I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Věkový průměr všech lidí, kteří se sešli na rodinné oslavě, byl roven počtu přítomných. Teta Běta, které bylo 29 let, se záhy omluvila a odešla. I po odchodu tety Běty byl věkový průměr všech přítomných lidí roven jejich počtu.

Kolik lidí bylo původně na oslavě? (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je vztah mezi počtem přítomných a součtem jejich věků?

Možné řešení. Věkový průměr všech lidí, kteří se sešli na oslavě, je roven podílu součtu věků všech přítomných (ozn. s) a jejich počtu (ozn. n). Podle zadání platí

$$\frac{s}{n} = n \quad \text{neboli} \quad s = n^2.$$

Po odchodu tety Běty se počet přítomných zmenšil o 1 a součet jejich věků o 29. Podle zadání platí

$$\frac{s-29}{n-1} = n-1 \quad \text{neboli} \quad s-29 = (n-1)^2.$$

Když do poslední rovnice dosadíme $s = n^2$, roznásobíme pravou stranu a dále upravíme, dostaneme:

$$\begin{aligned} n^2 - 29 &= n^2 - 2n + 1,\\ 2n &= 30,\\ n &= 15. \end{aligned}$$

Na rodinou oslavu se původně dostavilo 15 lidí.

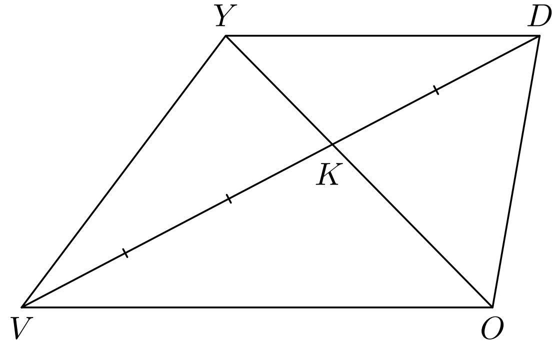
Z9–I–2

V lichoběžníku $VODY$ platí, že VO je delší základnou, průsečík úhlopříček K dělí úsečku VD v poměru $3:2$ a obsah trojúhelníku KOV je roven $13{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah celého lichoběžníku. (*M. Petrová*)

Nápověda. Co umíte říct o dalších trojúhelnících obsažených v lichoběžníku?

Možné řešení. Protože VO je delší základnou lichoběžníku $VODY$, bod K na úhlopříčce VD je blíže vrcholu D.



Trojúhelníky KOV a KDO mají společnou výšku z vrcholu O a délky stran VK a KD příslušných k této výšce jsou v poměru 3 : 2. Proto také obsahy těchto trojúhelníků jsou ve stejném poměru, tedy

$$S_{KDO} = \frac{2}{3} S_{KOV}.$$

Trojúhelníky VOD a VOY mají společnou stranu VO a stejnou výšku na tuto stranu, proto mají stejné obsahy. Trojúhelník KOV je částí obou těchto trojúhelníků, proto mají stejné obsahy také trojúhelníky KDO a KYV,

$$S_{KYV} = S_{KDO} = \frac{2}{3} S_{KOV}.$$

Trojúhelníky KYV a KDY mají společnou výšku z vrcholu Y a odpovídající strany VK a KD jsou v poměru 3 : 2. Proto také obsahy těchto trojúhelníků jsou ve stejném poměru,

$$S_{KDY} = \frac{2}{3} S_{KYV} = \frac{4}{9} S_{KOV}.$$

Obsah celého lichoběžníku je součtem obsahů uvedených čtyř trojúhelníků, tedy

$$\begin{aligned} S_{VODY} &= S_{KOV} + S_{KDO} + S_{KYV} + S_{KDY} = \\ &= \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) S_{KOV} = \frac{25}{9} \cdot 13{,}5 = 37{,}5\,(\mathrm{cm}^2). \end{aligned}$$

Poznámka. Při postupném vyčíslování obsahů výše jmenovaných trojúhelníků dostáváme

$$S_{KDO} = S_{KYV} = 9\,\mathrm{cm}^2, \quad S_{KDY} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$

Rovnost $S_{KYV} = \frac{2}{3} S_{KOV}$, resp. $S_{KDY} = \frac{4}{9} S_{KOV}$ lze zdůvodnit přímo pomocí podobnosti trojúhelníků KOV a KYD (koeficient podobnosti je 3 : 2).

Z9–I–3

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej sám rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno.

V 7:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 70 kafemlýnků.

Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně ve 22:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 36 kafemlýnků.

Za jak dlouho by složili 360 kafemlýnků, pokud by Robert i Hubert skládali společně?

(*K. Pazourek*)

Nápověda. Kolik kafemlýnků přibude za hodinu v každé ze směn?

Možné řešení. V dopolední pětihodinové směně přibylo 70 kafemlýnků, což odpovídá $70 : 5 = 14$ kafemlýnkům za hodinu. V odpolední devítihodinové směně přibylo 36 kafemlýnků, což odpovídá $36 : 9 = 4$ kafemlýnkům za hodinu. Pokud by roboti pracovali jednu hodinu dopoledním způsobem a jednu hodinu odpoledním způsobem, vyrobili by $14 + 4 = 18$ kafemlýnků a přitom by vyrobili stejné množství kafemlýnků, jako kdyby společně skládali (a nic nerozebírali) $\frac{3}{4}$ hodiny. Roboti by společně složili 360 kafemlýnků za $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ hodin, neboť $360 = 18 \cdot 20$.

Jiné řešení. Pokud h značí počet kafemlýnků, které složí Hubert za hodinu, a r počet kafemlýnků, které za hodinu složí Robert, potom za hodinu rozloží Hubert $\frac{1}{4}h$ kafemlýnků a Robert $\frac{1}{4}r$ kafemlýnků. Informace ze zadání vedou k soustavě dvou rovnic:

$$5\left(h - \frac{1}{4}r\right) = 70,$$
$$9\left(r - \frac{1}{4}h\right) = 36.$$

Řešením této soustavy obdržíme $r = 8$ a $h = 16$. Za hodinu by tedy oba roboti společně složili $r + h = 24$ kafemlýnků. Tudíž 360 kafemlýnků by společně skládali $360 : 24 = 15$ hodin.

Z9–I–4

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 se chystala na cestu vlakem se třemi vagóny. Chtěla se rozsadit tak, aby v každém vagóně seděla tři čísla a největší z každé trojice bylo rovno součtu zbylých dvou. Průvodčí tvrdil, že to není problém, a snažil se číslům pomoct. Naopak výpravčí tvrdil, že to není možné.

Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. (*E. Novotná*)

Nápověda. Uvažte paritu (sudost, lichost) čísel a jejich součtů.

Možné řešení. Pokud by se čísla dala rozsadit do vagónů podle jejich přání, potom by součet tří největších čísel z každého vagónu byl stejný jako součet zbylých šesti čísel. To by znamenalo, že součet všech devíti čísel by byl sudý. Avšak tento součet je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

což je liché číslo. Proto čísla požadovaným způsobem rozsadit nelze, pravdu měl výpravčí.

Jiné řešení. Mezi čísly 1 až 9 je pět lichých (L) a čtyři sudé (S). Sudé číslo lze vyjádřit jako součet dvou lichých čísel nebo jako součet dvou sudých čísel. Liché číslo lze vyjádřit jedině jako součet lichého a sudého čísla. V každém vagóně tedy mohou podle uvedených požadavků sedět pouze následující skupiny čísel:

$$\text{buď } \{L, L, S\}, \text{ nebo } \{S, S, S\}.$$

Jakýmkoli přiřazením těchto možností do tří vagónů dostaneme vždy celkem sudý počet lichých čísel a lichý počet sudých čísel. V našem případě je tomu však naopak, proto nelze čísla rozsadit podle jejich přání. Pravdu měl tudíž výpravčí.

Poznámka. Při jakémkoli rozmístění pěti lichých čísel do tří vagónů bude vždy v některém vagóně právě jedno nebo právě tři lichá čísla. A právě v takovém vagóně nebude platit požadavek o součtu.

Jiná nápověda. Která čísla mohla cestovat s číslem 9?

Jiné řešení. Můžeme postupně po vagónech rozsazovat čísla od největšího tak, aby platil požadavek o jejich součtu. Číslo 9 může cestovat s některou z následujících dvojic:

- 8 a 1: v dalším vagóně může 7 cestovat s některou z následujících dvojic:
  - ▷ 5 a 2: na další vagón zbývá 6, 4 a 3, ale $6 \neq 4 + 3$,
  - ▷ 4 a 3: na další vagón zbývá 6, 5 a 2, ale $6 \neq 5 + 2$,
- 7 a 2: v dalším vagóně může 8 cestovat jedině s dvojicí
  - ▷ 5 a 3: na další vagón zbývá 6, 4 a 1, ale $6 \neq 4 + 1$,
- 6 a 3: v dalším vagóně může 8 cestovat jedině s dvojicí
  - ▷ 7 a 1: na další vagón zbývá 5, 4 a 2, ale $5 \neq 4 + 2$,
- 5 a 4: v dalším vagóně může 8 cestovat s některou z následujících dvojic:
  - ▷ 7 a 1: na další vagón zbývá 6, 3 a 2, ale $6 \neq 3 + 2$,
  - ▷ 6 a 2: na další vagón zbývá 7, 3 a 1, ale $7 \neq 3 + 1$.

Zjistili jsme, že čísla nelze rozsadit tak, aby požadavek o součtu platil ve všech vagónech. Pravdu měl tudíž výpravčí.

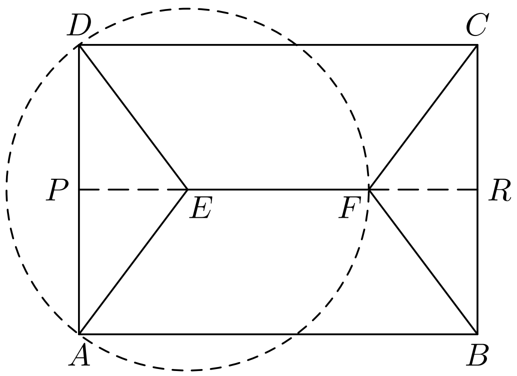
Z9–I–5

Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body E a F tak, že úsečky EA, ED, EF, FB, FC jsou navzájem shodné. Strana AB je dlouhá 22 cm a kružnice opsaná trojúhelníku AFD má poloměr 10 cm.

Určete délku strany BC. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Kde leží střed kružnice opsané trojúhelníku AFD?

Možné řešení. Bod E je stejně daleko od bodů A a D, bod F je stejně daleko od bodů B a C a úsečky AD a BC jsou protějšími stranami obdélníku. Proto body E a F leží na společné ose úseček AD a BC. Bod E má stejnou vzdálenost od všech vrcholů trojúhelníku AFD, proto je středem jemu opsané kružnice. Znázornění bodů ze zadání vypadá následovně (body P a R jsou průsečíky osy EF se stranami AD a BC, tj. středy těchto stran):



Trojúhelníky APE, DPE, BRF a CRF jsou navzájem shodné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž jedna odvěsna je polovinou hledané strany obdélníku a velikosti zbylých dvou stran umíme odvodit ze zadání. Např. v trojúhelníku APE má přepona AE velikost 10 cm a odvěsna PE má velikost $(22 - 10) : 2 = 6$ cm. Podle Pythagorovy věty platí

$$|PA|^2 + 6^2 = 10^2,$$

tedy $|PA|^2 = 64$ a $|PA| = 8$ cm. Délka strany BC je 16 cm.

Poznámka. Na uvedeném obrázku mlčky naznačujeme, že strana AB je delší než BC. To je sice potvrzeno následujícím výpočtem, ale lze si toho všimnout přímo: Přepona AE v pravoúhlém trojúhelníku APE je delší než odvěsna PA, což je polovina strany BC. Pokud by strana BC byla delší než strana AB, byla by úsečka AE také delší než polovina strany AB. Z předchozího však víme, že $|AE| = 10\,\mathrm{cm}$ a $\frac{1}{2}|AB| = 11\,\mathrm{cm}$, takže tato situace nastat nemůže.

Z9–I–6

Na přímce představující číselnou osu uvažte navzájem různé body odpovídající číslům a, $2a$, $3a + 1$ ve všech možných pořadích. U každé možnosti rozhodněte, zda je takové uspořádání možné. Pokud ano, uveďte konkrétní příklad, pokud ne, zdůvodněte proč.

(*M. Petrová*)

Nápověda. Co můžete říct o uspořádání trojice čísel a, $2a$, $3a$?

Možné řešení. Před vlastním rozborem možností si všimneme několika užitečných faktů. Protože čísla mají být navzájem různá, musí být $a \neq 0$. Vzdálenosti mezi sousedními čísly ve čtveřici 0, a, $2a$, $3a$ jsou stejné, a to $|a|$, přitom uspořádání této čtveřice závisí na znaménku a: číslo a je kladné, právě když platí

$$0 < a < 2a < 3a, \tag{1}$$

číslo a je záporné, právě když platí

$$3a < 2a < a < 0. \tag{2}$$

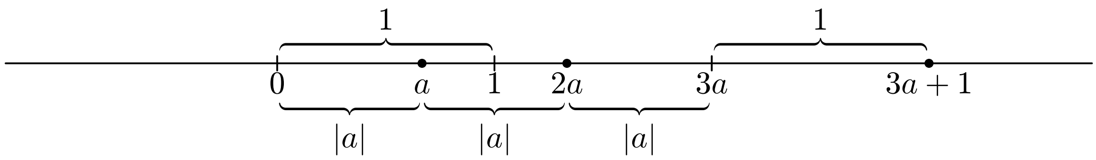
Bez ohledu na znaménko a dále platí

$$3a < 3a + 1. \tag{3}$$

Všechna možná uspořádání tří navzájem různých čísel jsou tato:

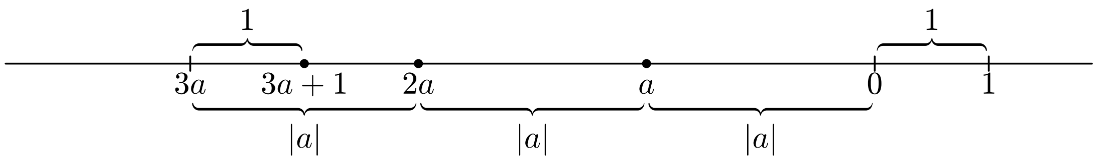
a) $a < 2a < 3a + 1$,
b) $a < 3a + 1 < 2a$,
c) $3a + 1 < a < 2a$,
d) $3a + 1 < 2a < a$,
e) $2a < 3a + 1 < a$,
f) $2a < a < 3a + 1$.

Pro kladné a podle podmínek (1) a (3) platí $a < 2a < 3a+1$, což odpovídá možnosti a) a současně vylučuje možnosti b) a c). Obecný vztah mezi trojicí čísel vyhovující možnosti a) a jejím ukotvením na číselné ose (tj. čísly 0 a 1) je schematicky znázorněn na následujícím obrázku. Konkrétní příklad uspořádání a) je dán dosazením např. $a = \frac{2}{3}$, tedy $\frac{2}{3} < \frac{4}{3} < 3$.

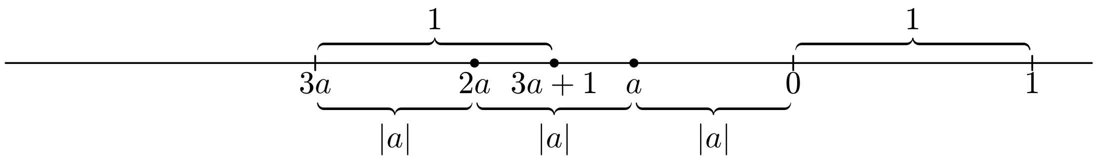


Pro záporné a nemůžeme z podmínek (2) a (3) o vztahu $3a+1$ vzhledem k a a $2a$ říct nic bližšího. Postupně ukážeme, že každý ze zbývajících případů je možný:

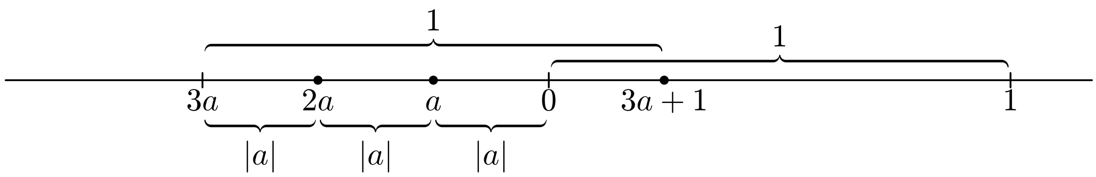
Obecné vztahy mezi trojicemi čísel vyhovujících možnostem d), e), resp. f) a čísly 0 a 1 jsou schematicky znázorněny na následujících obrázcích. Konkrétní příklad uspořádání d) je dán dosazením např. $a = -2$, tedy $-5 < -4 < -2$.



Konkrétní příklad uspořádání e) je dán dosazením např. $a = -\frac{2}{3}$, tedy $-\frac{4}{3} < -1 < -\frac{2}{3}$.



Konkrétní příklad uspořádání f) je dán dosazením např. $a = -\frac{1}{4}$, tedy $-\frac{1}{8} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4}$.



Poznámka. V případech e) a f) můžeme volit trojice bodů představujících čísla a, $2a$ a $3a+1$ naprosto libovolně; naznačeným způsobem odvodíme umístění 0 a 1, a tím vlastně určíme hodnotu a. V případech a) a d) tomu tak není; např. pro uspořádání d) a bod $3a+1$ zvolený příliš vlevo od bodu $2a$ se může stát, že $3a$ vyjde někde mezi, což by bylo v rozporu s podmínkou (3).

Jiná nápověda. Pro jednotlivá uspořádání odvoďte možné hodnoty a.

Jiné řešení. Všechna možná uspořádání tří navzájem různých čísel jsou uvedena v seznamu a) až f) v předchozím řešení. Řešením nerovností v jednotlivých případech zjišťujeme, že případ

a) je splněn pro libovolné $a > 0$,
b) není splněn pro žádné a,
c) není splněn pro žádné a,
d) je splněn pro libovolné $a < -1$,
e) je splněn pro libovolné $-1 < a < -\frac{1}{2}$,
f) je splněn pro libovolné $-\frac{1}{2} < a < 0$.

Pro příklad uvádíme podrobnosti k případu b): odpovídající nerovnosti jsou splněny, právě když platí

$$a < 3a+1 \quad \text{a} \quad 3a+1 < 2a,$$

což je ekvivalentní s dvojicí nerovností

$$-\frac{1}{2} < a \quad \text{a} \quad a < -1.$$

Tyto dvě podmínky současně nesplňuje žádné reálné číslo, proto případ b) nastat nemůže.

Diskuse v ostatní případech je obdobná. Ve všech případech, které mají řešení, stačí pro konkrétní odpověď zvolit libovolné a s vymezeného intervalu.