70. ročník Matematické olympiády (2020/21)

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Čtyři veverky snědly dohromady 2020 oříšků, každá nejméně 103 oříšky. První veverka snědla víc oříšků než kterákoli z ostatních tří veverek. Druhá a třetí veverka snědly dohromady 1277 oříšků.

Kolik oříšků snědla první veverka? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Naznačíme možnosti, kolik oříšků mohla sníst druhá a třetí veverka, tj. číslo 1277 rozložíme na dva sčítance, z nichž každý je roven alespoň 103:

$$1277 = 1174 + 103 = \ldots = 640 + 637 = 639 + 638.$$

Odtud vyplývá, že první veverka snědla alespoň 640 oříšků (snědla víc než kterákoli z ostatních veverek).

Na první a čtvrtou veverku dohromady zbylo $2020 - 1277 = 743$ oříšků. Opět naznačíme možnosti, kolik oříšků mohla sníst první a čtvrtá veverka:

$$743 = 640 + 103 = 639 + 104 = \ldots.$$

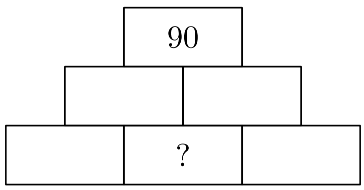
Odtud vyplývá, že první veverka snědla nanejvýš 640 oříšků.

První veverka snědla právě 640 oříšků.

Hodnocení. Po 2 bodech za každý z naznačených výpisů; 2 body za závěr.

Z6–II–2

V součinové pyramidě je v každém poli jedno kladné celé číslo, které je součinem čísel ze dvou sousedících polí z nižší vrstvy. Ve vrcholu trojvrstvé součinové pyramidy je číslo 90.



Jaké číslo může být ve vyznačeném poli? Určete všechny možnosti.

(*A. Bohiniková*)

Možné řešení. Neznámá čísla v dolní vrstvě pyramidy označíme postupně a, b, c. V druhé vrstvě budou čísla ab, bc a v horní číslo ab^2c.

Úkolem je najít číslo b tak, aby $ab^2c = 90$, tj. najít v rozkladu čísla 90 druhou mocninu celého čísla. Prvočíselný rozklad čísla 90 je

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

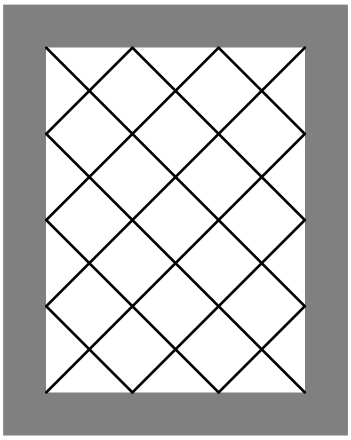
Tedy ve vyznačeném poli může být buď číslo 1, nebo 3.

Hodnocení. 2 body za úvahu popisující číslo ve vrcholu pyramidy ve tvaru ab^2c; 2 body za rozklad čísla 90; 2 body za všechna řešení.

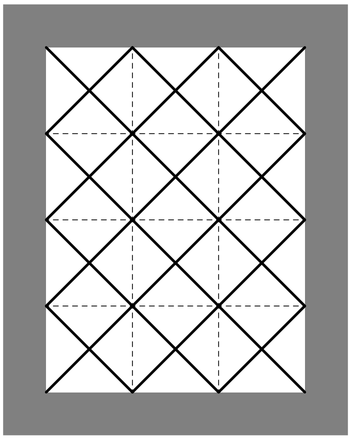
Z6–II–3

Dvířka králíkárny jsou vyrobena z dřevěného rámu a drátěného pletiva s čtvercovými oky. Laťky rámu jsou široké 5 cm. Některé uzlové body pletiva lícují s vnitřními hranami rámu jako na obrázku. Vnitřní (pletivová) část dvířek má obsah $432\,\mathrm{cm}^2$.

Určete vnější rozměry (tj. šířku a výšku) celých dvířek. (*S. Bednářová*)



Možné řešení. Pletivová část dvířek sestává ze shodných čtverců a jejich polovin. Vnitřní hrany rámu jsou tvořeny úhlopříčkami těchto čtverců, a to třemi na kratší straně a čtyřmi na delší. Pokud je a délka úhlopříčky čtverce, má pletivová část rozměry $3a \times 4a$.



To odpovídá obsahu $432\,\mathrm{cm}^2$, tedy

$$12a^2 = 432, \quad a^2 = 36, \quad a = 6.$$

Vnitřní rozměry dvířek jsou $18\,\mathrm{cm} \times 24\,\mathrm{cm}$, vnější rozměry pak $28\,\mathrm{cm} \times 34\,\mathrm{cm}$ (na každé straně přidáno 5 cm).

Poznámka. Pletivovou část dvířek tvoří 17 shodných (celých) čtverců a 14 polovin těchto čtverců. Dohromady tedy 24 čtverců, které mají obsah $432\,\mathrm{cm}^2$. Na jeden čtverec tak připadá $18\,\mathrm{cm}^2$. Obsah čtverce s úhlopříčkou délky a je roven $\frac{1}{2}a^2$. Úhlopříčku pletivového čtverce lze tedy určit úpravami:

$$\frac{1}{2}a^2 = 18, \quad a^2 = 36, \quad a = 6.$$

Hodnocení. 2 body za pomocné rozklady a úvahy; 2 body za pomocné výpočty; 2 body za závěr a kvalitu komentáře.