru obdélníku $ABCD$ s delší stranou AB. Úhlopříčky AC a BD svírají úhel 60°. Běžci trénují na velkém okruhu $ACBDA$ nebo na malé dráze ADA. Mojmír běžel desetkrát po velkém okruhu a Vojta patnáctkrát po malé dráze, tedy patnáctkrát v jednom směru a patnáctkrát v opačném. Oba dohromady uběhli 4,5 km. Jak dlouhá je úhlopříčka AC? (*L. Hozová*)

Nápověda. Je nějaký vztah mezi délkou úhlopříčky a délkou kratší strany obdélníku?

Možné řešení. Průsečík úhlopříček označíme S. Musíme rozhodnout, zda se zadaná velikost 60° vztahuje k úhlu ASB nebo ASD. Protože pro strany obdélníku platí $|AB|>|AD|$, musí být úhel ASB tupoúhlý a úhel ASD ostroúhlý. Velikost 60° tedy přísluší úhlu ASD.



V každém obdélníku jsou trojúhelníky ASD a BSC rovnoramenné a navzájem shodné, v našem případě jsou dokonce rovnostranné. To znamená, že úsečky AS, SC, CB, BS, SD a DA jsou shodné, jejich délku (v metrech) označíme s. Chceme určit délku úhlopříčky, jež při současném značení odpovídá hodnotě $2s$.

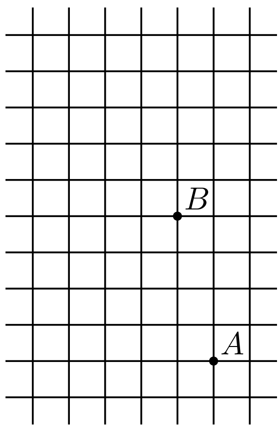
Délka velkého okruhu je tedy $6s$ a celková vzdálenost, kterou uběhl Mojmír, je $10 \cdot 6s = 60s$. Délka malé dráhy je $2s$ a celková vzdálenost, kterou uběhl Vojta, je $15 \cdot 2s = 30s$. Oba dohromady tedy naběhali $60s+30s = 90s$, což je podle zadání rovno 4,5 km = 4 500 m. Platí tedy

$$90s = 4\,500,$$

odkud plyne $2s = 100$. Délka úhlopříčky je 100 m.

Z7–I–6

Máme čtverečkovou síť se 77 uzlovými body. Dva z nich jsou označeny A a B jako na obrázku. Bod C nechť je jeden ze zbylých uzlových bodů. Najděte všechny možné polohy bodu C tak, aby trojúhelník ABC měl obsah 6 čtverečků. (*E. Novotná*)



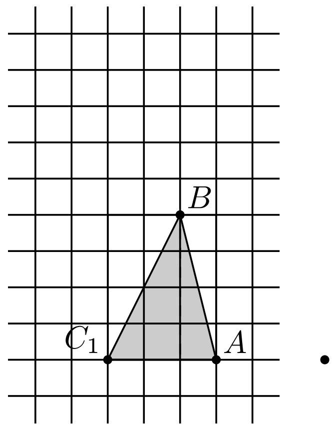
Nápověda. Zkoušejte nejdřív takové body, aby některá strana trojúhelníku ležela na nějaké přímce tvořící čtverečkovou síť.

Možné řešení. Pokud hledáme řešení zkusmo, nejspíš začneme zkoušet uzlové body tak, jak naznačuje nápověda. Uvažujme nejprve uzlové body na vodorovné přímce jdoucí bodem A; polohu bodu C počítáme od A doleva:

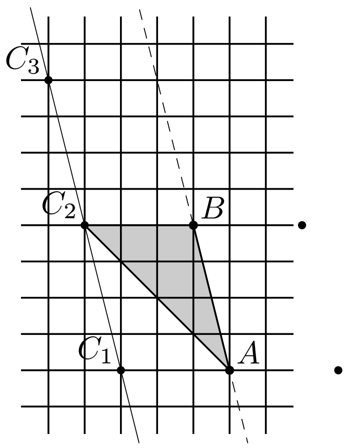
1. trojúhelník je pravoúhlý a jeho obsah je zřejmě 2 čtverečky, což je málo,
2. výška z bodu B rozděluje trojúhelník na dva (shodné) pravoúhlé trojúhelníky, obsah je $2 + 2 = 4$ čtverečky, což je pořád málo,
3. výška z bodu B rozděluje trojúhelník na dva (neshodné) pravoúhlé trojúhelníky, obsah je $4 + 2 = 6$ čtverečků a máme první vyhovující řešení, které označíme C_1.

