I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Slavěna si napsala barevnými fixy čtyři různá přirozená čísla: červené, modré, zelené a žluté. Když červené číslo vydělí modrým, dostane jako neúplný podíl zelené číslo a žluté představuje zbytek po tomto dělení. Když vydělí modré číslo zeleným, vyjde jí dělení beze zbytku a podílem je číslo žluté. Slavěna prozradila, že dvě z jejích čtyř čísel jsou 97 a 101.

Určete ostatní Slavěnina čísla a přiřaďte jednotlivým číslům barvy. Najděte všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Nápověda. Které z uvedených barev nemohou mít čísla 97 a 101?

Možné řešení. Čísla si označíme počátečními písmeny podle jejich barvy, tedy $č$, m, z, $ž$. Informace o dělení pak můžeme zapsat takto:

$$č = m \cdot z + ž, \quad m = z \cdot ž.$$

Protože čísla mají být navzájem různá, z druhé rovnosti plyne, že z ani $ž$ není 1. To znamená, že m je číslo složené. Dosazením druhé rovnosti do první dostáváme

$$č = z^2 \cdot ž + ž = (z^2 + 1) \cdot ž.$$

Z předchozího víme, že jak $z^2 + 1$, tak $ž$ nejsou 1, tedy také $č$ je číslo složené. Vzhledem k tomu, že obě čísla 97 a 101 jsou prvočísla, nemůže být žádné z nich ani modré, ani červené.

Jedno z čísel 97 a 101 je proto žluté a jedno zelené. Zbylá čísla dopočítáme z úvodních vztahů:

$ž$	z	m	$č$
97	101	9 797	989 594
101	97	9 797	950 410

Poznámka. Úlohu lze řešit také postupným zkoušením možností: dvojice známých čísel se dosadí do úvodních rovností a ověří se existence zbylé dvojice čísel. Např. dosazení $č = 101$ a $m = 97$ určuje z první rovnosti $z = 1$ a $ž = 4$, což však nevyhovuje rovnosti druhé. Tímto způsobem by se muselo probrat 12 možností.

Jakýkoli dodatečný postřeh může snížit počet možností k ověřování. Např. (vedle podmínek uvedených v předchozím řešení) platí, že $č$ je větší než kterékoli ze zbylých čísel a m je větší než z a $ž$. Zejména nemůže být $č = 97$ a touto možností se není třeba zabírat.

Z9–I–2

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel x a jednomístných přirozených čísel y, pro která platí

$$\frac{x}{y} + 1 = x,\overline{y}.$$

Zápis na pravé straně rovnosti značí periodické číslo. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Existuje nějaká souvislost mezi desetinnými rozvoji čísel $\frac{x}{y} + 1$ a $\frac{1}{y}$?

Možné řešení. Aby $\frac{x}{y}+1$ bylo periodické číslo s jednomístnou periodou, musí být také $\frac{x}{y}$ periodické číslo s jednomístnou periodou. Protože $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, musí tatáž podmínka platit také pro číslo $\frac{1}{y}$. Mezi přirozenými čísly 1 až 9 je tato podmínka splněna pouze ve třech případech, které postupně probereme:

- Pro $y = 3$ je $\frac{1}{y} = 0{,}\overline{3}$. Tedy diskutovaná rovnost je tvaru
$$\frac{x}{3} + 1 = x + \frac{1}{3},$$
což po úpravě dává $x = 1$.
- Pro $y = 6$ je $\frac{1}{y} = 0{,}1\overline{6}$. Tedy $0{,}\overline{6} = 10 \cdot \frac{1}{6} - 1 = \frac{2}{3}$ a diskutovaná rovnost je tvaru
$$\frac{x}{6} + 1 = x + \frac{2}{3},$$
což úpravě dává $x = \frac{2}{5}$. To ovšem není celé číslo.
- Pro $y = 9$ je $\frac{1}{y} = 0{,}\overline{1}$. Tedy $0{,}\overline{9} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ a diskutovaná rovnost je tvaru
$$\frac{x}{9} + 1 = x + 1,$$
což po úpravě dává $x = 0$.

Úloha má dvě řešení: $x = 1$, $y = 3$ a $x = 0$, $y = 9$.

Poznámky. Protože $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$, je $\frac{y}{9} = 0{,}\overline{y}$ a diskutovanou rovnost lze vyjádřit jako

$$\frac{x}{y} + 1 = x + \frac{y}{9}.$$

Pro každé jednomístné přirozené číslo y stačí dořešit příslušnou lineární rovnici a ověřit nezápornost a celočíselnost x. Takto dostaneme dvě řešení uvedená výše.

