67. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Honzík dostal kapesné a chce si za ně koupit něco dobrého. Kdyby si koupil čtyři koláče, zbylo by mu 5 Kč. Kdyby si chtěl koupit pět koláčů, chybělo by mu 6 Kč. Kdyby si koupil dva koláče a tři koblihy, utratil by celé kapesné beze zbytku.

Kolik stojí jedna kobliha? (*L. Dedková*)

Nápověda. Kolik stojí jeden koláč?

Možné řešení. Honzíkovo kapesné lze vyjádřit třemi způsoby, a to jako

- součet ceny 4 koláčů plus 5 Kč,
- součet ceny 5 koláčů minus 6 Kč,
- součet cen 2 koláčů a 3 koblih.

Z prvních dvou vyjádření vyplývá, že jeden koláč stojí $5 + 6 = 11$ Kč. Odtud také zjišťujeme, že Honzíkovo kapesné bylo $4 \cdot 11 + 5 = 5 \cdot 11 - 6 = 49$ Kč. Ze třetího vyjádření plyne, že za tři koblihy by Honzík zaplatil $49 - 2 \cdot 11 = 27$ Kč. Jedna kobliha tedy stojí $27 : 3 = 9$ Kč.

Z5–I–2

Honza měl tři klece (černou, stříbrnou, zlatou) a tři zvířata (morče, potkana a tchoře). V každé kleci bylo jedno zvíře. Zlatá klec stála nalevo od černé klece. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem. Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece.

Určete, v které kleci bylo které zvíře. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaké bylo pořadí klecí?

Možné řešení. Z posledních dvou informací vyplývá, že stříbrná klec nestála ani zcela vlevo, ani zcela vpravo, tedy stála uprostřed. Zlatá klec stála nalevo od černé klece, tedy pořadí klecí bylo: zlatá, stříbrná, černá.

Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece, tedy byl v černé kleci. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem, tedy morče bylo ve zlaté kleci. Honza měl zvířata v klecích rozmístěna takto:

zlatá	stříbrná	černá
morče	tchoř	potkan

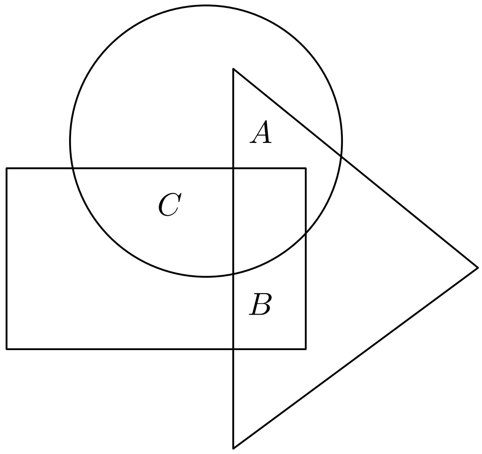
Z5–I–3

Na obrázku je diagram se sedmi políčky. Nakreslete do něj hvězdičky tak, aby byly splněny všechny následující podmínky:

1. Hvězdiček je celkem 21.
2. V každém políčku je alespoň jedna hvězdička.
3. V políčkách označených A, B, C je dohromady 8 hvězdiček.
4. V políčkách označených A a B je dohromady méně hvězdiček než v políčku označeném C.

5. V políčku označeném B je více hvězdiček než v políčku označeném A.
6. V kruhu je celkem 15 hvězdiček, v trojúhelníku celkem 12 hvězdiček a v obdélníku celkem 14 hvězdiček.

(*E. Semerádová*)

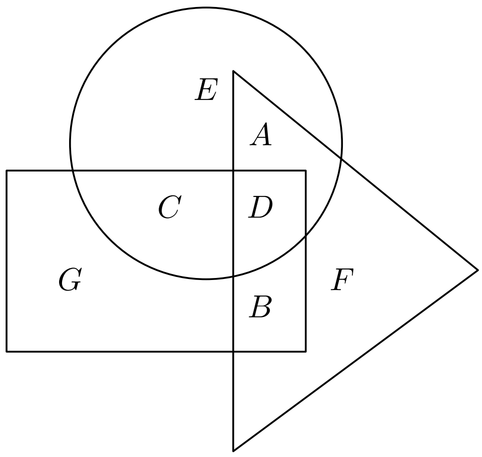


Nápověda. Určete nejdřív počty hvězdiček v políčkách A, B, C.

