62. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

# II. kolo kategorie Z9

**Z9–II–1**

Do třídy chodí 33 žáků. Před Vánocemi byli s hajným v lese plnit krmelce. Dívky si rozebraly balíky sena. Chlapci se rozdělili na dvě skupiny: někteří vzali 4 pytle mrkve a 3 pytle ořechů a ostatní vzali po jednom pytli jablek a jednom pytli ořechů. Poměr počtů dívek, chlapců z první skupiny a chlapců ze druhé skupiny byl stejný jako poměr počtů pytlů ořechů, jablek a mrkví.

Kolik bylo ve třídě dívek, kolik chlapců neslo pytle s mrkví a kolik jich neslo pytle s jablky? (*M. Mach*)

**Možné řešení.** Označíme písmenem $d$ počet dívek, písmenem $x$ počet chlapců s mrkví a písmenem $y$ počet chlapců s jablky. Potom počet pytlů ořechů je $3x + y$, počet pytlů jablek je $y$ a počet pytlů mrkve je $4x$. Rovnost mezi poměry počtů ze zadání je

$$d : x : y = (3x + y) : y : 4x.$$

Odtud můžeme vyjádřit poměr mezi $x$ a $y$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{y}{4x}, \\ 4x^2 &= y^2, \\ 2x &= y, \end{aligned}$$

přičemž si uvědomujeme, že všechny neznámé jsou kladná čísla. Dosazením do úvodní rovnosti dostáváme:

$$d : x : y = 5x : 2x : 4x = 5 : 2 : 4.$$

Ze zadání dále víme, že $d + x + y = 33$. Právě zjištěný poměr se tedy snažíme rozšířit tak, aby jeho členové dávali součet 33:

$$d : x : y = 15 : 6 : 12.$$

Ve třídě je 15 dívek, 6 chlapců neslo pytle s mrkví a 12 chlapců neslo pytle s jablky.

**Hodnocení.** 2 body za zjištění poměru chlapců s mrkví a chlapců s jablky; 2 body za získání poměru dívek, chlapců s mrkví a chlapců s jablky; 2 body za správnou odpověď.

**Z9–II–2**

Na čistou tabuli jsme žlutou křídou napsali trojmístné přirozené číslo tvořené vzájemně různými nenulovými číslicemi. Pak jsme na tabuli bílou křídou vypsali všechna další trojmístná čísla, která lze získat změnou pořadí číslic žlutého čísla. Aritmetický průměr všech čísel na tabuli byl 370. Každé číslo menší než žluté jsme podtrhli. Podtržená čísla byla právě tři a jejich aritmetický průměr byl 205. Určete žluté číslo. (*L. Šimůnek*)

**Možné řešení.** Číslice hledaného čísla označíme $a$, $b$, $c$, přičemž budeme předpokládat

$$0 < a < b < c. \tag{1}$$

Čísla na tabuli, seřazená od nejmenšího po největší, pak jsou

$$\overline{abc},\ \overline{acb},\ \overline{bac},\ \overline{bca},\ \overline{cab},\ \overline{cba}.$$

Aritmetický průměr prvních tří z nich je 205, tedy platí

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) = 3 \cdot 205,$$

po úpravě

$$210a + 111b + 12c = 615. \tag{2}$$

Podobně sestavíme rovnici na základě znalosti aritmetického průměru všech čísel:

$$222a + 222b + 222c = 6 \cdot 370,$$

po úpravě

$$\begin{aligned} 222 \cdot (a + b + c) &= 2\,220,\\ a + b + c &= 10. \end{aligned} \tag{3}$$

Z odvozených vztahů (1), (2) a (3) jsme nyní schopni určit jednoznačně číslice $a$, $b$ a $c$: Pro $a \geqq 3$ by byla hodnota na levé straně rovnice (2) příliš velká a tato rovnost by nemohla platit. Pro $a = 2$ by vzhledem k podmínce (1) muselo být $b \geqq 3$ a i v takovém případě by byla hodnota na levé straně rovnice (2) příliš velká. Proto je $a = 1$. Dosazením do rovnic (2) a (3) a jejich úpravou získáme soustavu

