I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Ferda a David se denně potkávají ve výtahu. Jednou ráno zjistili, že když vynásobí své současné věky, dostanou 238. Kdyby totéž provedli za čtyři roky, byl by tento součin 378.

Určete součet současných věků Ferdy a Davida. (*M. Petrová*)

Nápověda. Může být Ferdovi (či Davidovi) 8, 15 nebo 47 let?

Možné řešení. Číslo 238 lze rozložit na součin dvou čísel následujícími způsoby:

$$238 = 1 \cdot 238 = 2 \cdot 119 = 7 \cdot 34 = 14 \cdot 17.$$

Mezi těmito dvojicemi jsou současné věky Ferdy a Davida. Po přičtení 4 ke každému z nich máme dostat součin 378. Proberme všechny možnosti:

$$\begin{aligned}(1+4)\cdot(238+4) &= 1210,\\ (2+4)\cdot(119+4) &= 738,\\ (7+4)\cdot(34+4) &= 418,\\ (14+4)\cdot(17+4) &= 378.\end{aligned}$$

Jediná vyhovující možnost je ta poslední — jednomu z chlapců je 14 let, druhému 17. Součet současných věků Ferdy a Davida je 31 let.

Poznámka. Alternativně lze vyhovující dvojici nalézt pomocí rozkladů 378, které jsou:

$$378 = 1 \cdot 378 = 2 \cdot 189 = 3 \cdot 126 = 6 \cdot 63 = 7 \cdot 54 = 9 \cdot 42 = 14 \cdot 27 = 18 \cdot 21.$$

Jediné dvojice v rozkladech 238 a 378, v nichž jsou oba činitelé druhého rozkladu o 4 vetší než u prvního, jsou 14 a 17, resp. 18 a 21.

Extrémní hodnoty v uvedených rozkladech lze vyloučit jako nereálné. Pokud řešitel s odkazem na tuto skutečnost neprobere všechny možnosti, považujte jeho postup za správný.

Jiné řešení. Pokud současný věk Ferdy označíme f a současný věk Davida označíme d, potom informace ze zadání znamenají

$$f \cdot d = 238 \quad \text{a} \quad (f+4)\cdot(d+4) = 378.$$

Po roznásobení levé strany v druhé podmínce a dosazením první podmínky dostáváme:

$$\begin{aligned}238 + 4f + 4d + 16 &= 378,\\ 4(f+d) &= 124,\\ f+d &= 31.\end{aligned}$$

Součet současných věků Ferdy a Davida je 31 let.

Z8–I–2

Do třídy přibyl nový žák, o kterém se vědělo, že kromě angličtiny umí výborně ještě jeden cizí jazyk. Tři spolužáci se dohadovali, který jazyk to je.

První soudil: „Francouzština to není.“

Druhý hádal: „Je to španělština nebo němčina.“

Třetí usuzoval: „Je to španělština.“

Záhy se dozvěděli, že alespoň jeden z nich hádal správně a alespoň jeden nesprávně.

Určete, který ze jmenovaných jazyků nový žák ovládal. (*M. Volfová*)

Nápověda. Zabývejte se každým jazykem zvlášť.

Možné řešení. Kdyby oním jazykem, který nový žák ovládal, byla francouzština, potom by všichni tři spolužáci hádali nesprávně.

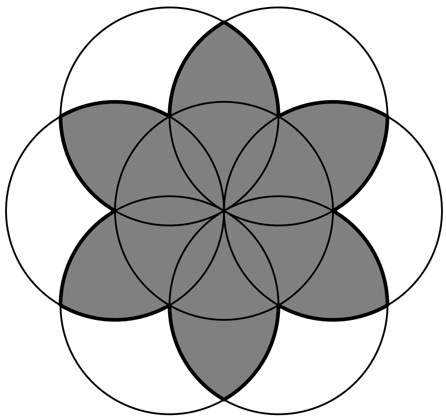
Kdyby oním jazykem byla španělština, potom by všichni tři spolužáci hádali správně.

