I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka.

Určete pořadí a délky skoků všech králíků. (*S. Bednářová*)

Nápověda. Kam doskočila Pečínka?

Možné řešení. Přímo ze zadání známe délku skoku Řízka, a to 2 730 mm. Skoky ostatních králíků odtud dopočítáme, přičemž vše jednotně převádíme na milimetry:

- Pečínka skočila o 1 100 mm méně než Řízek, tj. skočila 1 630 mm,
- Fašírka skočila o 150 mm méně než Pečínka, tj. skočila 1 480 mm,
- Guláš skočil o 200 mm dál než Fašírka, tj. skočil 1 680 mm.

Králíci si v soutěži vyskákali následující pořadí:

1. Řízek, 2. Guláš, 3. Pečínka, 4. Fašírka.

Z6–I–2

Vzal jsem klasickou černobílou šachovnici, která byla tvořena 8×8 čtvercovými políčky se stranami délky 3 cm. Políčka jsem v daném rámci přeskládal tak, že vznikl jeden černý obdélník, jeden černý čtverec a jeden souvislý bílý útvar. Jednotlivá políčka se i po přeskládání dotýkala celými stranami. Černé útvary se nedotýkaly (ani rohem) a každý z nich měl alespoň jednu stranu společnou s okrajem šachovnice.

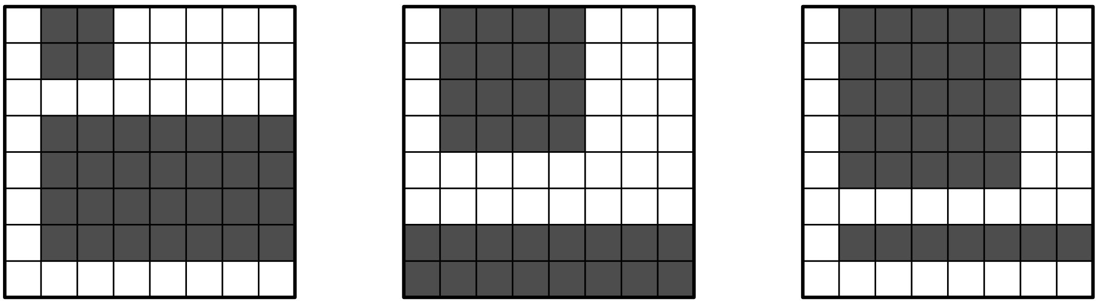
Určete největší možný obvod bílého útvaru a nakreslete, jak by v takovém případě mohl vypadat. (*M. Mach*)

Nápověda. Jaké rozměry mohl mít čtverec?

Možné řešení. Šachovnice má celkem 32 černých (a 32 bílých) políček, což musí být součet políček nově vzniklých černých útvarů. Černý čtverec tedy může mít rozměry nejvýše 5×5 políček. Postupně probereme všechny možnosti podle velikosti černého čtverce, určíme, kolik políček zbývá na černý obdélník a jaké by mohl mít rozměry, a nakonec rozhodneme, zda je možné takové útvary umístit podle uvedených požadavků:

čtverec	na obdélník zbývá	lze umístit
1×1	1×31	NE
2×2	1×28	NE
2×2	2×14	NE
2×2	4×7	ANO
3×3	1×23	NE
4×4	1×16	NE
4×4	2×8	ANO
5×5	1×7	ANO

Všechny případy, které nelze uspokojivě umístit, přesahují některým svým rozměrem daný rámec šachovnice. Ve vyhovujících případech je možné černé útvary umístit např. takto:



U každého případu lze umístění alespoň jednoho z černých útvarů pozměňovat, aniž by došlo k porušení některého z požadavků. Při takových změnách obvod bílého útvaru buď zůstává stejný, nebo se zmenší (pokud se některý z černých útvarů posune do rohu šachovnice).

Obvod bílého útvaru ve výše uvedených případech sestává z 50, 36, resp. 56 stran políček. Největší je tedy ve třetím případě a činí $56 \cdot 3 = 168\,(\mathrm{cm})$.