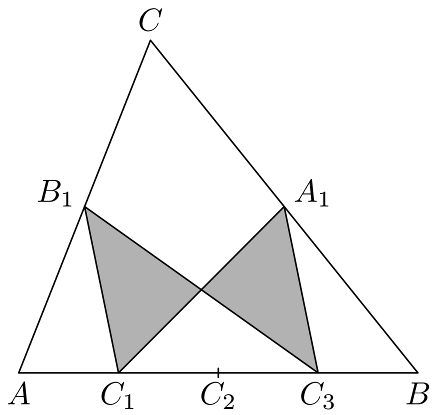
$$\begin{aligned} 111b + 12c &= 405,\\ b + c &= 9, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $b = 3$, $c = 6$. Žluté číslo, námi zapsané jako $\overline{bca}$, je tedy 361.

**Hodnocení.** 2 body za zjištění, že ciferný součet je 10; 2 body za vztah $210a + 111b + 12c = 615$ či jeho obdobu; 1 bod za určení číslic hledaného čísla; 1 bod za hledané číslo.

**Z9–II–3**

Vyznačme si v obecném trojúhelníku $ABC$ následující body podle obrázku. Body $A_1$ a $B_1$ jsou středy stran $BC$ a $AC$, body $C_1$, $C_2$ a $C_3$ dělí stranu $AB$ na čtyři stejné díly. Spojíme body $A_1$ a $B_1$ s body $C_1$ a $C_3$, takže nám vznikne mašle ohraničená těmito spojnicemi. Jakou část obsahu celého trojúhelníku mašle zabírá? (*M. Mach*)




**Možné řešení.** Ukážeme, že čtyřúhelník $C_1C_3A_1B_1$ má poloviční obsah jako trojúhelník $ABC$ a mašle zbírá právě polovinu tohoto čtyřúhelníku. Odtud vyplyne, že mašle zabírá čtvrtinu obsahu celého trojúhelníku.

Označme $c$ délku strany $AB$ a $v$ velikost výšky trojúhelníku $ABC$ k této straně. Při tomto značení je obsah trojúhelníku roven

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv.$$

Úsečka $B_1A_1$ je střední příčkou trojúhelníku $ABC$, je tedy rovnoběžná se stranou $AB$ a má poloviční velikost. Body $C_1$, $C_2$ a $C_3$ dělí stranu $AB$ na čtyři stejné díly, proto je úsečka $C_1C_3$ polovinou strany $AB$, má tedy stejnou velikost jako úsečka $B_1A_1$. Protože úsečky $B_1A_1$ a $C_1C_3$ jsou rovnoběžné a stejně dlouhé, je čtyřúhelník $C_1C_3A_1B_1$ rovnoběžníkem. Velikost výšky rovnoběžníku ke straně $C_1C_3$ odpovídá vzdálenosti strany $AB$ a střední příčky $B_1A_1$, což je právě polovina výšky $v$. Obsah rovnoběžníku je proto roven

$$S_{C_1C_3A_1B_1} = \frac{c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Úhlopříčky v rovnoběžníku $C_1C_3A_1B_1$ jej rozdělují na čtyři trojúhelníky, které mají stejný obsah. Tento fakt stačí zdůvodnit pro libovolné dva sousední trojúhelníky: Úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí, odkud plyne $|SC_1| = |SA_1|$, kde $S$ označuje průsečík úhlopříček. Dále výška trojúhelníku $SC_1B_1$ na stranu $SC_1$ je stejná jako výška trojúhelníku $SB_1A_1$ na stranu $SA_1$. Odtud plyne, že trojúhelníky $SC_1B_1$ a $SB_1A_1$ mají stejný obsah. Stejným způsobem lze zdůvodnit, že všechny trojúhelníky $SC_1B_1$, $SB_1A_1$, $SA_1C_3$ a $SC_3C_1$ mají stejný obsah.