Kdyby oním jazykem byla němčina, potom by první dva spolužáci hádali správně a třetí nesprávně. Toto je jediný případ, kdy aspoň jeden spolužák hádá správně a aspoň jeden nesprávně. Nový žák proto ovládá němčinu.

Z8–I–3

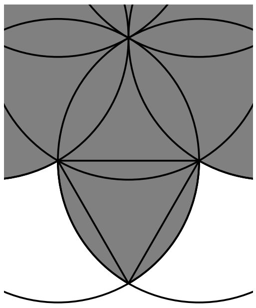
Petr narýsoval pravidelný šestiúhelník, jehož vrcholy ležely na kružnici délky 16 cm. Potom z každého vrcholu tohoto šestiúhelníku narýsoval kružnici, která procházela dvěma sousedními vrcholy. Vznikl tak útvar jako na následujícím obrázku.

Určete obvod vyznačeného kvítku. (*E. Novotná*)



Nápověda. Hledejte (a zdůvodněte) navzájem shodné části obrázku.

Možné řešení. Všechny kružnice na předchozím obrázku jsou navzájem shodné. Proto také vyznačené úsečky na následujícím obrázku jsou navzájem shodné a stejně tak jim odpovídající oblouky.



Dva oblouky tvořící okraj každého lupene mají dvojnásobnou délku jako příslušný oblouk původní kružnice, nad kterým byl vytvořen. Obvod kvítku je proto dvojnásobkem délky původní kružnice, tj. 32 cm.

Z8–I–4

Na čtyřech kartičkách byly čtyři různé číslice, z nichž jedna byla nula. Vojta z kartiček složil co největší čtyřmístné číslo, Martin pak co nejmenší čtyřmístné číslo. Adam zapsal na tabuli rozdíl Vojtova a Martinova čísla.

Potom Vojta z kartiček složil co největší trojmístné číslo a Martin co nejmenší trojmístné číslo. Adam opět zapsal na tabuli rozdíl Vojtova a Martinova čísla. Pak Vojta s Martinem obdobně složili dvojmístná čísla a Adam zapsal na tabuli jejich rozdíl. Nakonec Vojta vybral co největší jednomístné číslo a Martin co nejmenší nenulové jednomístné číslo a Adam zapsal jejich rozdíl.

Když Adam sečetl všechny čtyři rozdíly na tabuli, vyšlo mu 9090. Určete čtyři číslice na kartičkách. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Vyjádřete výsledek obecně pomocí neznámých číslic na kartičkách.

Možné řešení. Označme tři nenulové číslice na kartičkách a, b, c a předpokládejme, že platí $a < b < c$. Vojtova čísla postupně byla $\overline{cba0}$, $\overline{cba}$, $\overline{cb}$ a c, Martinova čísla byla $\overline{a0bc}$, $\overline{a0b}$, $\overline{a0}$ a a. Adamův součet rozdílů dvojic těchto čísel lze v rozvinutém tvaru, po úpravě, vyjádřit jako $1110c + 100b - 1100a$. Podle zadání je tento součet roven 9090, což je ekvivalentní rovnici

$$111c + 10b - 110a = 909, \tag{1}$$

kde $0 < a < b < c < 10$. Protože na místě jednotek přispívá pouze první sčítanec, musí být $c = 9$. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$11a - b = 9,$$

kde $0 < a < b < 9$. Jediným řešením této úlohy je dvojice $a = 1$ a $b = 2$. (Kdyby $a \geqq 2$, muselo by být $b \geqq 13$, což není možné.)

Na kartičkách byly číslice 0, 1, 2 a 9.

Poznámka. Kdybychom se u Adamova součtu soustředili na hodnoty na místě jednotek, desítek atd., dostaneme místo rovnice (1) ekvivalentní rovnici

$$100(c - a) + 10(b + c - a) + c = 909.$$

Odtud plyne, že $c = 9$ a dále buď $b + c - a = 0$, $c - a = 9$, nebo $b + c - a = 10$, $c - a = 8$. Protože a a c jsou různá nenulová čísla, je rozdíl $c - a$ různý od c. Proto musí nastat druhá možnost a postupným dosazováním určíme $a = 1$ a $b = 2$.