Z6–I–3

Maminka dala do mísy 56 jahod a 39 malin a zanesla je Emě, která si četla. Ema si čtení zpříjemnila mlsáním, a to tak, že si postupně brala po dvou náhodných kusech ovoce:

- Když vytáhla dvě maliny, vyměnila je u maminky za jednu jahodu a tu vrátila do mísy.
- Když vytáhla dvě jahody, jednu snědla a druhou vrátila do mísy.
- Když vytáhla jednu jahodu a jednu malinu, snědla jahodu a malinu vrátila do mísy.

Takto nějakou chvíli mlsala, až v míse zůstal jediný kus ovoce. Rozhodněte (a vysvětlete), jestli to byla jahoda, nebo malina. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jí Ema všechno ovoce z mísy, nebo je vybíravá?

Možné řešení. Ema se při mlsání důsledně vyhýbala malinám: pokud v jejím výběru byla jedna malina, vracela ji zpět do mísy, pokud vytáhla dvě maliny, vyměnila je za jahodu. Počet malin v míse se tak snižoval výhradně po dvou.

Protože na začátku byl v míse lichý počet malin, zůstával lichý také po každé transakci. Tedy posledním kusem ovoce v míse byla malina.

Poznámka. Na rozdíl od malin se počty jahod v míse měnily po jedné (a mohly se jak snižovat, tak zvyšovat). Parita původního počtu jahod nemá na řešení úlohy vliv.

Z6–I–4

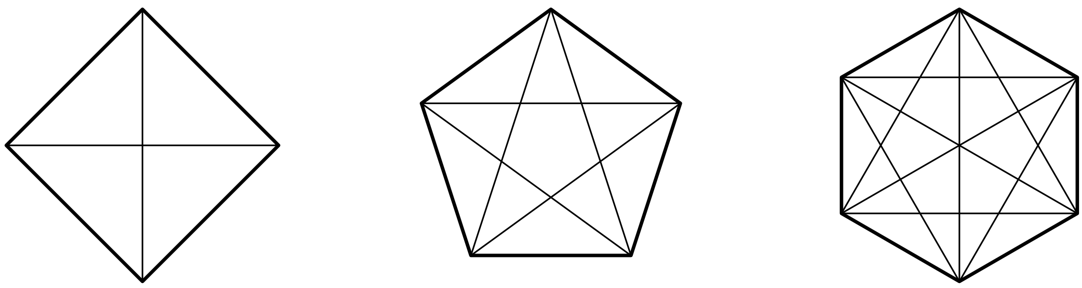
Ctirad naprogramoval dva spolupracující rýsovací roboty Mikyho a Nikyho. Miky umí sestrojovat čtverce, pravidelné pětiúhelníky a pravidelné šestiúhelníky. Během jednoho dne však rýsuje pouze navzájem shodné mnohoúhelníky. Niky do všech Mikyho mnohoúhelníků doplňuje všechny úhlopříčky.

1. V pondělí sestrojil Miky stejný počet úseček jako Niky. Které mnohoúhelníky rýsovali?
2. V úterý sestrojil Miky 18 úseček. Kolik jich sestrojil Niky?
3. Ve středu sestrojili Miky a Niky dohromady 70 úseček. Kolik mnohoúhelníků jim dal Ctirad rýsovat?

(*M. Petrová*)

Nápověda. Kolik úseček sestrojí Miky a Niky u čtverce, pětiúhelníku, resp. šestiúhelníku?