Možné řešení. Z druhé a páté podmínky vyplývá, že v políčku A je alespoň 1 hvězdička a v políčku B jsou alespoň 2 hvězdičky. Tedy v políčkách A a B jsou dohromady alespoň 3 hvězdičky. Ze třetí a čtvrté podmínky vyplývá, že v těchto dvou políčkách nejsou dohromady více něž 3 hvězdičky. Proto jsou v políčkách A a B dohromady právě 3 hvězdičky a v políčku C je 5 hvězdiček:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Také ostatní políčka označíme písmeny jako na následujícím obrázku:



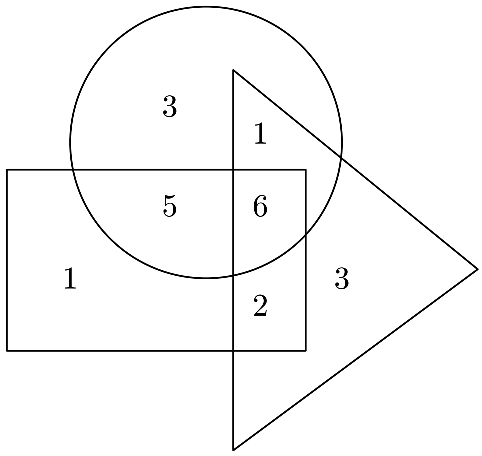
Každé z políček A, B a C je společné dvěma ze tří útvarů zmiňovaných v šesté podmínce (např. políčko A patří kruhu a trojúhelníku). Políčko D je společné všem třem útvarům. Zbylá políčka E, F a G patří do navzájem různých útvarů. Součet hvězdiček v kruhu, trojúhelníku a obdélníku je $15 + 12 + 14 = 41$ a v tomto součtu jsou hvězdičky z políček A, B, C započteny dvakrát, hvězdičky z políčka D třikrát a hvězdičky z políček

E, F, G jedenkrát. Přitom podle první podmínky je hvězdiček celkem 21 a v tomto součtu jsou hvězdičky z každého políčka počítány jedenkrát. Rozdíl 20 hvězdiček proto odpovídá součtu hvězdiček v políčkách A, B, C (kterých je celkem 8) a dvojnásobku počtu hvězdiček v políčku D. V políčku D proto musí být 6 hvězdiček:

$$D = (20 - 8) : 2 = 6.$$

Počty hvězdiček ve zbylých políčkách lze nyní dopočítat podle informací v šesté podmínce:

$$\begin{aligned} 15 &= A + C + D + E, \quad \text{tedy} \quad E = 15 - 1 - 5 - 6 = 3, \\ 12 &= A + B + D + F, \quad \text{tedy} \quad F = 12 - 1 - 5 - 2 = 3, \\ 14 &= B + C + D + G, \quad \text{tedy} \quad G = 14 - 2 - 5 - 6 = 1. \end{aligned}$$



Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení odvodíme počty hvězdiček v políčkách A, B a C:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Podle informací v šesté podmínce zjišťujeme, že

$$\begin{aligned} 15 &= A + C + D + E, \quad \text{tedy} \quad D + E = 15 - 1 - 5 = 9, \\ 12 &= A + B + D + F, \quad \text{tedy} \quad D + F = 12 - 1 - 2 = 9, \\ 14 &= B + C + D + G, \quad \text{tedy} \quad D + G = 14 - 2 - 5 = 7. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že v políčkách E a F je stejný počet hvězdiček, a ten je o 2 větší než v políčku G. Nyní můžeme postupně dosazovat počty hvězdiček v kterémkoli z políček D, E, F, G, z předchozího vyjádřit počty ve zbylých třech políčkách a ověřit, zda je celkový součet $A + B + C + D + E + F + G$ roven 21. Dosazujeme za G, přičemž máme na paměti, že v každém políčku má být alespoň jedna hvězdička:

G	$E = F$	D	součet
1	**3**	**6**	**21**
2	4	5	23
3	5	4	25
4	6	3	27
5	7	2	29
6	8	1	31

Jediná vyhovující možnost je zvýrazněna na prvním řádku.