Z8–I–5

Král dal zedníku Václavovi za úkol postavit zeď silnou 25 cm, dlouhou 50 m a vysokou 2 m. Pokud by Václav pracoval bez přestávky a stejným tempem, postavil by zeď za 26 hodin. Podle platných královských nařízení však musí Václav dodržovat následující podmínky:

- Během práce musí udělat právě šest půlhodinových přestávek.
- Na začátku práce a po každé půlhodinové přestávce, kdy je dostatečně odpočatý, může pracovat o čtvrtinu rychleji než normálním tempem, ale ne déle než jednu hodinu.
- Mezi přestávkami musí pracovat nejméně 3/4 hodiny.

Za jakou nejkratší dobu může Václav splnit zadaný úkol? (*J. Norek*)

Nápověda. Může Václav rozvrhnout přestávky tak, aby plně využil své odpočatosti?

Možné řešení. Václav musí udělat právě šest půlhodinových přestávek. Tím ztratí $6 \cdot 1/2 = 3$ hodiny. Přestávky může rozvrhnout tak, že na začátku práce a po každé přestávce může pracovat celou hodinu zvýšeným tempem (např. při rovnoměrném rozdělení). Tím získá $7 \cdot 1/4$ hodin, tj. 1 hodinu a 45 minut.

Bez přestávek normálním tempem by Václav pracoval 26 hodin. Se všemi povinnými přestávkami a všemi dovolenými zvýšeními tempa by Václav pracoval $26 + 3 - 7/4$ hodin, tj. 27 hodin a 15 minut. To je nejkratší doba, za kterou může svůj úkol splnit.

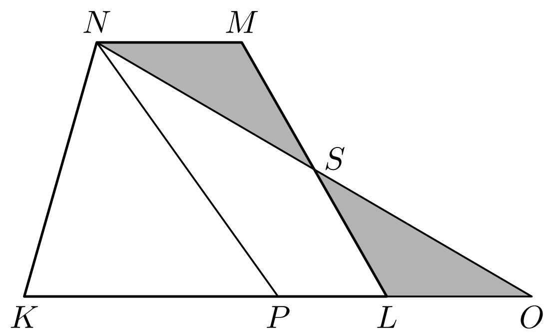
Z8–I–6

V lichoběžníku $KLMN$ má základna KL velikost 40 cm a základna MN má velikost 16 cm. Bod P leží na úsečce KL tak, že úsečka NP rozděluje lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.

Určete velikost úsečky KP. (*L. Hozová*)

Nápověda. Pozměňte útvary tak, aby se vám snáze porovnávaly jejich obsahy.

Možné řešení. Úsečka NP rozděluje lichoběžník $KLMN$ na trojúhelník KPN a lichoběžník $PLMN$. Lichoběžník $KLMN$ má stejný obsah jako trojúhelník KON, kde bod O na přímce KL je obrazem bodu N vzhledem ke středové souměrnosti podle středu úsečky LM. Obdobně, lichoběžník $PLMN$ má stejný obsah jako trojúhelník PON.



Úsečka NP rozděluje lichoběžník $KLMN$ na dvě části se stejným obsahem, právě když P je středem úsečky KO. Vzhledem k tomu, že $|KO| = |KL| + |LO|$ a $|LO| = |MN|$, platí

$$|KP| = \frac{40 + 16}{2} = 28\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. V úvodní části předchozího řešení je naznačeno odvození známého vzorce $S = \frac{1}{2}(a + c)v$ pro obsah lichoběžníku se základnami a a c a výškou v. Dosazením lze požadavek ze zadání vyjádřit pomocí rovnice

$$\frac{x \cdot v}{2} = \frac{(40 + 16 - x)v}{2},$$

kde $x = |KP|$.