66. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zvonkohra na nádvoří hraje v každou celou hodinu krátkou skladbu, a to počínaje 8. a konče 22. hodinou. Skladeb je celkem osmnáct, v celou hodinu se hraje vždy jen jedna a po odehrání všech osmnácti se začíná ve stejném pořadí znovu. Olga a Libor byli na nádvoří v pondělí v 15 hodin. Ten samý týden si přišli zvonkohru poslechnout ještě jednou v poledne, k jejich zklamání však hrála ta samá melodie, kterou slyšeli v pondělí.

Který den byla Olga s Liborem na nádvoří podruhé? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Kolik z osmnácti skladeb zazní v jeden den a na kolik z nich se nedostane?

Možné řešení. Mezi odehráním první ranní a poslední večerní skladby uplyne $22-8=14$ hodin, každý den se proto hraje patnáct skladeb. Ve zvonkohře je nastaveno osmnáct skladeb, tedy o tři více.

Na skladbu, kterou slyšeli hrdinové úlohy v pondělí v 15 hodin, se v úterý dostalo o 3 hodiny později, tedy v 18 hodin. Ve středu o další 3 hodiny později, tedy ve 21 hodin.

Ve čtvrtek sledovaná skladba nezazněla vůbec: od posledního jejího uvedení hrála ze sedmnácti ostatních skladeb jedna ve středu ve 22 hodin, patnáct ve čtvrtek, jedna v pátek v 8 hodin a na sledovanou skladbu se dostalo až v 9 hodin.

Následující den, v sobotu, zazněla sledovaná skladba o 3 hodiny později, tedy ve 12 hodin. V neděli o další 3 hodiny později, tedy v 15 hodin.

Daný týden hrála sledovaná skladba v poledne jedině v sobotu, Olga a Libor přišli na nádvoří podruhé v sobotu.

Poznámka. Předchozí diskuze může být nahrazena programem zvonkohry pro daný týden. Skladby označujeme čísly 1 až 18, přičemž 1 označuje tu, kterou slyšela Olga s Liborem:

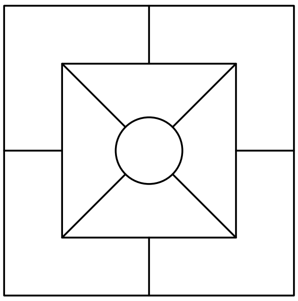
	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h	19 h	20 h	21 h	22 h
po							...	**1**	2	3	4	5	6	7	8
út	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	**1**	2	3	4	5
st	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	**1**	2
čt	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
pá	18	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
so	15	16	17	18	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ne	12	13	14	15	16	17	18	**1**	...						

Z5–I–2

V každém z rohových polí vnějšího čtverce má být napsáno jedno z čísel 2, 4, 6 a 8, přičemž v různých polích mají být různá čísla. Ve čtyřech polích vnitřního čtverce mají být součiny čísel ze sousedících polí vnějšího čtverce. V kruhu má být součet čísel ze sousedících polí vnitřního čtverce.

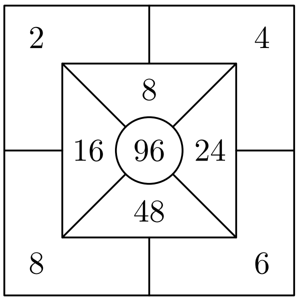
Která čísla mohou být napsána v kruhu? Určete všechny možnosti.

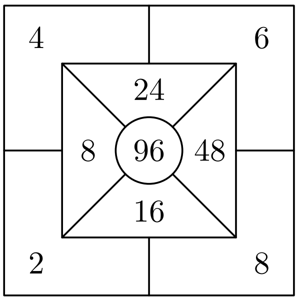
(*M. Dillingerová*)

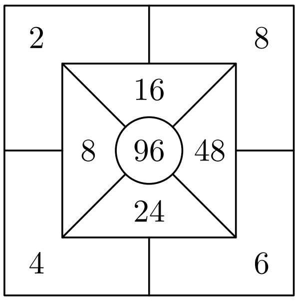


Nápověda. Mohou různá vyplnění rohových polí vést ke stejnému součtu v kruhu?

Možné řešení. Čísla 2, 4, 6 a 8 lze do rohových polí napsat mnoha způsoby. Pro různé způsoby však můžeme nakonec dostat tentýž součet v kruhu, jako např. v následujících případech:

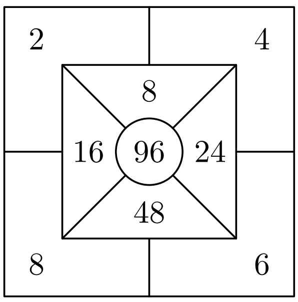


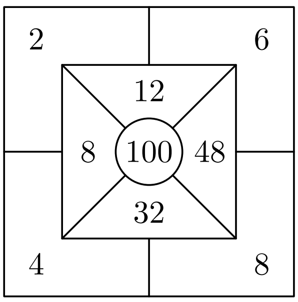


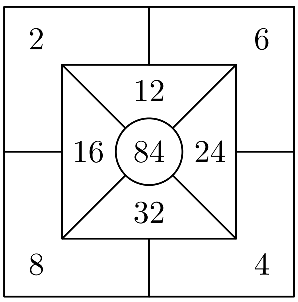


První a druhý případ se liší pootočením o 90°, druhý a třetí jsou souměrné podle vodorovné osy čtverce atp. Různé hodnoty v kruhu tedy dostaneme, pouze když čísla v rohových polích nejsou nijak souměrná.

Zkoušení všech možností si proto můžeme zjednodušit tím, že uvažujeme jedno z čísel, např. 2, v jednom konkrétním poli, např. vlevo nahoře. Ostatní čísla doplňujeme tak, aby žádná dvě vyplnění nebyla souměrná. Přitom jediná souměrnost, která zachovává 2 v levém horním poli, je souměrnost podle úhlopříčky procházející tímto polem. S těmito požadavky máme následující tři řešení:







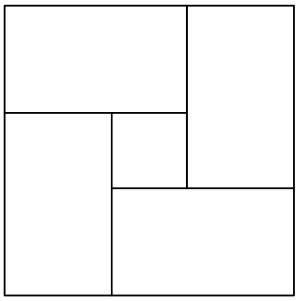
V kruhu mohou být napsána čísla 84, 96 a 100.

Poznámka. Pro každé vyplnění rohových polí můžeme najít 7 dalších, která jsou s ním nějak souměrná. Všechna vyplnění tedy lze rozdělit do osmic, které jistě mají stejné součty v kruhu. Přitom čísla do čtyřech rohových polí lze vyplnit celkem 24 způsoby. V kruhu tak mohou být napsána nejvýše $24 : 8 = 3$ různá čísla. Zkoušením určíme, která čísla to jsou, a že jsou navzájem různá.

Z5–I–3

Na obrázku je čtvercová dlaždice se stranou délky 10 dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod celé dlaždice.

Určete rozměry obdélníků. (*K. Pazourek*)



Nápověda. Určete délku strany malého čtverce.

Možné řešení. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod dlaždice, proto i jeho strana je pětkrát menší než strana dlaždice. Strana malého čtverce tedy měří

$$10 : 5 = 2\,(\text{dm}).$$

Přitom délka strany dlaždice je rovna součtu délek strany malého čtverce a dvou kratších stran obdélníku. Kratší strana obdélníku tedy měří

$$(10 - 2) : 2 = 4\,(\text{dm}).$$

Současně délka strany dlaždice je rovna součtu délek kratší a delší strany obdélníku. Delší strana obdélníku tedy měří

$$10 - 4 = 6\,(\text{dm}).$$

Rozměry obdélníků jsou $4\,\text{dm} \times 6\,\text{dm}$.

Z5–I–4

Prodavač vánočních stromků prodával smrčky po 220 Kč, borovičky po 250 Kč a jedličky po 330 Kč. Ráno měl stejný počet smrčků, jedliček a borovic. Večer měl všechny stromky prodané a celkem za ně utržil 36 000 Kč.

Kolik stromků toho dne prodavač prodal? (*M. Krejčová*)

Nápověda. Počítejte po trojicích.

Možné řešení. Trojice smrček, borovička a jedlička stála dohromady

$$220 + 250 + 330 = 800 \text{ Kč}.$$

Prodavač takových trojic za celý den prodal $36\,000 : 800 = 45$.

Celkem tedy prodal $3 \cdot 45 = 135$ stromků.

Z5–I–5

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby součet doplněných číslic byl lichý a aby platila následující rovnost:

$$42 \times *8 = 2***$$

(*L. Hozová*)

Nápověda. Začněte od první hvězdičky.

Možné řešení. Postupně dosadíme všechny možné číslice na místě první hvězdičky, vypočítáme součin a prověříme ostatní požadavky:

- $42 \cdot 18 = 756$, výsledek je menší než $2\,000$; nevyhovuje.
- $42 \cdot 28 = 1\,176$, výsledek je menší než $2\,000$; nevyhovuje.
- $42 \cdot 38 = 1\,596$, výsledek je menší než $2\,000$; nevyhovuje.
- $42 \cdot 48 = 2\,016$, součet $4 + 0 + 1 + 6 = 11$ je lichý; vyhovuje.
- $42 \cdot 58 = 2\,436$, součet $5 + 4 + 3 + 6 = 18$ je sudý; nevyhovuje.
- $42 \cdot 68 = 2\,856$, součet $6 + 8 + 5 + 6 = 25$ je lichý; vyhovuje.
- $42 \cdot 78 = 3\,276$, výsledek je větší než $2\,999$; nevyhovuje.
- zbylé dva součiny jsou ještě větší; nevyhovují.

Úloha má dvě řešení, a to

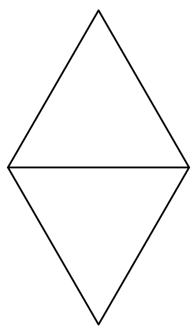
$$42 \cdot 48 = 2\,016 \quad \text{a} \quad 42 \cdot 68 = 2\,856.$$

Z5–I–6

Jiřka sestrojila dva shodné rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku. Dále chce sestrojit všechny kružnice, které budou mít střed v některém z vrcholů a budou procházet některým jiným vrcholem některého z trojúhelníků.

Sestrojte a spočítejte všechny kružnice vyhovující Jiřčiným požadavkům.

(*K. Pazourek*)



Nápověda. Začněte s vrcholy, které jsou společné oběma trojúhelníkům.

Možné řešení. Pojmenujme vrcholy jako na následujícím obrázku a povšimněme si, že body A a C jsou vždy od zbývajících tří bodů stejně vzdáleny (odpovídající úsečky tvoří strany rovnostranných trojúhelníků). Proto kružnice se středem v bodě A procházející bodem B prochází také body C a D. Kružnice se středem v bodě A vyhovující Jiřčiným požadavkům je tedy jediná. Podobně existuje jediná vyhovující kružnice se středem v bodě C.

Kružnice se středem v bodě B procházející bodem A prochází také bodem C, další kružnice prochází bodem D. Kružnice se středem v bodě B vyhovující Jiřčiným požadavkům jsou tedy dvě. Podobně existují dvě vyhovující kružnice se středem v bodě D.

Dohromady existuje šest vyhovujících kružnic: