III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Obdélník má délky stran v poměru $2:5$. Prodloužíme-li všechny jeho strany o 9 cm, dostaneme obdélník, jehož délky stran jsou v poměru $3:7$.

V jakém poměru budou délky stran obdélníku, který vznikne prodloužením všech stran o dalších 9 cm? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Délky stran původního obdélníku jsou v poměru $2:5$. To znamená, že jejich délky (v centimetrech) můžeme označit $2x$ a $5x$. Po prvním prodloužení stran má obdélník rozměry $2x+9$ a $5x+9$. Protože délky stran tohoto obdélníku jsou v poměru $3:7$, musí platit:

$$\frac{2x+9}{5x+9}=\frac{3}{7}.$$

Po vyřešení rovnice dostáváme $x=36$ (cm). Rozměry původního obdélníku jsou $2\cdot 36 = 72$ (cm) a $5\cdot 36=180$ (cm).

Po druhém prodloužení stran má obdélník rozměry $72+18=90$ (cm) a $180+18 = 198$ (cm). Poměr délek stran tohoto obdélníku tedy je

$$90:198=5:11.$$

Návrh hodnocení. 2 body za označení rozměrů původního obdélníku a vyjádření jejich změny; 2 body za sestavení a vyřešení rovnice; 2 body za výpočet konečných rozměrů obdélníku a jejich poměru.

Z9–III–2

Tři kamarádi si mysleli tři navzájem různé nenulové číslice, z nichž jedna byla 3. Z těchto číslic vytvořili všech šest možných trojmístných čísel, která potom rozdělili do tří dvojic. Rozdílem první dvojice čísel bylo jednomístné číslo, rozdílem druhé dvojice čísel bylo dvojmístné číslo a rozdílem třetí dvojice čísel bylo trojmístné číslo dělitelné pěti.

Zjistěte, které tři číslice si mohli kamarádi myslet. Určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Myšlené číslice označíme a, b a c, přičemž bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a<b<c$. Z uvažovaných čísel mohl jednomístný rozdíl vzniknout jedině jako rozdíl dvou čísel začínajících touž číslicí. Proto stačí uvažovat následující tři možnosti:

1) Pokud by jednomístný rozdíl vznikl jako

$$\overline{acb}-\overline{abc}=(100a+10c+b)-(100a+10b+c)=9(c-b),$$

pak by platilo $c - b = 1$, tzn. $c = b + 1$ (odpovídající rozdíl by byl 9). Ostatní rozdíly vzniklé ze zbylých čísel $\overline{cba}$, $\overline{cab}$, $\overline{bca}$ a $\overline{bac}$ by potom mohly být:

$$\begin{aligned} \overline{cba} - \overline{cab} &= 9(b-a), \\ \overline{cba} - \overline{bca} &= 90, \\ \overline{cba} - \overline{bac} &= 100 + 10(b-a) + (a-c), \\ \overline{cab} - \overline{bca} < \overline{cab} - \overline{bac} &= 99, \\ \overline{bca} - \overline{bac} &= 9(c-a). \end{aligned}$$

Trojmístný rozdíl lze dostat pouze jako $\overline{cba} - \overline{bac}$. Tento rozdíl má být dle zadání dělitelný pěti. Poslední číslicí rozdílu nemůže být nula, neboť $a \neq c$, rozdíl proto končí číslicí 5. A protože jsme stanovili, že $c > a$, muselo by platit $c = a + 5$, a tedy $b = a + 4$ (odpovídající rozdíl by byl $100 + 40 - 5 = 135$). Rozdíl zbylých čísel $\overline{cab}$ a $\overline{bca}$ by potom byl dvojmístný ($\overline{cab} - \overline{bca} = 100 - 50 + 4 = 54$). Jediná vyhovující trojice číslic obsahující 3 je 3, 7, 8.

2) Pokud by jednomístný rozdíl vznikl jako $\overline{bca} - \overline{bac}$, pak by platilo $c - a = 1$, tzn. $c = a + 1$. V takovém případě neexistuje b, pro které by platilo $a < b < c$.

3) Pokud by jednomístný rozdíl vznikl jako $\overline{cba} - \overline{cab}$, pak by platilo $b - a = 1$, tzn. $b = a + 1$ (odpovídající rozdíl by byl 9). Podobnými úvahami jako v prvním případě zjistíme, že trojmístný rozdíl lze ze zbylých čísel $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{acb}$ a $\overline{abc}$ dostat pouze jako $\overline{bca} - \overline{abc}$. Aby byl tento rozdíl dělitelný pěti, muselo by platit $c = a + 5$, a tedy $c = b + 4$ (odpovídající rozdíl by byl $100 + 40 - 5 = 135$). Rozdíl zbylých čísel $\overline{bac}$ a $\overline{acb}$ by potom byl dvojmístný ($\overline{bac} - \overline{acb} = 100 - 50 + 4 = 54$). Jediné vyhovující trojice číslic obsahující 3 jsou 2, 3, 7 a 3, 4, 8.

Kamarádi si mohli myslet číslice 3, 7, 8 nebo 2, 3, 7 nebo 3, 4, 8.

Návrh hodnocení. 1 bod za možnosti vzniku jednomístného rozdílu; 2 body za všechny vyhovující trojice čísel (1 bod za aspoň jednu takovou trojici); 3 body podle kvality a úplnosti zdůvodnění, že víc trojic neexistuje.

Z9–III–3

Na papíře bylo napsáno několik bezprostředně po sobě jdoucích kladných násobků určitého přirozeného čísla většího než jedna. Radek ukázal na jedno z napsaných čísel: když jej vynásobil s číslem, které s ním sousedilo nalevo, dostal součin o 216 menší, než když jej vynásobil s číslem, které s ním sousedilo napravo.

Na které číslo mohl Radek ukázat? Najděte všechny možnosti. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Přirozené číslo, jehož násobky byly napsány na papíře, označme n; dle zadání je $n > 1$. Dotčená čísla na papíře tak můžeme označit

$$(k-1)n, \quad kn, \quad (k+1)n,$$

přičemž neznámá k je přirozené číslo; aby byly všechny tři výrazy kladné, musí být $k > 1$. Radek tak dostal součiny $(k-1)kn^2$ a $(k+1)kn^2$, jejichž rozdíl je $2kn^2$. Platí $2kn^2 = 216$, po úpravě

$$kn^2 = 108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Při respektování podmínek $n > 1$ a $k > 1$ dostáváme tři různá řešení:

n	2	3	6
k	27	12	3
kn	54	36	18

Existují tři možná čísla, na která mohl Radek ukázat: 54, 36 nebo 18.

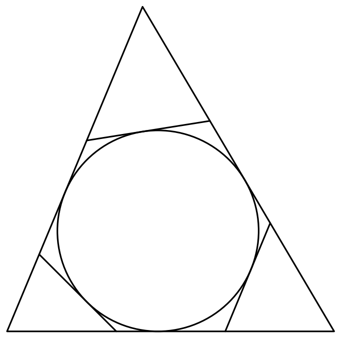
Návrh hodnocení. 2 body za rovnici $kn^2 = 108 = 2^2 \cdot 3^3$ nebo její obdobu; po 1 bodu za každé řešení vyhovující zadání; 1 bod za správně formulovaný závěr.

Vypsání dotčených tří členů posloupnosti není nezbytnou součástí řešení. Pro názornost je uvádíme: a) 52, 54, 56; b) 33, 36, 39; c) 12, 18, 24.

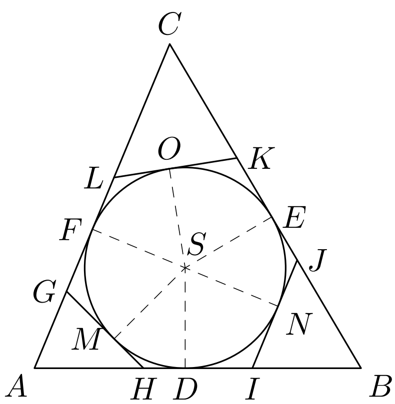
Z9–III–4

Eva vepsala do daného trojúhelníku kružnici. Poté dokreslila tři úsečky, které se dotýkaly vepsané kružnice a v původním trojúhelníku vytvářely tři menší trojúhelníky, viz obrázek. Obvody těchto tří trojúhelníků byly 12 cm, 14 cm a 16 cm.

Určete obvod původního trojúhelníku. (*E. Novotná*)



Možné řešení. Označme jako na následujícím obrázku vrcholy původního trojúhelníku A, B, C, body dotyku vepsané kružnice D, E, F a její střed S, krajní body dokreslených úseček G, H, I, J, K, L a jejich body dotyku s kružnicí M, N, O.



Úsečky HD a HM jsou tečnami z bodu H ke kružnici, proto jsou úhly HDS a HMS pravé. Odpovídající trojúhelníky HDS a HMS mají společnou stranu HS a shodné odvěsny SD a SM tvořící poloměry vepsané kružnice. Z Pythagorovy věty vyplývá, že také odvěsny HD a HM jsou shodné, tzn. $|HD| = |HM|$.

Ze stejného důvodu platí také $|GF| = |GM|$, tedy obvod trojúhelníku AHG je roven

$$|AH| + |HM| + |MG| + |GA| = |AH| + |HD| + |FG| + |GA| = |AD| + |AF|. \qquad (*)$$

To znamená, že obvod rohového trojúhelníku AHG je roven součtu vzdáleností bodu A od dotykových bodů na stranách AB a AC.

Stejná vlastnost platí také pro obvody zbylých dvou rohových trojúhelníků. Obvod trojúhelníku ABC je proto roven

$$12 + 14 + 16 = 42\,(\text{cm}).$$

Návrh hodnocení. 2 body za poznatek $|HD| = |HM|$ a jeho užití; 1 bod za jeho zdůvodnění (lze akceptovat i odkaz na souměrnost podle přímky HS); 2 body za vyjádření obvodu rohového trojúhelníku $(*)$; 1 bod za vyčíslení obvodu trojúhelníku ABC.