I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Myslím si pětimístné číslo, které není dělitelné třemi ani čtyřmi. Pokud každou číslici zvětším o jedna, získám pětimístné číslo, které je dělitelné třemi. Pokud každou číslici o jedna zmenším, získám pětimístné číslo dělitelné čtyřmi. Pokud prohodím libovolné dvě číslice, číslo se zmenší.

Jaké číslo si můžu myslet? Najděte všechny možnosti. (*M. Mach*)

Nápověda. Umíte předem vyloučit některé číslice na jednotlivých místech?

Možné řešení. Vlastnost s prohazováním číslic znamená, že každá číslice myšleného čísla je větší než následující, resp. menší než předchozí. Vlastnost se zvětšením a zmenšením číslic znamená, že největší číslice je menší než 9 a nejmenší číslice je větší než 0. Celkem tedy platí, že

1. číslice je menší než 9 a větší než 4,
2. číslice je menší než 8 a větší než 3,
3. číslice je menší než 7 a větší než 2,
4. číslice je menší než 6 a větší než 1,
5. číslice je menší než 5 a větší než 0.

Vlastnost s dělitelností čtyřmi znamená, že poslední dvojčíslí zmenšeného čísla je dělitelné čtyřmi. To spolu s předchozími podmínkami znamená, že poslední dvojčíslí myšleného čísla může být některé z následujících:

$$51, \quad 43, \quad 31.$$

Vlastnost s dělitelností třemi znamená, že součet číslic zvětšeného čísla je dělitelný třemi, tedy součet číslic myšleného čísla dává po dělení třemi zbytek jedna. Všechna možná myslitelná čísla jsou

$$87643, \quad 76543, \quad 87631, \quad 86431, \quad 76531, \quad 65431.$$

Z8–I–2

Na zahradě stály tři bedny s jablky. Celkem bylo jablek více než 150, avšak méně než 190. Maruška přemístila z první bedny do dvou dalších beden jablka tak, že se jejich počet v každé z těchto dvou beden oproti předchozímu stavu zdvojnásobil. Obdobným způsobem Marta přemístila jablka z druhé bedny do první a třetí. Nakonec Šárka podle stejných pravidel přemístila jablka z třetí bedny do první a druhé. Když přišel na zahradu Vojta, podivil se, že v každé bedně byl stejný počet jablek.

Kolik jablek bylo v jednotlivých bednách původně? (*L. Hozová*)

Nápověda. V které bedně bylo po druhém přemístění nejvíc jablek?

Možné řešení. Po třetím přemístění byl v každé bedně stejný počet jablek, a ten si označíme x. Postupně odzadu doplníme počty jablek v jednotlivých bednách:

	1. bedna	2. bedna	3. bedna
po 3. přemístění	x	x	x
po 2. přemístění	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$	$2x$
po 1. přemístění	$\frac{1}{4}x$	$\frac{7}{4}x$	x
původně	$\frac{13}{8}x$	$\frac{7}{8}x$	$\frac{1}{2}x$

Počty jablek po každém přemístění v každé bedně byly celočíselné. Tedy x musí být násobkem osmi a $3x$ (součet jablek ve všech bednách) musí být násobkem 24.

Mezi čísly 151 až 189 je jediný násobek čísla 24, a to 168. Tedy $x = 168 : 3 = 56$ a v bednách původně byly následující počty jablek:

$$\tfrac{13}{8} \cdot 56 = 91, \quad \tfrac{7}{8} \cdot 56 = 49, \quad \tfrac{1}{2} \cdot 56 = 28.$$

Poznámka. Pokud bychom uvažovali odpředu, potom počty jablek v bednách lze postupně vyjádřit takto:

	1. bedna	2. bedna	3. bedna
původně	a	b	c
po 1. přemístění	$a-b-c$	$2b$	$2c$
po 2. přemístění	$2a-2b-2c$	$-a+3b-c$	$4c$
po 3. přemístění	$4a-4b-4c$	$-2a+6b-2c$	$-a-b+7c$

Rovnost počtů jablek po třetím přemístění vede k soustavě rovnic, která je pro řešitele v této kategorii problematická. Nicméně s předpoklady celočíselnosti a, b, c a omezenosti součtu $150 < a+b+c < 190$ má tato soustava jediné řešení uvedené výše.

Z8–I–3

V trojúhelníku ABC je bod S středem vepsané kružnice. Obsah čtyřúhelníku $ABCS$ je roven čtyřem pětinám obsahu trojúhelníku ABC. Délky stran trojúhelníku ABC vyjádřené v centimetrech jsou všechny celočíselné a obvod trojúhelníku ABC je 15 cm.

