I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Do kruhových políček doplňte přirozená čísla od 1 do 20 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a současně platily všechny uvedené vztahy. (*M. