II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Děti na táboře získávaly za splněné úkoly body. Ty bylo možné dále směňovat: pět bodů za samolepku, šest bodů za tiskátko. Jára si propočítal, že kdyby chtěl jenom samolepky, zbyl by mu jeden bod nevyužitý. Kdyby si vybral jenom tiskátka, nevyužil by tři body. Nakonec dokázal uplatnit všechny svoje body, přičemž získal dvojnásobné množství tiskátek než samolepek.

Kolik nejméně bodů měl Jára před směňováním? (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Uvažujeme počty samolepek a tiskátek vyhovující poslední zmiňované podmínce, poté kontrolujeme ostatní požadavky:

Jednu samolepku a dvě tiskátka lze získat za 17 bodů ($5 + 2 \cdot 6 = 17$). Při směně 17 bodů jenom za samolepky by se dva body nevyužily (zbytek po dělení 17 : 5 je 2), což nesouhlasí se zadáním.

Pro s samolepek máme $2s$ tiskátek a $17s$ bodů. Hledáme nejmenší s takové, že $17s$ dává po dělení pěti zbytek jedna a po dělení šesti zbytek tři:

samolepky	1	2	3
tiskátka	2	4	6
body	17	34	**51**
zbytek po děl. 5	2	4	1
zbytek po děl. 6	5	4	3

Jára měl před směňováním nejméně 51 bodů.

Jiné řešení. Uvažujeme počty samolepek a tiskátek vyhovující prvním dvěma podmínkám, poté kontrolujeme ostatní požadavky:

Při směňování bodů jenom za samolepky by se jeden bod nevyužil; možné počty jsou (násobky pěti zvětšené o jedna)

$$6,\ 11,\ 16,\ \mathbf{21},\ 26,\ 31,\ 36,\ 41,\ 46,\ \mathbf{51},\ \ldots$$

Při směňování bodů jenom za tiskátka by se tři body nevyužily; možné počty jsou (násobky šesti zvětšené o tři)

$$9,\ 15,\ \mathbf{21},\ 27,\ 33,\ 39,\ 45,\ \mathbf{51},\ \ldots$$

Hodnoty vyhovující oběma požadavkům současně jsou vyznačeny silně.

Beze zbytku lze 21 bodů směnit jedině za tři samolepky a jedno tiskátko ($21 = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6$). V takovém případě by nebylo tiskátek dvojnásobné množství než samolepek.

Beze zbytku lze 51 bodů směnit buď za tři samolepky a šest tiskátek, nebo za devět samolepek a jedno tiskátko ($51 = 3 \cdot 5 + 6 \cdot 6 = 9 \cdot 5 + 6$). V prvním případě je tiskátek dvojnásobné množství než samolepek.

Jára měl před směňováním nejméně 51 bodů.

Poznámka. Výše diskutované podmínky pro neznámý počet bodů jsou:

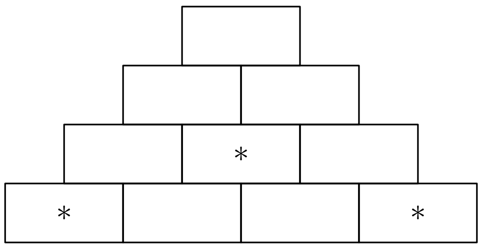
- zbytek po dělení pěti je jedna,
- zbytek po dělení šesti je tři,
- zbytek po dělení sedmnácti je nula.

Všechna přirozená čísla vyhovující těmto třem podmínkám jsou tvaru $51 + 5 \cdot 6 \cdot \cdot 17 \cdot k = 51 + 510\,k$, kde k je libovolné nezáporné celé číslo. Úloha souvisí s tzv. *čínskou větou o zbytcích*.

Hodnocení. 2 body za nalezení systému prověřování možností (násobky 17 v prvním řešení, správné zbytky ve druhém řešení); 2 body za dořešení úlohy; 2 body za úplnost a kvalitu komentáře.

Z8–II–2

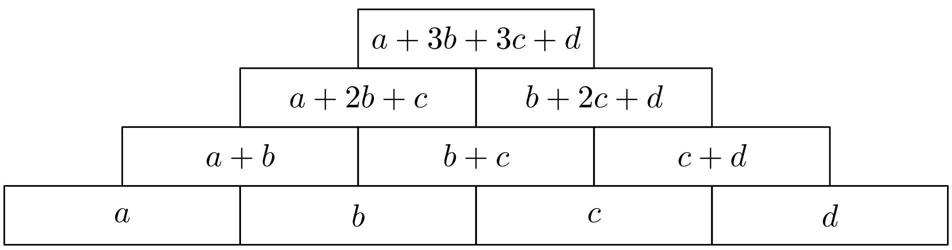
Eliška umisťovala koláče do krabic, ze kterých pak postavila pyramidu jako na obrázku. Přitom každá krabice ve vyšší řadě obsahovala tolik koláčů jako dvě sousedící krabice pod ní dohromady. Ve třech krabicích označených hvězdičkami bylo tři, pět a šest koláčů.



Eliška si všimla, že kdyby označené krabice jakkoli zaměnila (a podle předchozího pravidla upravila počty koláčů v ostatních krabicích), celkový počet koláčů by nebyl menší.

Kolik koláčů bylo v označené krabici ve druhé řadě zdola? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počty koláčů v dolní řadě pyramidy označíme postupně a, b, c, d a odtud vyjádříme počty v ostatních krabicích:



Součet všech uvedených čísel je

$$4a + 9b + 9c + 4d = 4(a + d) + 9(b + c).$$

Čísla v krabicích označených hvězdičkami jsou a, d a $b + c$, což jsou (až na pořadí) čísla 3, 5 a 6. Celkový součet je nejmenší možný, právě když číslo $b + c$ (tj. číslo přispívající do součtu největší vahou) je nejmenší možné, tedy 3.

V označené krabici ve druhé řadě zdola byly tři koláče.

Poznámka. Úlohu lze řešit také rozborem všech možných rozmístění známých počtů koláčů. Vzhledem ke zřejmým symetriím stačí uvažovat tři případy:

- $a = 3$, $d = 5$, $b + c = 6$, což dává celkový součet 86,
- $a = 3$, $d = 6$, $b + c = 5$, což dává celkový součet 81,
- $a = 5$, $d = 6$, $b + c = 3$, což dává celkový součet 71.

Nejmenší součet nastává ve třetím případě, což souhlasí s předchozími závěry.

Hodnocení. 3 body za obecné doplnění pyramidy, resp. rozbor možností; 3 body za dořešení úlohy.

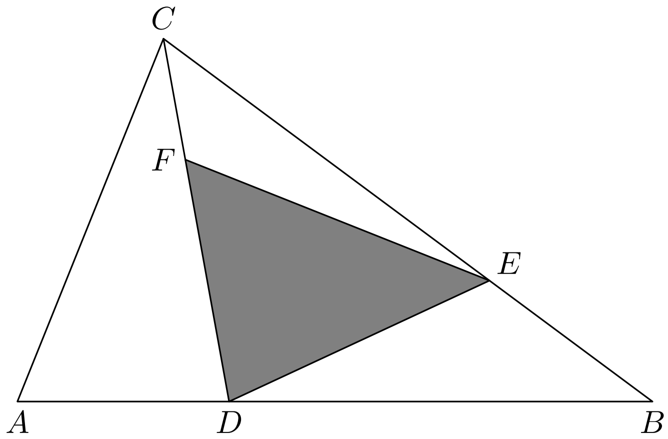
Z8–II–3

Pro obecný trojúhelník ABC jsou dány body D, E, F:

- bod D je ve třetině úsečky AB, blíže k bodu A,
- bod E je ve třetině úsečky BC, blíže k bodu B,
- bod F je ve třetině úsečky CD, blíže k bodu C.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a DEF. (*A. Bohiniková*)

Možné řešení. Pro přehlednost situaci nejprve znázorníme:



Trojúhelníky ABC a DBC mají stejnou výšku z vrcholu C a protilehlé strany (AB a DB) jsou v poměru 3 : 2. Ve stejném poměru jsou též jejich obsahy,

$$S_{ABC} : S_{DBC} = 3 : 2.$$

Trojúhelníky BCD a ECD mají stejnou výšku z vrcholu D a protilehlé strany (BC a EC) jsou v poměru 3 : 2. Ve stejném poměru jsou též jejich obsahy, což spolu s předchozím výsledkem dává

$$S_{ABC} : S_{ECD} = 9 : 4.$$

Trojúhelníky CDE a FDE mají stejnou výšku z vrcholu E a protilehlé strany (CD a FD) jsou v poměru 3 : 2. Ve stejném poměru jsou též jejich obsahy, což spolu s předchozími výsledky dává

$$S_{ABC} : S_{DEF} = 27 : 8.$$

Hodnocení. 1 bod za znázornění situace; po 1 bodu za každé z dílčích pozorování; 2 body za závěr a kvalitu komentáře.