

## II. kolo kategorie Z7

## Z7–II–1

Na pohádkovém ostrově žijí draci a kykloповé. Všichni draci jsou červení, tříhlaví a dvounozí. Všichni kykloповé jsou hnědí, jednohlaví a dvounozí. Kykloповé mají jedno oko uprostřed čela, draci mají na každé hlavě dvě oči. Dohromady mají kykloповé a draci 42 oči a 34 nohou.

Kolik draků a kolik kykloповů žije na ostrově? (M. Petrová)

**Možné řešení.** Protože jak kykloповé, tak draci jsou dvounozí, všech těchto bytostí je celkem 17 ( $34 : 2 = 17$ ).

Kdyby všechny bytosti byly kykloповé, měly by celkem 17 očí. To je o 25 méně, než kolik jich je ve skutečnosti ( $42 - 17 = 25$ ).

Každý drak má o 5 očí víc než kterýkoli kyklop, tedy mezi bytostmi je 5 draků ( $25 : 5 = 5$ ). Zbýlých 12 bytostí jsou kykloповé ( $17 - 5 = 12$ ).

**Jiné řešení.** Úlohu lze řešit také zkoušením možností: celkem je na ostrově 17 bytostí ( $34 : 2 = 17$ ), mezi nimiž je nanejvýš 7 draků ( $42 : 6 = 7$ ).

V následující tabulce uvádíme v závislosti na počtu draků ( $d$ ) počet kykloповů ( $k = 17 - d$ ) a celkový počet jejich očí ( $6d + k = 5d + 17$ ), který má být 42:

draci	1	2	3	4	<b>5</b>	6	7
kykloповé	16	15	14	13	<b>12</b>	11	10
celkem očí	22	27	32	37	42	47	52

Jediné vyhovující řešení je vyznačeno silně.

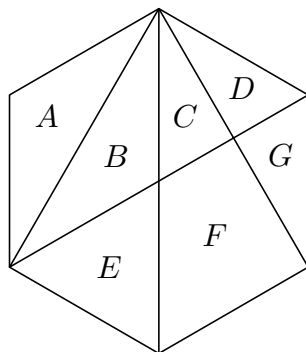
**Poznámka.** Se značením uvedeným v popisu předchozí tabulky lze počet draků určit jako řešení rovnice  $5d + 17 = 42$  (což také odpovídá úvahám v prvním řešení úlohy).

Zkoušení je možné založit na jiném principu, přičemž není nutné znát počet bytostí na ostrově (zato uvažovat počty nohou).

**Hodnocení.** 2 body za dílčí postřehy (např. celkový počet bytostí či maximální počet draků); 3 body za dořešení úlohy; 1 bod za úplnost a kvalitu komentáře.

**Z7–II–2**

Pravidelný šestiúhelník je čtyřmi svými úhlopříčkami rozdělen na šest trojúhelníků a jeden čtyřúhelník:

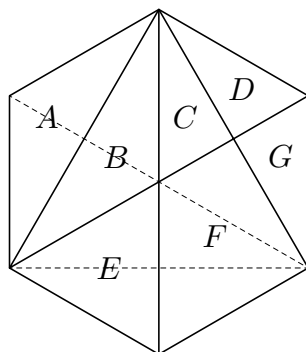


Obsah čtyřúhelníku  $F$  je  $1,8 \text{ cm}^2$ .

Určete obsahy trojúhelníků  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  a  $G$ .

(*E. Semerádová*)

**Možné řešení.** Doplněním chybějících úhlopříček šestiúhelníku získáme jeho rozdělení na 12 navzájem shodných trojúhelníků (úhlopříčky procházející středem šestiúhelníku jej rozdělují na šest shodných rovnostranných trojúhelníků, zbylé tři úhlopříčky představují výšky v těchto trojúhelnících).



Trojúhelníky  $C$ ,  $D$ ,  $G$  jsou tři z těchto základních trojúhelníků, každý z trojúhelníků  $A$ ,  $B$ ,  $E$  je tvořen dvěma základními trojúhelníky a čtyřúhelník  $F$  třemi.

Obsah čtyřúhelníku  $F$  je  $1,8 \text{ cm}^2$ , tedy obsah základního trojúhelníku je  $0,6 \text{ cm}^2$ . Každý z trojúhelníků  $C$ ,  $D$ ,  $G$  má obsah  $0,6 \text{ cm}^2$  a každý z trojúhelníků  $A$ ,  $B$ ,  $E$  má obsah  $1,2 \text{ cm}^2$ .

**Hodnocení.** 3 body za pomocné dělení šestiúhelníku a porovnání posuzovaných částí; 2 body za dořešení úlohy; 1 bod za kvalitu komentáře (zahrnující zejména shodnosti pomocných trojúhelníků).

**Z7-II-3**

Bludička Josefína tančí u močálu, přičemž používá kroky dvojí délky — krátké měří 45 cm, dlouhé 60 cm. Časem si vyšlapala oválnou stezku, po níž za dlouhých nocí tančí stále dokola. Pokud opakuje tři dlouhé kroky dopředu a jeden krátký vzad, pak devadesátým krokem dotančí přesně tam, kde začínala. Pokud opakuje tři krátké kroky dopředu a jeden dlouhý vzad, pak jí také vychází krok přesně tam, kde začínala.

Kolikátým krokem dotančí Josefína na původní místo ve druhém případě?

(*M. Petrová*)

**Možné řešení.** Jedním velkým čtyřkrokem (třemi dlouhými kroky vpřed a jedním krátkým vzad) se Josefína posune o 135 cm ( $3 \cdot 60 - 45 = 135$ ). Devadesát kroků sestává z 22 velkých čtyřkroků a dvou dlouhých kroků ( $90 = 22 \cdot 4 + 2$ ). Josefínin okruh tedy měří 3 090 cm ( $22 \cdot 135 + 2 \cdot 60 = 3\,090$ ).

Jedním malým čtyřkrokem (třemi krátkými kroky vpřed a jedním dlouhým vzad) se Josefína posune o 75 cm ( $3 \cdot 45 - 60 = 75$ ). Čtyřicet takových čtyřkroků — tedy 160 kroků — ji posune o 3 000 cm ( $40 \cdot 75 = 3\,000$ ), přičemž takto jistě nepřekročí původní místo (před posledním zpátečním krokem je ve vzdálenosti 3 060 cm). Zbývajících 90 cm urazí dvěma následujícími kroky ( $2 \cdot 45 = 90$ ).

Josefína dotančí na původní místo 162. krokem.

**Poznámka.** Pro přiblížení situace uvádíme několik vzdáleností (v cm) odpovídajících tanečním krokům používaných ve druhém případě:

krok	1	2	3	4	5	6	...
vzdálenost	45	90	135	75	120	165	...

krok	...	158	159	160	161	162	163
vzdálenost	...	3 015	3 060	3 000	3 045	3 090	3 135

Odtud je také patrné, že různým krokům odpovídají různé vzdálenosti.

**Hodnocení.** 2 body za délku Josefínina okruhu; 2 body za počet kroků ve druhém případě; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.