Možné řešení. Čtverec má dvě úhlopříčky, pětiúhelník pět a šestiúhelník devět:



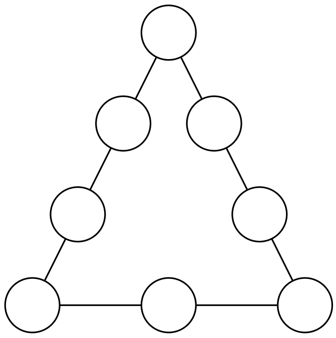
1. Stejný počet stran a úhlopříček má jedině pětiúhelník. V pondělí roboti rýsovali pětiúhelníky.
2. Miky sestrojil 18 stran, tedy nesestrojoval ani čtverce, ani pětiúhelníky (18 není dělitelné ani 4, ani 5), sestrojil tři šestiúhelníky ($18 : 6 = 3$). Ve třech šestiúhelnících je 27 úhlopříček ($3 \cdot 9 = 27$). V úterý Niky sestrojil 27 úseček.
3. Celkový počet úseček u jednoho čtverce je 6, u jednoho pětiúhelníku 10 a u jednoho šestiúhelníku 15. Miky a Niky sestrojili dohromady 70 úseček, tedy nesestrojovali ani čtverce, ani šestiúhelníky (70 není dělitelné ani 6, ani 15), sestrojili 7 pětiúhelníků ($70 : 10 = 7$). Ve středu dostali za úkol narýsovat 7 pětiúhelníků.

Z6–I–5

Petra vepisovala do kroužků čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, že každé bylo použito právě jednou a že součet čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.

Jaký největší součet mohla takto dostat? Uveďte příklad možného vyplnění.

(*A. Bohiniková*)

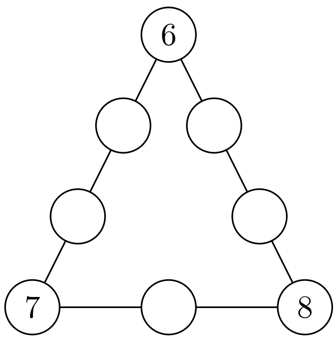


Nápověda. Kam má Petra vepisovat největší čísla?

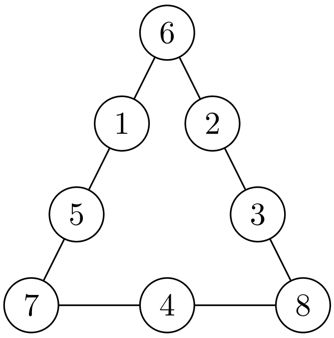
Možné řešení. Čísla ve vrcholech trojúhelníku přispívají do součtů na dvou stranách, zatímco ostatní čísla jenom na jedné. Větší čísla ve vrcholech trojúhelníku proto budou dávat větší součty.

Umístíme trojici největších čísel do vrcholů trojúhelníku a zkusíme doplnit zbylá čísla. Úvodní umístění lze provést celkem šesti způsoby, avšak podstatné je pouze číslo v hlavním (nejvyšším) vrcholu — případná doplnění pro prohozená čísla ve zbylých vrcholech jsou po dvojicích osově souměrná. Postupně probereme všechny možnosti.

- V hlavním vrcholu 6:

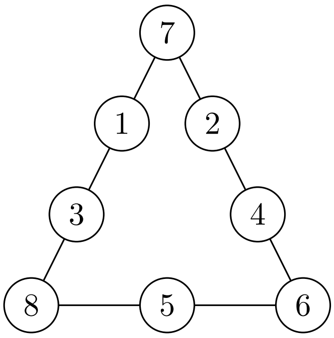


Součet vepsaných čísel na základně trojúhelníku je 15, na levém rameni 13, na pravém rameni 14. Čísla 1, 2, 3, 4, 5 potřebujeme umístit tak, aby kompenzovala rozdíly mezi stávajícími součty na jednotlivých stranách. To je možné udělat např. takto:



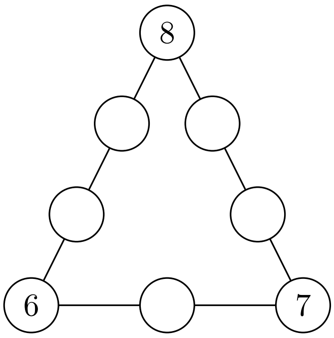
Součet čísel na každé straně je 19.