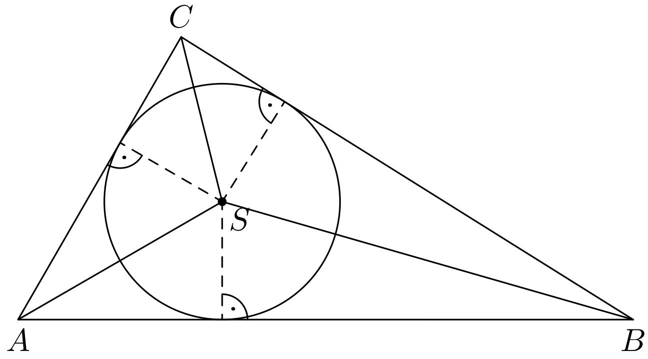
Určete délky stran trojúhelníku ABC. Najděte všechny možnosti.

(*E. Semerádová*)

Nápověda. Umíte určit obsah trojúhelníku pomocí jeho obvodu a poloměru kružnice vepsané?

Možné řešení. Trojúhelník ABC lze rozložit na trojúhelníky ABS, BCS a ACS. Výška každého z těchto trojúhelníků z vrcholu S je shodná s poloměrem vepsané kružnice. Poměry jejich obsahů jsou proto stejné jako poměry délek stran proti vrcholu S.

Obdobně lze porovnávat tyto dílčí trojúhelníky s celým trojúhelníkem ABC (jehož obsah je roven součinu obvodu a poloměru vepsané kružnice).



Protože obsah čtyřúhelníku $ABCS$ je roven čtyřem pětinám obsahu trojúhelníku ABC, zbývá na trojúhelník ACS jedna pětina obsahu trojúhelníku ABC. Tedy délka strany AC je rovna pětině obvodu trojúhelníku ABC, což v našem případě je $15 : 5 = 3\,(\text{cm})$. Součet délek zbylých dvou stran je proto 12 cm; v úvahu připadají následující dvojice délek stran (uvedeno v cm, bez ohledu na pořadí):

$$1, 11; \quad 2, 10; \quad 3, 9; \quad 4, 8; \quad 5, 7; \quad 6, 6.$$

Aby uvažované úsečky tvořily strany trojúhelníku, musí být splněny trojúhelníkové nerovnosti. Těmto požadavkům vyhovují pouze následující trojice — možné délky stran trojúhelníku ABC v cm:

$$3, 5, 7; \quad 3, 6, 6.$$

Z8–I–4

Jitka byla na brigádě s neměnnou denní mzdou. Za tři dny si vydělala tolik peněz, že si koupila stolní hru a ještě jí 490 Kč zbylo. Kdyby strávila na brigádě pět dní, mohla by si koupit dvě takové stolní hry a ještě by jí zbylo 540 Kč.

Kolik korun stála stolní hra? (*K. Pazourek*)

Nápověda. Piďte se nejprve po Jitčině denní mzdě.

Možné řešení. Za třídenní výplatu si Jitka koupila jednu hru a zbylo jí 490 Kč, tedy za šestidenní výplatu by si mohla koupit dvě hry a zbylo by jí 980 Kč. Přitom za pět dní by vydělala také na dvě hry, ale zbylo by jí jen 540 Kč. Jitčina denní mzda proto byla 440 Kč ($980 - 540 = 440$).

Z prvního údaje dopočítáme cenu jedné hry: $3 \cdot 440 - 490 = 830$ Kč.

Poznámka. Pokud denní výplatu označíme v a cenu hry h, potom lze předchozí úvahy shrnout následovně:

- $3v = h + 490$, tedy $6v = 2h + 980$,
- $5v = 2h + 540$, tedy $v = 980 - 540 = 440$,
- $h = 3v - 490 = 3 \cdot 440 - 490 = 830$.

Z8–I–5

Pan Stříbrný uspořádal výstavu. Vystavoval 120 prstenů, které ležely na stolech podél stěn sálu a tvořily tak jednu velkou kružnici. Prohlídka začínala u vchodových dveří v označeném směru. Odtud každý třetí prsten v řadě byl zlatý, každý čtvrtý prsten byl starožitný a každý desátý prsten měl diamant. Prsten, který neměl žádnou z těchto tří vlastností, byl padělek.

Kolik bylo na výstavě zlatých prstenů, které byly starožitné a zároveň měly diamant? Kolik vystavil pan Stříbrný padělků? (*L. Hozová*)

Nápověda. Podle jakých pravidel byly rozmístěny prsteny s různými kombinacemi třech zmiňovaných vlastností?