Odtud tedy vyplývá, že

$$S_{\text{mašle}} = \frac{1}{2} S_{C_1C_3A_1B_1},$$

což spolu s předchozí rovností dokazuje, že mašle zabírá čtvrtinu obsahu trojúhelníku $ABC$.

**Hodnocení.** 2 body za zdůvodnění, že $C_1C_3A_1B_1$ je rovnoběžník a vyjádření jeho obsahu; 2 body za zdůvodnění, že úhlopříčky tento rovnoběžník rozdělují na čtyři rovnoploché trojúhelníky; 2 body za dopočítání úlohy a správný výsledek.

**Poznámka.** Při řešení úlohy lze samozřejmě využít různých jiných poznatků, které zde nerozvádíme. Např. nesousední dvojice trojúhelníků v rovnoběžníku $C_1C_3A_1B_1$ jsou vlastně shodné, přitom je snadné vyjádřit výšku a obsah trojúhelníku $SC_3C_1$ vzhledem k trojúhelníku $ABC$ atd. Úlohu je možné řešit i bez pomocné úvahy s rovnoběžníkem. V každém případě přizpůsobte hodnocení tak, aby 4 body odpovídaly zdůvodnění jednotlivých postřehů a 2 body vyjádření výsledku.

**Z9–II–4**

Najděte všechna sedmimístná čísla, která obsahují každou z číslic 0 až 6 právě jednou a pro něž platí, že jejich první i poslední dvojčíslí je dělitelné 2, první a poslední trojčíslí je dělitelné 3, první a poslední čtyřčíslí je dělitelné 4, první a poslední pětičíslí je dělitelné 5 a první i poslední šestičíslí je dělitelné 6. (*M. Mach*)

**Možné řešení.** Poslední číslice musí být sudá, neboť poslední dvojčíslí je dělitelné dvěma. Aby poslední pětičíslí bylo dělitelné pěti, musí být poslední číslice 0 nebo 5. Z nich sudá je 0. První pětičíslí je také dělitelné pěti, pro páté místo zbývá číslice 5. Zatím máme číslo určené takto:

$$* *** 5*0.$$

Poslední trojčíslí je dělitelné třemi, proto jeho ciferný součet musí být dělitelný třemi. Na předposlední pozici tak můžeme doplnit 4 nebo 1. Aby poslední čtyřčíslí bylo dělitelné čtyřmi, musí být poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi. Na předposledním místě tak může být 4, nikoli 1. Teď máme číslo určené takto:

$$* *** 540.$$

Jelikož první dvojčíslí je dělitelné dvěma a první čtyřčíslí je dělitelné čtyřmi, jsou číslice na druhé a čtvrté pozici sudé. Proto na první a třetí pozici budou číslice liché. Ze znalosti, že poslední šestičíslí je dělitelné šesti, odvodíme první číslici. Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi zároveň. Na prvním místě musí být číslice zvolena tak, aby ciferný součet zbytku čísla byl dělitelný třemi. Součet číslic 0 až 6 je 21, takže na prvním místě mohou být číslice 3 a 6, z nichž lichá je číslice 3. Na třetí pozici musí být zbývající lichá číslice, a to 1. Číslo jsme doposud určili takto:

$$3*1*540.$$

Zbývá doplnit číslice 2 a 6. Aby první trojčíslí bylo dělitelné třemi, dáme číslici 2 na druhou pozici. Hledané číslo může být jedině

$$3\,216\,540.$$

Na závěr musíme ověřit, že jsme žádný z požadavků v zadání neopomenuli. Zbývá tedy ověřit, že první čtyřčíslí je dělitelné čtyřmi a první šestičíslí je dělitelné šesti. Toto je splněno, hledané číslo je tedy 3216540.

**Hodnocení.** Po 1 bodu za správné určení a zdůvodnění pozice pěti číslic; 1 bod za výsledné číslo. Nalezení čísla bez zdůvodnění jednotlivých kroků ohodnoťte 2 body.