- V hlavním vrcholu 7: Obdobnou úvahou jako v předchozím případě dostáváme následující řešení:

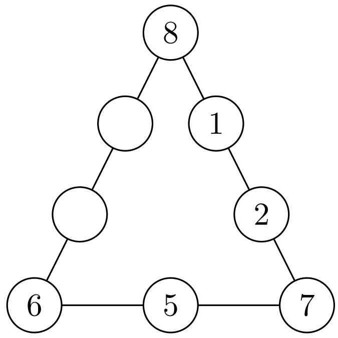


Součet čísel na každé straně je 19.

- V hlavním vrcholu 8:



Součet vepsaných čísel na základně trojúhelníku je 13, na levém rameni 14, na pravém rameni 15. Chybějící číslo na základně tedy má být o 1 větší než součet chybějících čísel na levém rameni a o 2 větší než součet čísel na pravém rameni. Druhý požadavek lze splnit následujícím doplněním, které je jednoznačné až na pořadí nové dvojice čísel na pravém rameni:



Na levé rameno tak zbývá dvojice 3 a 4, která však nevyhovuje prvnímu požadavku. V hlavním vrcholu tedy 8 být nemůže.

Největší možný součet, který lze požadovaným způsobem dostat, je 19. Dva příklady možného vyplnění jsou výše.

Poznámka. Součet daných čísel je $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$. Při umístění čísel 6, 7, 8 do vrcholů trojúhelníku vychází součet součtů čísel na jeho stranách $36+6+7+8 = 57$. Součet čísel na každé straně by tak měl být $57 : 3 = 19$. Tento postřeh nám umožňuje rychle doplnit chybějící číslo na základně trojúhelníku:

- pro 6 v hlavním vrcholu vychází $19 - 7 - 8 = 4$,
- pro 7 v hlavním vrcholu vychází $19 - 6 - 8 = 5$,
- pro 8 v hlavním vrcholu vychází $19 - 6 - 7 = 6$.

V prvních dvou případech se snadno doplní zbylá čísla do prázdných míst. Ve třetím případě doplnění není možné, neboť 6 by byla použita dvakrát.

Z6–I–6

Anička a Maruška mají každá svoje oblíbené přirozené číslo. Vynásobíme-li Aniččino číslo samo se sebou, vyjde nám stokrát větší číslo, než když vynásobíme Maruščino číslo samo se sebou. Sečteme-li Aniččino a Maruščino oblíbené číslo, získáme číslo o 18 větší, než je polovina Aniččina čísla.

Určete Aniččino a Maruščino oblíbené číslo. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Kolikrát je Aniččino číslo větší než Maruščino?

Možné řešení. Aniččino číslo je desetkrát větší než Maruščino — jedině v tomto případě je součin Aniččina čísla se sebou samým roven stonásobku Maruščina čísla ($10 \cdot 10 = 100$). Polovina Aniččina čísla je tedy pětkrát větší než číslo Maruščino.

Součet Aniččina a Maruščina čísla je o 18 větší než polovina Aniččina čísla. Proto je 18 součtem poloviny Aniččina čísla s číslem Maruščiným. Podle závěru předchozího odstavce je tento součet roven šestinásobku Maruščina čísla.

Tedy Maruščino číslo je 3 ($18 : 6 = 3$) a Aniččino číslo je 30 ($10 \cdot 3 = 30$).

Poznámka. Pokud Aniččino číslo označíme a a Maruščino číslo m, potom lze předchozí úvahy shrnout následovně:

- $a \cdot a = 100\,m \cdot m$, tedy $a = 10m$, tedy $\frac{1}{2}a = 5m$.
- $a + m = \frac{1}{2}a + 18$, tedy $18 = \frac{1}{2}a + m = 6m$.
- $m = 18 : 6 = 3$ a $a = 10m = 30$.

Po úvodním postřehu ($a = 10m$), je také možné postupně dosazovat přirozená čísla za m, vyjadřovat příslušný rozdíl ($a + m - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a + m$) a kontrolovat, zda je nebo není roven 18:

m	1	2	3	4	$\dots$
a	10	20	30	40	$\dots$
$\frac{1}{2}a + m$	6	12	18	24	$\dots$