Možné řešení. Každý 3. prsten byl zlatý, každý 4. byl starožitný a každý 10. měl diamant. Tedy

- zlatých prstenů bylo $120 : 3 = 40$,
- starožitných prstenů bylo $120 : 4 = 30$,
- prstenů s diamantem bylo $120 : 10 = 12$.

Při počítání prstenů s více vlastnostmi nejprve určíme, s jakou pravidelností se na výstavě opakovaly: každý 12. prsten byl zlatý a starožitný, každý 30. byl zlatý s diamantem a každý 20. byl starožitný s diamantem (zde např. 20 je nejmenším společným násobkem čísel 4 a 10). Tedy

- zlatých starožitných prstenů bylo $120 : 12 = 10$,
- zlatých prstenů s diamantem bylo $120 : 30 = 4$,
- starožitných prstenů s diamantem bylo $120 : 20 = 6$.

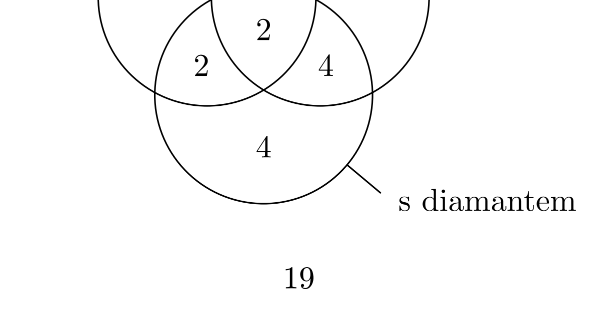
Dále každý 60. prsten měl všechny tři vlastnosti (60 je nejmenším společným násobkem čísel 3, 4 a 10), tedy

- zlaté starožitné prsteny s diamantem byly $120 : 60 = 2$.

Při počítání prstenů s některou z uvedených vlastností musíme být obezřetní: 10 prstenů bylo zlatých a starožitných, 2 z nich měly navíc diamant, tedy zlatých starožitných prstenů bez diamantu bylo $10 - 2 = 8$. Obdobně zlatých nestarožitných prstenů s diamantem bylo $4 - 2 = 2$ a nezlatých starožitných prstenů s diamantem bylo $6 - 2 = 4$.

Zlatých prstenů s nějakou dodatečnou vlastností bylo $2 + 8 + 2 = 12$, přitom zlatých prstenů celkem bylo 40, tedy zlatých nestarožitných prstenů bez diamantu bylo $40 - 12 = 28$. Obdobně nezlatých starožitných prstenů bez diamantu bylo $30 - (2 + 8 + 4) = 16$ a nezlatých nestarožitných prstenů s diamantem bylo $12 - (2 + 2 + 4) = 4$.

Předchozí počty a vztahy můžeme znázornit pomocí Vennova diagramu takto:



Prstenů s některou ze tří sledovaných vlastností (tedy prstenů, které nebyly padělky) bylo $2 + 8 + 4 + 2 + 28 + 16 + 4 = 64$. Padělků proto bylo $120 - 64 = 56$.

Poznámka. Pokud základní tři množiny prstenů označíme Z, S a D, potom úvodní část předchozího řešení lze shrnout následovně:

$$|Z| = 40, \quad |S| = 30, \quad |D| = 12,$$
$$|Z \cap S| = 10, \quad |Z \cap D| = 4, \quad |S \cap D| = 6,$$
$$|Z \cap S \cap D| = 2.$$

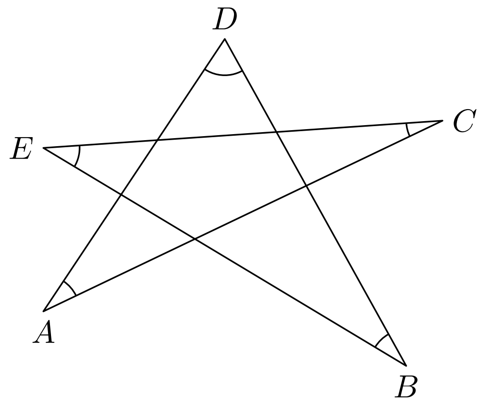
V další části jsme zjišťovali počet prvků sjednocení $Z \cup S \cup D$ tak, že jsme postupně vyjadřovali počty prvků navzájem disjunktních* podmnožin $(Z \cap S) \setminus (Z \cap S \cap D)$, $(Z \cap D) \setminus (Z \cap S \cap D)$ atd., které jsme pak sečetli. Stručněji lze k témuž výsledku dospět následujícím výpočtem:

$$\begin{aligned}|Z \cup S \cup D| &= |Z| + |S| + |D| - |Z \cap S| - |Z \cap D| - |S \cap D| + |Z \cap S \cap D| = \\ &= 40 + 30 + 12 - 10 - 4 - 6 + 2 = 64.\end{aligned}$$

Tomuto vztahu se přezdívá *princip inkluze a exkluze*. K jeho obecnému zdůvodnění (příp. dalšímu zobecnění) stačí ověřit, že každou z disjunktních částí Vennova diagramu započítáváme právě jednou.

Z8–I–6

Body A, B, C, D a E jsou vrcholy nepravidelné pěticípé hvězdy, viz obrázek. Určete součet vyznačených úhlů.



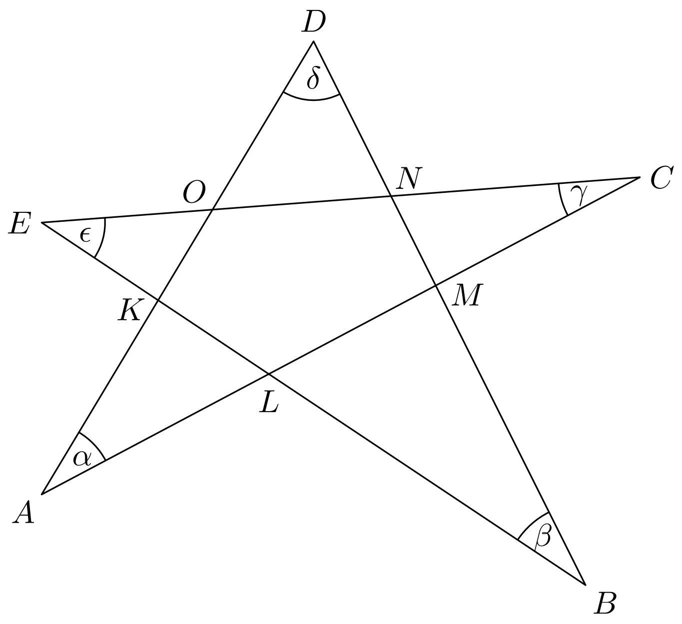
Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní. *(L. Hozová)*

Nápověda. Jaký je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku?

Možné řešení. Pomocí vyznačených úhlů lze vyjádřit všemožné další úhly v daném mnohoúhelníku. Takto začneme a pokusíme se zjistit něco o hledaném součtu. Vyznačené úhly a zbylé vrcholy mnohoúhelníku označíme následovně:

---

* Disjunktní množiny jsou množiny s prázdným průnikem, tedy množiny bez společného prvku.



Úhel LKO je vnitřním úhlem trojúhelníku BKD, tedy lze vyjádřit jako $180° - \beta - \delta$. Úhel LKA je doplňkovým úhlem k úhlu LKO, resp. vnějším úhlem trojúhelníku BKD, tedy je roven $\beta + \delta$. Obdobně úhel KLA je roven $\gamma + \varepsilon$ atd.

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku AKL je právě hledaným součtem vyznačených úhlů:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180°.$$

Poznámky. V předchozím řešení jsme se soustředili na vyjádření úhlů v cípu hvězdy s vrcholem A. Tentýž výsledek dostáváme v kterémkoli jiném cípu.

Přestože vyznačené úhly mohou být velmi různorodé, jejich součet je vždy stejný. To je důsledkem podobně nesamozřejmého tvrzení o součtu úhlů v trojúhelníku. Toto tvrzení bude jistě v pozadí jakéhokoli jiného řešení úlohy. Např. je možné využít součtu vnitřních úhlů obecného mnohoúhelníku: n-úhelník lze rozdělit (různými způsoby) na $n - 2$ trojúhelníky, tedy součet jeho vnitřních úhlů je $(n - 2) \cdot 180°$.

Jiné řešení. Součet vnitřních úhlů pětiúhelníku $KLMNO$ je roven $3 \cdot 180° = 540°$. Obdobně jako v řešení uvedeném výše lze vnitřní úhly u vrcholů K, L, M, N, O vyjádřit po řadě jako

$$180° - \beta - \delta, \quad 180° - \gamma - \varepsilon, \quad 180° - \delta - \alpha, \quad 180° - \varepsilon - \beta, \quad 180° - \alpha - \gamma.$$

Celkem tak dostáváme

$$\begin{aligned} 5 \cdot 180° - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) &= 540°, \\ 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) &= 360°, \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon &= 180°. \end{aligned}$$