Předchozí rovnost je možné dále upravovat, např. takto:

$$9x + 9y = 9xy + y^2$$
$$9(x + y - xy) = y^2.$$

Pro libovolná celá čísla x a y je výraz na pravé straně dělitelný 9. Tedy také číslo y^2 musí být dělitelné 9, pročež číslo y musí být dělitelné 3. Mezi čísly 1 až 9 stačí ověřovat pouze $y = 3$, 6 a 9. Takto jsme dospěli k témuž omezení možností jako v postupu uvedeném výše.

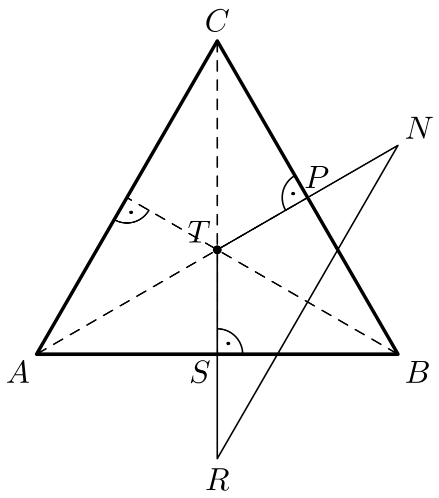
Z9–I–3

V rovnostranném trojúhelníku ABC je bod T jeho těžištěm, bod R je obrazem bodu T v osové souměrnosti podle přímky AB a bod N je obrazem bodu T v osové souměrnosti podle přímky BC.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a TRN. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Co víte o těžišti rovnostranného trojúhelníku?

Možné řešení. V rovnostranném trojúhelníku je těžiště průsečíkem výšek. Obrazy těžiště v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku proto leží na příslušných (prodloužených) těžnicích čili výškách. Zejména trojice bodů C, T, R, resp. A, T, N leží na přímkách. Průsečíky těchto přímek se stranami trojúhelníku označíme S, resp. P.



Těžiště dělí těžnici v poměru 2 : 1, tedy

$$|CT| = 2|TS|, \quad \text{resp.} \quad |AT| = 2|TP|.$$

V osové souměrnosti jsou vzdálenosti vzoru a obrazu od osy stejné, tedy

$$|TR| = 2|TS|, \quad \text{resp.} \quad |TN| = 2|TP|.$$

Celkem odtud vyvozujeme, že dvojice úseček CT a TR, resp. AT a TN jsou shodné. Navíc (vrcholové) úhly ATC a NTR jsou shodné, tudíž trojúhelníky TCA a TRN jsou shodné (podle věty *sus*), zejména mají stejný obsah.

Poměr obsahů trojúhelníků ABC a TRN je stejný jako poměr obsahů trojúhelníků ABC a ACT. Trojúhelníky ABC a ACT mají společnou stranu AC a odpovídající výšky v poměru 3 : 1; v tomtéž poměru jsou také jejich obsahy. Poměr obsahů trojúhelníků ABC a TRN je 3 : 1.

Poznámka. Předchozí řešení bylo založeno na znalosti polohy těžiště na těžnici. I bez tohoto poznatku lze úlohu dořešit s použitím dalších vlastností plynoucích ze zadání, např.:

- Trojúhelník ABC je tvořen třemi navzájem shodnými trojúhelníky ABT, BCT a ACT, příp. šesti trojúhelníky, z nichž každý je shodný s trojúhelníkem TSB.
- Trojúhelníky TRB a TNB jsou rovnostranné, navzájem shodné.

- Čtyřúhelník $TRBN$ je kosočtverec, který je úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, z nichž každý je shodný s trojúhelníkem TSB.

  Odtud poměr obsahů trojúhelníků ABC a TRN je $6:2=3:1$.

Z9–I–4

Na zdi byla napsána dvě stejná pětimístná čísla. Pat před jedno z těchto čísel připsal jedničku, Mat připsal jedničku za to druhé. Tím dostali dvě šestimístná čísla, z nichž jedno bylo třikrát větší než druhé.

Která pětimístná čísla byla původně napsána na zdi? (*L. Hozová*)

Nápověda. Které z nově vzniklých čísel bylo větší?

Možné řešení. Obě nová čísla měla stejný počet číslic a větší bylo třikrát větší než to druhé. Větší číslo tedy nemohlo začínat jedničkou — bylo to číslo Matovo.

Původně napsaná pětimístná čísla označíme x. Patova úprava dává číslo $100\,000+x$, Matova úprava dává číslo $10x+1$ a platí

$$\begin{aligned} 10x+1 &= 3(100\,000+x),\\ 7x &= 299\,999,\\ x &= 42\,857. \end{aligned}$$

Na zdi bylo původně napsáno dvakrát číslo 42 857.

Poznámky. Pokud bychom předpokládali, že Patovo nové číslo bylo větší než Matovo, potom bychom dostali

$$\begin{aligned} 100\,000+x &= 3(10x+1),\\ 99\,997 &= 29x. \end{aligned}$$

To však nevede k celočíselnému řešení (zbytek po dělení $99\,997:29$ je 5).

Úlohu je možné řešit jako algebrogram. Obě uvedené možnosti odpovídají po řadě následujícím zadáním:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & a & b & c & d & e\\ \times & & & & & 3\\ \hline a & b & c & d & e & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & 1\\ \times & & & & & 3\\ \hline 1 & a & b & c & d & e \end{array}$$

V prvním případě postupně nepřímo doplňujeme $e=7$, $d=5$, $c=8$, $b=2$, $a=4$, což odpovídá řešení uvedenému výše. Ve druhém případě postupně přímo doplňujeme $e=3$, $d=9$, $c=7$, $b=3$, $a=1$, což však vede ke sporu: první číslice ve výsledku vychází 4 a nikoli předepsaná 1.

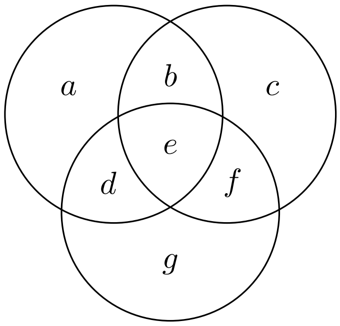
Z9–I–5

Na hřišti jsou nakresleny tři stejně velké kruhy, z nichž žádné dva nejsou totožné. Rozmístěte 16 dívek tak, aby v každém kruhu stálo 9 dívek.

Najděte alespoň osm podstatně různých rozmístění, tj. takových rozmístění, při kterých se nerozlišují dívky ani kruhy. (Záměna jednotlivých dívek, příp. celých kruhů s dívkami dává rozmístění, které není podstatně různé od původního.) (*L. Hozová*)

Nápověda. Mohou některé dívky být současně ve všech třech kruzích? Pokud ano, kolik nejvíce?

Možné řešení. Dívky v kruzích představují prvky v množinách: hledáme tři množiny po 9 prvcích, jejichž sjednocení má 16 prvků. Vztahy mezi množinami znázorníme následovně (písmena a až g označují počty prvků v příslušných podmnožinách):



Stačí se soustředit pouze na b, d, e, f, neboť zbylé tři neznámé jsou těmito čtyřmi zcela určeny:

$$a = 9 - b - e - d, \quad c = 9 - b - e - f, \quad g = 9 - d - e - f. \tag{1}$$

Pomocí těchto vztahů také dostáváme omezení

$$a + b + c + d + e + f + g = 27 - b - d - f - 2e = 16,$$

tedy

$$b + d + f + 2e = 11. \tag{2}$$

Diskuzi můžeme vést vzhledem ke společnému průniku všech tří množin; z omezení (2) plyne, že e nemůže být větší než 5. Postupně probereme všechny možné hodnoty e a pro každou z nich najdeme nezáporná celá čísla b, d, f, která vyhovují omezení (2) a pro která čísla v (1) jsou též nezáporná. Trojice b, d, f nás zajímají až na pořadí, takže si je pro pořádek vhodně uspořádáme (záměna pořadí vede k řešení, které není podstatně různé od původního):

Pro $e = 5$ dostáváme $b + d + f = 1$, tedy

b	d	f	a	c	g
1	0	0	3	3	4

Pro $e = 4$ dostáváme $b + d + f = 3$, tedy

b	d	f	a	c	g
3	0	0	2	2	5
2	1	0	2	3	4
1	1	1	3	3	3

Pro $e = 3$ dostáváme $b + d + f = 5$, tedy

b	d	f	a	c	g
5	0	0	1	1	6
4	1	0	1	2	5
3	2	0	1	3	4
3	1	1	2	2	4
2	2	1	2	3	3

Pro $e = 2$ dostáváme $b + d + f = 7$, tedy

b	d	f	a	c	g
7	0	0	0	0	7
6	1	0	0	1	6
5	2	0	0	2	5
5	1	1	1	1	5
4	3	0	0	3	4
4	2	1	1	2	4
3	3	1	1	3	3
3	2	2	2	2	3

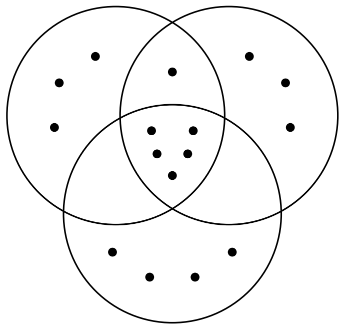
Pro $e = 1$ dostáváme $b + d + f = 9$, tedy

b	d	f	a	c	g
7	1	1	0	0	6
6	2	1	0	1	5
5	3	1	0	2	4
5	2	2	1	1	4
4	4	1	0	3	3
4	3	2	1	2	3
3	3	3	2	2	2

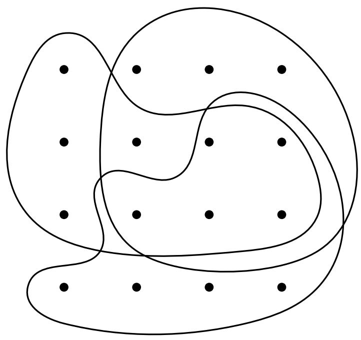
Pro $e = 0$ dostáváme $b + d + f = 11$, tedy

b	d	f	a	c	g
7	2	2	0	0	5
6	3	2	0	1	4
5	4	2	0	2	3
5	3	3	1	1	3
4	4	3	1	2	2

Případné znázornění jednotlivých řešení je nabíledni. Pro příklad uvádíme rozmístění odpovídající jedinému řešení v případě $e = 5$:



Poznámky. Osm podstatně různých řešení lze také najít prostým (trpělivým) zkoušením. V tomto duchu může být přehlednější v dané šestnáctiprvkové množině vybírat tři devítiprvkové podmnožiny tak, aby žádný prvek nezůstal na ocet. Např. výše znázorněné řešení odpovídá následujícímu výběru:



Obecný vztah mezi počty prvků množin, jejich průniky a sjednocením popisuje tzv. *princip inkluze a exkluze*, viz poznámky za řešením úlohy **Z8–I–5**.

Z9–I–6

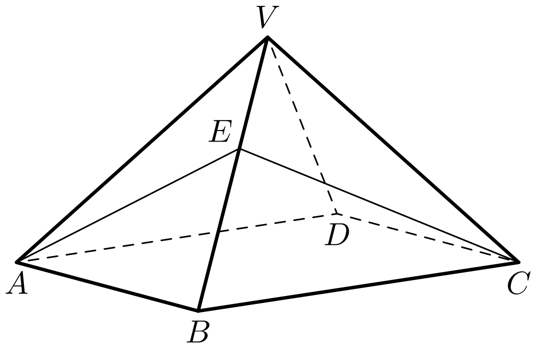
Josef a Marie objevili na dovolené pravidelný jehlan, jehož podstavou byl čtverec o straně 230 m a jehož výška byla rovna poloměru kruhu se stejným obvodem jako podstavný čtverec. Marie označila vrcholy čtverce $ABCD$. Josef vyznačil na přímce spojující bod B s vrcholem jehlanu takový bod E, že délka lomené čáry AEC byla nejkratší možná.

Určete délku lomené čáry AEC zaokrouhlenou na celé centimetry.

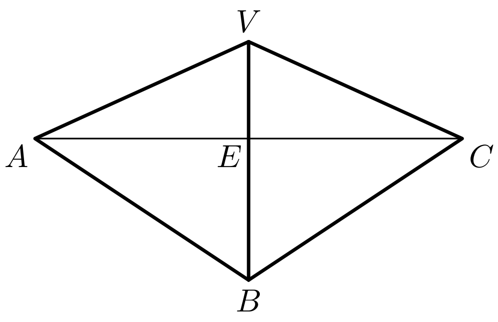
(*M. Krejčová, F. Steinhauser*)

Nápověda. V jakém vztahu byly úsečky AE a CE vzhledem k přímce spojující bod B s vrcholem jehlanu?

Možné řešení. Kvůli lepší přehlednosti si situaci ze zadání znázorníme:

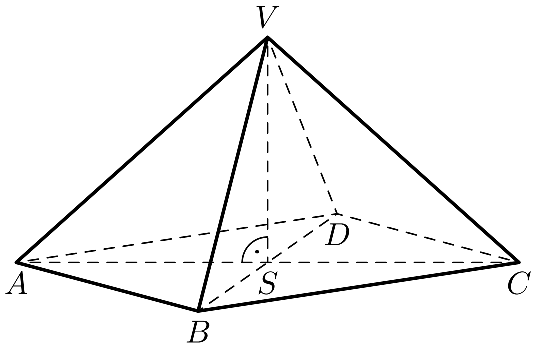


Lomená čára AEC je nejkratší, když se po rozvinutí pláště jehlanu do roviny jeví jako úsečka:



Úsečky AV a CV jsou shodné a stejně tak úsečky AB a CB. Tedy po rozvinutí pláště do roviny jsou body A a C souměrné podle přímky BV, zejména úsečka AC je k této přímce kolmá. Délka nejkratší možné lomené čáry AEC je rovna dvojnásobku velikosti výšky trojúhelníku ABV z vrcholu A, a tak ji také určíme.