Tentýž bod lze najít i bez zkoušení, pokud si včas uvědomíme, že obsah každého diskutovaného trojúhelníku je roven polovině obsahu pravoúhelníku, jehož jedna strana je AC a druhá je rovna 4 jednotkám (velikost výšky z bodu B), viz obrázek. Hledáme tedy takový uzlový bod na myšlené přímce, aby obsah odpovídajícího pravoúhelníku byl roven

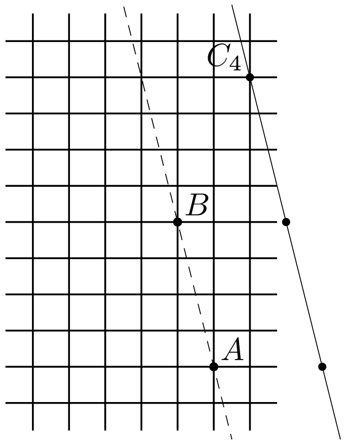
12 čtverečkům. Bod C tedy musí být $12 : 4 = 3$ jednotky od A, a abychom neopustili vyznačenou oblast, musíme mířit doleva.



Velmi podobným způsobem lze zdůvodnit i další řešení na vodorovné přímce procházející bodem B, které označíme C_2. (Souměrný bod podle B opět vychází mimo vyznačenou oblast.) Přímka C_1C_2 je rovnoběžná s AB, tudíž každý trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na této přímce, má tutéž výšku na stranu AB, tedy i tentýž obsah. Hledáme tedy takové uzlové body, které současně leží na přímce C_1C_2. Takto nalézáme bod, který je označen C_3.



Analogickou úvahou v opačné polorovině vymezené přímkou AB zjistíme, že zbylá řešení jsou právě ty uzlové body, jež současně leží na vyznačené bezejmenné přímce. Takto nalézáme poslední vyhovující bod, který je označen C_4.



Úloha má celkem 4 řešení, která jsme postupně označili C_1, C_2, C_3 a C_4.

Poznámky. V uvedeném řešení předpokládáme znalost faktu, že obsah libovolného trojúhelníku je roven polovině pravoúhelníku, který má jednu stranu společnou s trojúhelníkem a druhou shodnou s výškou na tuto stranu. Jednoduché zdůvodnění tohoto tvrzení je v podstatě ukázáno v řešení úlohy Z6–I–2.

I bez této dovednosti lze úlohu dořešit zkoušením, jak jsme naznačili v úvodu. Obsah libovolného trojúhelníku ABC s vrcholy v uzlových bodech lze vždy vyjádřit následovně:

- trojúhelníku ABC opíšeme pravoúhelník, jehož strany leží na přímkách tvořících čtverečkovou síť,
- pokud je to nutné, rozdělíme doplňkové plochy k trojúhelníku v opsaném pravoúhelníku na pravoúhlé trojúhelníky, příp. pravoúhelníky,
- obsah trojúhelníku vyjádříme jako rozdíl obsahu opsaného pravoúhelníku a obsahů jednotlivých doplňkových částí z předchozího kroku.

Výpočet obsahů některých trojúhelníků by podle tohoto návodu vypadal následovně (viz obrázky výše):

$$
\begin{aligned}
S_{ABC_1} &= 3 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} = 12 - 6 = 6,\\
S_{ABC_2} &= 4 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} = 16 - 10 = 6,\\
S_{ABC_3} &= 5 \cdot 8 - \frac{5 \cdot 8}{2} - \frac{4 \cdot 4}{2} - 1 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 4}{2} = 40 - 34 = 6,\\
S_{ABC_4} &= 2 \cdot 8 - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 8}{2} = 16 - 10 = 6.
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že ani při tomto postupu není nutné vyčerpávat všechny možnosti: máme-li např. zjištěno, že bod C_2 je řešením, jistě již nemusíme uvažovat takové uzlové body, kdy by odpovídající trojúhelník buď obsahoval trojúhelník ABC_2 nebo byl jeho částí (v prvém případě by vzniklý trojúhelník měl větší než požadovaný obsah, v druhém případě menší).