I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Petr řekl Pavlovi: „Napiš dvojmístné přirozené číslo, které má tu vlastnost, že když od něj odečteš totéž† dvojmístné přirozené číslo akorát napsané obráceně, dostaneš rozdíl 63.“

Které číslo mohl Pavel napsat? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je rozdíl číslic Pavlova čísla?

Možné řešení. Úlohu můžeme řešit jako algebrogram

$$\begin{array}{r} a\ b \\ -\ b\ a \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Protože rozdíl je kladný, musí být $a > b$. Protože navíc v rozdílu na místě jednotek je 3, musí se počítat s přechodem přes desítku. Protože v rozdílu na místě desítek je 6, musí být $a - b = 7$. Protože dále obě čísla jsou dvojmístná, musí být $b > 0$. Celkem tak dostáváme dvě možnosti:

$$\begin{array}{r} 8\ 1 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline 6\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\ 2 \\ -\ 2\ 9 \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Číslo, které mohl Pavel napsat, bylo 81 nebo 92.

Poznámka. Dvojmístné číslo zapsané $\overline{ab}$ lze vyjádřit jako $10a+b$. Předchozí zápis je proto ekvivalentní s rovností

$$(10a + b) - (10b + a) = 63,$$

což po úpravě vede k $a - b = 7$.

Z7–I–2

Jsou dány dvě dvojice rovnoběžných přímek $AB \parallel CD$ a $AC \parallel BD$. Bod E leží na přímce BD, bod F je středem úsečky BD, bod G je středem úsečky CD a obsah trojúhelníku ACE je $20\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah trojúhelníku DFG. (*V. Semeráková*)

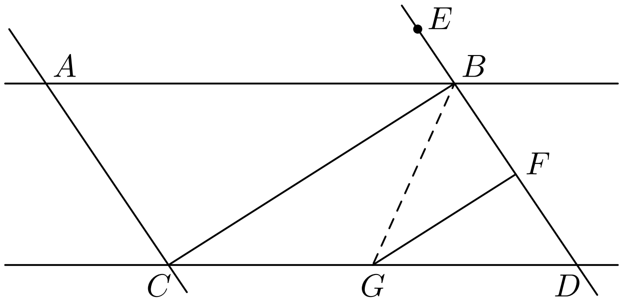
Nápověda. Porovnejte obsahy trojúhelníků ACE a ABC.

Možné řešení. Obsah trojúhelníku závisí na délce jeho strany a velikosti výšky na tuto stranu. Protože přímky AC a BD jsou rovnoběžné a bod E leží na přímce BD, obsah trojúhelníku ACE je stále stejný pro jakkoli zvolený bod E. Zejména, obsah trojúhelníku ACE je stejný jako obsah trojúhelníku ACD. Ze stejného důvodu je také obsah trojúhelníku ACD stejný jako obsah trojúhelníku BCD. Celkem tedy

$$S_{ACE} = S_{ACD} = S_{BCD} = 20\,\mathrm{cm}^2.$$

† V původně zveřejněném zadání chybělo upřesnění, že má Pavel pracovat s jedním dvojmístným číslem. Řešitele na tuto opravu upozorněte.

Nyní porovnáme obsahy trojúhelníků BCD a DFG:



Trojúhelníky DFG a FBG mají společnou výšku z vrcholu G a bod F je v polovině strany BD, proto mají tyto trojúhelníky stejný obsah. Trojúhelníky DFG a FBG dohromady tvoří trojúhelník DBG, a proto platí $S_{DFG} = \frac{1}{2} S_{DBG}$. Z obdobného důvodu také platí $S_{DBG} = \frac{1}{2} S_{DBC}$. Celkem tedy platí

$$S_{DFG} = \frac{1}{4} S_{DBC} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Předchozí vyjádření poměru obsahů trojúhelníků DFG a DBC skrytě odkazuje na jejich podobnost, čehož lze ve zdůvodnění také použít (FG je střední příčkou trojúhelníku DBC, proto jsou všechny odpovídající si strany úměrné v poměru $1 : 2$). Bez odkazu na pojem podobnosti je možné přímo porovnat např. základny DF a DB a odpovídající výšky (oboje v poměru $1 : 2$). Takto lze uvažovat i pro trojúhelníky DFG a ACE s libovolným $E \in BD$ (tj. bez výše použitých transformací).

Z7–I–3

Zoologická zahrada nabízela školním skupinám výhodné vstupné: každý pátý žák dostává vstupenku zdarma. Pan učitel 6.A spočítal, že pokud koupí vstupné dětem ze své třídy, ušetří za čtyři vstupenky a zaplatí 1 995 Kč. Paní učitelka 6.B mu navrhla, ať koupí vstupenky dětem obou tříd naráz, a tak budou platit 4 410 Kč.

Kolik dětí z 6.A a kolik dětí z 6.B šlo do zoo? (Cena vstupenky v Kč je celočíselná.)

(*L. Šimůnek*)

Nápověda. O kolik vstupenek je třeba žádat, aby byly právě čtyři z nich zdarma?

Možné řešení. Jestli by se při koupi vstupného pro děti z 6.A díky zmíněné výhodě ušetřilo za 4 vstupenky, muselo jít do zoo alespoň $4 \cdot 5 = 20$, avšak méně než $5 \cdot 5 = 25$ dětí z této třídy. Při počtu dětí od 20 do 24 by se muselo zaplatit vždy o 4 vstupenky méně, tedy 16 až 20. Zaplacená částka je dělitelná 19, nikoli však 16, 17, 18 či 20 (viz prvočíselný rozklad $1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$). Pro děti z 6.A by tedy bylo potřeba zaplatit 19 vstupenek a každá by tak stála $1\,995 : 19 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ Kč. Počet dětí z 6.A byl o 4 větší, tedy $19 + 4 = 23$.

Při společné koupi vstupného pro děti z obou tříd by se uhradilo 4 410 Kč, tedy zaplacených vstupenek by bylo $4\,410 : 105 = 42$. V rámci výhody byla každá čtveřice zaplacených vstupenek doplněna o jednu vstupenku zdarma, tedy při zaplacení 42 vstupenek $(10 \cdot 4 + 2)$ by jich dostali 52 $(10 \cdot 5 + 2)$. Počet dětí z 6.B byl $52 - 23 = 29$.

Do zoo šlo 23 dětí z 6.A a 29 dětí z 6.B.

Z7–I–4

Na stole leželo šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Anežka z těchto kartiček složila šestimístné číslo, které bylo dělitelné šesti. Pak postupně odebírala kartičky zprava. Když odebrala první kartičku, zůstalo na stole pětimístné číslo dělitelné pěti. Když odebrala další kartičku, zůstalo čtyřmístné číslo dělitelné čtyřmi. Když odebírala dále, získala postupně trojmístné číslo dělitelné třemi a dvojmístné číslo dělitelné dvěma.

Které šestimístné číslo mohla Anežka původně složit? Určete všechny možnosti.

(*L. Růžičková*)

Nápověda. Co můžete říct o jednotlivých číslicích hledaného čísla?

Možné řešení. Hledané šestimístné číslo označíme $\overline{abcdef}$. Ze zadání postupně odvodíme několik poznatků o tomto čísle:

1. Celé šestimístné číslo je dělitelné šesti, tedy je dělitelné zároveň dvěma a třemi. Dělitelnost třemi je zaručena tím, že ciferný součet je (až na pořadí sčítanců) roven $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, což je číslo dělitelné třemi. Dělitelnost dvěma znamená, že f je některá z číslic 2, 4, 6.
2. Pětimístné číslo $\overline{abcde}$ je dělitelné pěti, proto $e = 5$.
3. Čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ je dělitelné čtyřmi, proto i číslo $\overline{cd}$ je dělitelné čtyřmi. Zejména d je některá z číslic 2, 4, 6.
4. Trojmístné číslo $\overline{abc}$ je dělitelné třemi, proto ciferný součet $a+b+c$ je dělitelný třemi.
5. Dvojmístné číslo $\overline{ab}$ je dělitelné dvěma, proto b je některá z číslic 2, 4, 6.

Jednoznačně je určeno $e = 5$ a číslice b, d, f jsou v nějakém pořadí 2, 4, 6. Na číslice a a c tedy zbývá 1 a 3. Ze třetí podmínky pak plyne, že dvojmístné číslo $\overline{cd}$ může být některé z čísel

$$12, \quad 16, \quad 32, \quad 36.$$

Pro každou z těchto možností je a určeno jednoznačně: v prvních dvou případech je $a = 3$, ve zbylých dvou případech je $a = 1$, součet $a + c$ je však vždy roven 4. Aby byla splněna také čtvrtá podmínka, musí být $b = 2$. Zbývají tedy pouze dvě možnosti: Anežka mohla složit 321654 nebo 123654.

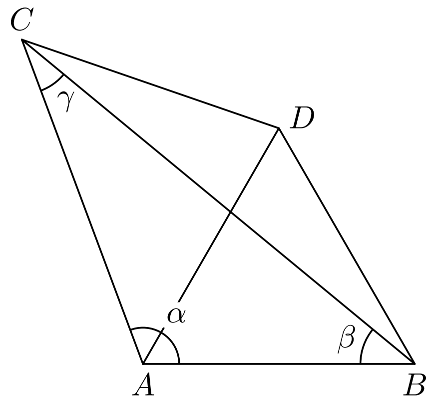
Z7–I–5

Prokop sestrojil trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhel u vrcholu A byl větší než 60° a vnitřní úhel u vrcholu B byl menší než 60°. Jirka narýsoval v polorovině vymezené přímkou AB a bodem C bod D, a to tak, že trojúhelník ABD byl rovnostranný. Poté chlapci zjistili, že trojúhelníky ACD a BCD jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem D.

Určete velikost úhlu ACB. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Najděte vztahy mezi vnitřními úhly zmiňovaných trojúhelníků.

Možné řešení. Velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC označíme postupně α, β, γ. V rovnostranném trojúhelníku ABD mají všechny vnitřní úhly velikost 60°.



Shodné úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku BCD mají velikost

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD| - |\sphericalangle ABC| = 60^\circ - \beta.$$

Shodné úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku ACD mají velikost

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle DAB| = \alpha - 60^\circ.$$

Velikost neznámého úhlu ACB můžeme vyjádřit jako

$$\gamma = |\sphericalangle ACD| - |\sphericalangle BCD| = (\alpha - 60^\circ) - (60^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 120^\circ.$$

Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC je 180°, tedy

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta - 120^\circ) = 180^\circ,$$

z čehož plyne $\alpha + \beta = 150^\circ$. Úhel ACB má velikost $\gamma = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$.

Poznámka. Zadaným podmínkám odpovídá nekonečně mnoho situací; γ je vždy 30°, zbylých 150° může být mezi α a β rozděleno libovolně.

Všechny body A, B, C leží na jedné kružnici se středem v bodě D. V takových případech obecně platí, že velikost úhlu ACB je polovinou úhlu ADB (viz větu o obvodovém a středovém úhlu).

Z7–I–6

Vodník Chaluha naléval mlhu do rozmanitých, různě velkých nádob, které si pečlivě seřadil na polici. Při nalévání postupoval postupně z jedné strany, žádnou nádobu nepřeskakoval. Do každé nádoby se vejde alespoň decilitr mlhy.

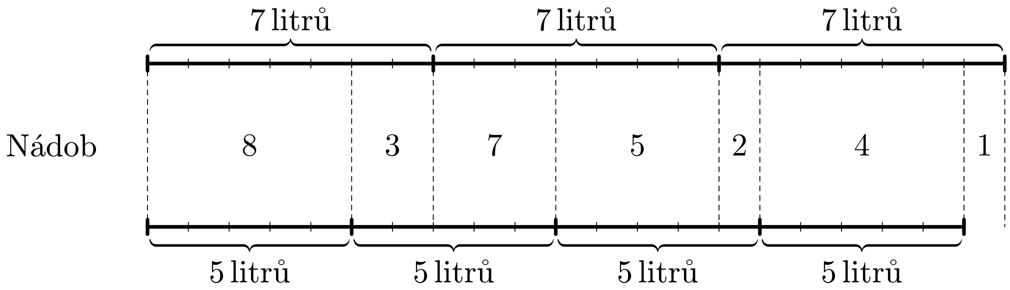
Kdyby naléval mlhu sedmilitrovou odměrkou, mlha z první odměrky by naplnila přesně 11 nádob, mlha z druhé odměrky by naplnila přesně dalších 12 nádob a mlha z třetí odměrky by naplnila přesně 7 nádob. Pokud by použil pětilitrovou odměrku, pak mlha z první odměrky by naplnila přesně 8 nádob, ze druhé přesně 10 nádob, ze třetí přesně 7 nádob a ze čtvrté odměrky přesně 4 nádoby.

Rozhodněte, zda je třicátá nádoba v pořadí větší než pětadvacátá. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Jaký objem měla třicátá nádoba?

Možné řešení. Se třemi sedmilitrovými odměrkami by vodník rozlil 21 litrů mlhy do $11 + 12 + 7 = 30$ nádob. Se čtyřmi pětilitrovými odměrkami by rozlil 20 litrů mlhy do $8 + 10 + 7 + 4 = 29$ nádob. Poslední, třicátá nádoba tedy měla objem 1 litr.

Mlha z první sedmilitrové odměrky by naplnila přesně 11 nádob, přitom prvních pět litrů by naplnilo přesně 8 nádob (první pětilitrová odměrka) a zbylé dva litry přesně 3 nádoby ($11 - 8 = 3$). Tato část také odpovídá prvním dvěma litrům z druhé pětilitrové odměrky. Ta by však vystačila na 10 nádob, tedy zbylé tři litry by naplnily přesně 7 nádob ($10 - 3 = 7$). Obdobně můžeme doplnit další podrobnosti o skupinách nádob a jejich objemech, které schematicky znázorníme takto:



Nádoby 1 až 8 pojmou dohromady přesně 5 litrů, nádoby 9 až 11 pojmou dohromady 2 litry, nádoby 12 až 18 pojmou 3 litry, nádoby 19 až 23 pojmou 4 litry, nádoby 24 až 25 pojmou 1 litr atd.

Poslední dvě zmiňované nádoby pojmou dohromady totéž co samotná třicátá nádoba, proto má třicátá nádoba větší objem než pětadvacátá.