Trojúhelník ABV je rovnoramenný, velikost jeho základny známe, ramena jsou přeponami pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna je polovinou úhlopříčky podstavného čtverce a druhá odvěsna je výškou jehlanu:



Polovina úhlopříčky podstavného čtverce má (podle Pythagorovy věty) velikost

$$|AS| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AB| \doteq 162{,}635\,\mathrm{m}.$$

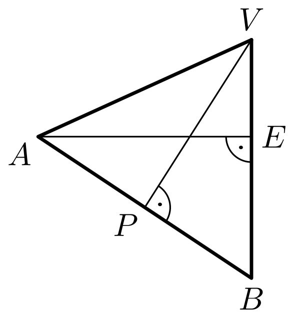
Výška jehlanu má (podle informace ze zadání o obvodech) velikost

$$|SV| = \frac{4}{2\pi}\,|AB| \doteq 146{,}423\,\mathrm{m}.$$

Hrany procházející vrcholem jehlanu mají (podle Pythagorovy věty) velikost

$$|AV| = \sqrt{|AS|^2 + |SV|^2} \doteq 218{,}837\,\mathrm{m}.$$

Nyní známe všechny strany trojúhelníku ABV. Jeho výšku z vrcholu A můžeme vyjádřit pomocí výšky z hlavního vrcholu V a dvojího vyjádření obsahu tohoto trojúhelníku:



Trojúhelník ABV je souměrný podle výšky jdoucí hlavním vrcholem. Tato výška má (podle Pythagorovy věty) velikost

$$|VP| = \sqrt{|AV|^2 - \frac{1}{4}|AB|^2} \doteq 186{,}184\,\mathrm{m}.$$

Obsah trojúhelníku ABV je roven $\frac{1}{2}|AB| \cdot |VP| = \frac{1}{2}|BV| \cdot |AE| = \frac{1}{2}|AV| \cdot |AE|$, tedy výška z vrcholu A má velikost

$$|AE| = \frac{|AB| \cdot |VP|}{|AV|} \doteq 195{,}681\,\mathrm{m}.$$

Délka nejkratší možné lomené čáry AEC je

$$|AEC| = 2|AE| \doteq 391{,}362\,\mathrm{m},$$

tj. přibližně 391 m a 36 cm.

Poznámky. Úvodní postřeh s rozvinutým pláštěm jehlanu lze nahradit následující úvahou: Trojúhelníky ABV a BCV jsou shodné, tedy i úsečky AE a EC jsou shodné a délka lomené čáry AEC je rovna dvojnásobku délky úsečky AE. Ta je nejkratší možná, pokud je k přímce BE kolmá. Stačí tedy určit výšku trojúhelníku ABV z vrcholu A.

V uvedeném řešení úlohy může díky průběžnému zaokrouhlování docházet k nežádoucímu hromadění chyby. Proto jsme raději zaokrouhlovali na celé mm. Všechny předchozí veličiny je též možné vyjádřit obecně pomocí $|AB|$ a dosazovat teprve do konečného výrazu. Takto postupně po úpravách dostáváme:

$$|AV| = \sqrt{\frac{\pi^2+8}{2\pi^2}} \cdot |AB|, \quad |VP| = \sqrt{\frac{\pi^2+16}{4\pi^2}} \cdot |AB|, \quad |AE| = \sqrt{\frac{\pi^2+16}{2\pi^2+16}} \cdot |AB|.$$

Běžně používaná přibližná hodnota $\pi \doteq \frac{22}{7}$ vede ve výsledku k chybě mezi 2 a 3 cm. Porovnáním celkových rozměrů a proporcí jehlanu to vypadá, že Josef a Marie byli na dovolené v Egyptě u Cheopsovy (resp. Chufuovy či Velké) pyramidy.

K vyjádření výšky trojúhelníku lze také dospět se znalostmi goniometrických funkcí, jejich základního vztahu $((\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1)$ a kosinové věty $(|AV|^2 = |AB|^2 + |BV|^2 - 2|AV| \cdot |BV| \cdot \cos\beta)$. Tyto znalosti v dané kategorii nemůžeme předpokládat, avšak zvídaví řešitelé se s nimi mohou seznámit, příp. porovnat tento přístup s ostatními.