II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Jdeme-li podél plotu od severu k jihu, jsou rozestupy mezi jeho sloupky zpočátku shodné. Od určitého sloupku se rozestup zmenší na 2,9 metru a takový zůstává až k jižnímu konci plotu. Mezi 1. a 16. sloupkem (počítáno od severu) se rozestupy nezmění a vzdálenost mezi těmito dvěma sloupky je 48 metrů. Vzdálenost mezi 16. a 28. sloupkem je 36 metrů.

Kolikátý sloupek má od svých sousedních sloupků různé rozestupy?

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. V úseku mezi 1. a 16. sloupkem je 15 mezer a podle zadání se jejich šířka nemění. Každá z nich proto měří $48 : 15 = 3{,}2$ metru, a je tedy o 0,3 metru větší než mezera u jižního konce plotu.

Kdyby všechny mezery mezi 16. a 28. sloupkem měřily zadaných 2,9 metru, byla by celková vzdálenost mezi těmito sloupky $12 \cdot 2{,}9 = 34{,}8$ metru. Podle zadání je však tato vzdálenost 36 metrů, což je o 1,2 metru více. Tento rozdíl lze vyjádřit jako $4 \cdot 0{,}3$ metru, tedy právě čtyři mezery v úseku mezi těmito sloupky jsou o 0,3 metru delší než zadaných 2,9 metru. Jde o mezery mezi 16. a 20. sloupkem.

Hledaný sloupek, který má od svých sousedních sloupků různé rozestupy, je 20. v pořadí.

Hodnocení. 2 body za výpočet velikosti severní mezery 3,2 m; 3 body za počet mezer o velikosti 3,2 m mezi 16. a 28. sloupkem (resp. celkový počet mezer o velikosti 2,9 m); 1 bod za výsledek.

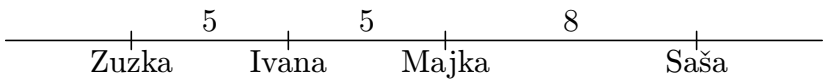
Z6–II–2

Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka závodily v četbě stejné knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka přečíst 32 stran, což bylo přesně v polovině mezi počty stran, které stihly přečíst Saša a Zuzka. Ivana přečetla o 5 stran více než Zuzka a Majka přečetla o 8 stran méně než Saša. Ivanin výsledek byl přesně v polovině mezi Majčiným a Zuzčiným.

Určete, kolik stran přečetla jednotlivá děvčata. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Uvažme, která z následujících možností mohla nastat: buď přečetla Saša méně stran než Zuzka, nebo naopak. Pokud by Saša přečetla méně než Zuzka, znamenalo by to, že Ivana přečetla nejvíc. Potom by ale její výkon nebyl v polovině mezi žádnými dvěma děvčaty. Proto musela Zuzka přečíst méně než Saša.

Ivana přečetla o 5 stran více než Zuzka a současně byl její výsledek v polovině mezi Zuzkou a Majkou. Proto Majka přečetla o 5 stran více než Ivana a ze zadání dále víme, že Saša přečetla o 8 stran více než Majka. Sečtením rozdílů mezi těmito čtyřmi děvčaty zjišťujeme, že Saša přečetla o $5 + 5 + 8 = 18$ stran více než Zuzka.

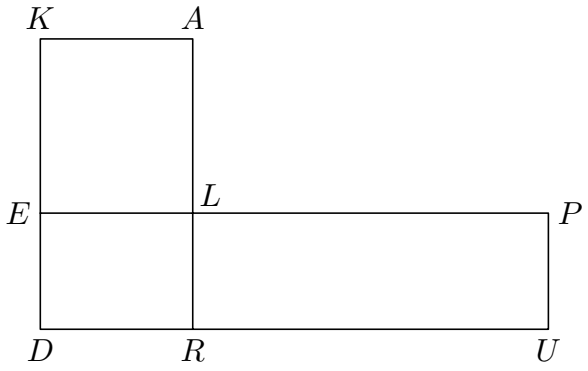


Lucka přečetla 32 stran, což bylo v polovině mezi Zuzkou a Sašou. Zuzka tedy přečetla $32 - 9 = 23$ stran a Saša přečetla $32 + 9 = 41$ stran. Odtud dopočítáme ostatní výsledky: Majka přečetla $41 - 8 = 33$ stran a Ivana přečetla $23 + 5 = 28$ stran.

Hodnocení. 2 body za zdůvodnění, že Saša přečetla více než Zuzka; 2 body za zdůvodnění, že rozdíl mezi nimi byl 18; 2 body za výsledky děvčat.

Z6–II–3

Na obrázku je znázorněno několik pravoúhelníků s několika společnými vrcholy. Obsah pravoúhelníku $DRAK$ je roven $44\,\mathrm{cm}^2$, obsah pravoúhelníku $DUPE$ je roven $64\,\mathrm{cm}^2$ a obsah mnohoúhelníku $DUPLAK$ je roven $92\,\mathrm{cm}^2$.



Určete délky stran mnohoúhelníku $DUPLAK$, pokud víte, že tyto délky v cm jsou vyjádřeny celými čísly. Najděte všechny možnosti. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Z údajů, které známe, umíme dopočítat obsah pravoúhelníku $DRLE$:

$$S_{DRLE} = 44 + 64 - 92 = 16.$$

(Všechny veličiny jsou buď v cm, nebo cm^2 a tyto jednotky dále neuvádíme.) Délky stran všech pravoúhelníků jsou celočíselné a současně má platit:

$$|DR| \cdot |DE| = 16, \quad |DR| \cdot |DK| = 44, \quad |DU| \cdot |DE| = 64.$$

V následující tabulce vypíšeme všechny možnosti, jak vyjádřit 16 jako součin dvou kladných celých čísel. U každé z těchto možností vyjádříme velikosti ostatních stran,

$$|DK| = 44 : |DR|, \quad |DU| = 64 : |DE|,$$

a budeme kontrolovat, zda dostaneme celá čísla. V kladném případě dopočítáme velikosti zbylých stran mnohoúhelníku:

$$|LA| = |DK| - |DE|, \quad |LP| = |DU| - |DR|.$$

$\lvert DR\rvert$	1	2	4	8	16
$\lvert DE\rvert$	16	8	4	2	1
$\lvert DK\rvert$	44	22	11	–	–
$\lvert DU\rvert$	4	8	16	32	64
$\lvert LA\rvert$	28	14	7	–	–
$\lvert PL\rvert$	3	6	12	24	48

Úloha má tři řešení, která vycházejí z prvních tří sloupců předchozí tabulky.

Hodnocení. 1 bod za obsah pravoúhelníku $DRLE$; 3 body za možná řešení; 2 body za zdůvodnění, že řešení není více.

Poznámka. Vypíšeme všechny možnosti, jak vyjádřit obsahy pravoúhelníků $DRAK$ a $DUPE$ jakožto součiny dvou kladných celých čísel:

$$|DR| \cdot |DK| = 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 11 \cdot 4 = 22 \cdot 2 = 44 \cdot 1,$$
$$|DU| \cdot |DE| = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 32 \cdot 2 = 64 \cdot 1.$$

Ze zadání dále víme, že

$$|DR| < |DU|, \quad |DK| > |DE|, \quad |DR| \cdot |DK| + |DU| \cdot |DE| - |DR| \cdot |DE| = 92.$$

Systematickým probráním všech možností lze najít všechna tři výše uvedená řešení, aniž by byl vyjádřen obsah pravoúhelníku $DRLE$. V takovém případě hodnoťte 3 body za možná řešení a 3 body za zdůvodnění, že řešení není více.