Z5–I–4

Eva s Markem hráli badminton a Viktor jim počítal výměny. Po každých 10 výměnách nakreslil Viktor křížek (X). Poté místo každých 10 křížků nakreslil kolečko (O) a odpovídajících 10 křížků smazal. Když Eva a Marek hru ukončili, měl Viktor nakresleno toto:

OOOXXXXXXX

Určete kolik nejméně a kolik nejvíce výměn Eva s Markem sehrála. (*M. Smitková*)

Nápověda. Kolik výměn mohla Eva s Markem sehrát, kdyby nakonec bylo nakresleno pouze jedno kolečko?

Možné řešení. Každé kolečko nahrazuje 10 křížků, předchozí zápis tedy odpovídá 37 křížkům. Každý křížek představuje 10 odehraných výměn, Eva s Markem tedy sehrála nejméně 370 a nejvíce 379 výměn.

Z5–I–5

Sestrojte libovolnou úsečku AS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem A.

1. Sestrojte na kružnici k body E, F, G tak, aby spolu s bodem A tvořily obdélník $AEFG$. Najděte alespoň dvě řešení.
2. Sestrojte na kružnici k body B, C, D tak, aby spolu s bodem A tvořily čtverec $ABCD$.

(*L. Růžičková*)

Nápověda. Co víte o úhlopříčkách v obdélníku a ve čtverci?

Možné řešení. 1. Obdélník je čtyřúhelník, který má všechny vnitřní úhly pravé. Úhlopříčky každého obdélníku jsou stejně dlouhé a protínají se ve svých středech. Odtud zejména plyne, že kružnice se středem v průsečíku úhlopříček, která prochází jedním vrcholem obdélníku, prochází také všemi ostatními vrcholy.

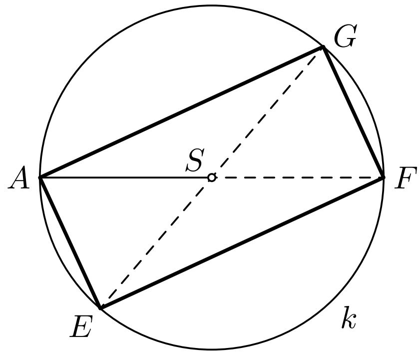
Z těchto vlastností lze odvodit několik řešení úlohy, např.:

- na kružnici k zvolíme libovolně bod E,
- bod F sestrojíme jako průsečík kružnice k s kolmicí k přímce AE jdoucí bodem E,

- bod G sestrojíme jako průsečík kružnice k s kolmicí k přímce EF jdoucí bodem F.

  Jiné řešení téže úlohy je toto:

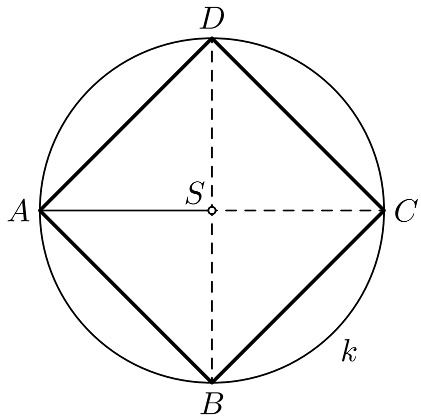
- na kružnici k zvolíme libovolně bod E,
- bod F sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou AS,
- bod G sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou ES.



2. Čtverec je čtyřúhelník, který má všechny vnitřní úhly pravé a všechny strany stejně dlouhé. Kromě všech vlastností jmenovaných v předchozím případě navíc platí, že úhlopříčky každého čtverce jsou navzájem kolmé.

Úlohu lze řešit např. takto:

- bod C sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou AS,
- body B a D sestrojíme jako průsečíky kružnice k s kolmicí k přímce AC jdoucí bodem S.



Z5–I–6

Na stole leželo osm kartiček s čísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ferda si vybral tři kartičky. Sečetl na nich napsaná čísla a zjistil, že jejich součet je o 1 větší než součet čísel na zbylých kartičkách.

Které kartičky mohly zůstat na stole? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je součet čísel na všech kartičkách?

Možné řešení. Součet čísel na všech osmi kartičkách je

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77,$$

a to je rovno 39 + 38. Ferda si vybral tři kartičky se součtem čísel 39. Postupným zkoušením od největších čísel najdeme všechny vyhovující možnosti:

v ruce	na stole
19, 17, 3	13, 11, 7, 5, 2
19, 13, 7	17, 11, 5, 3, 2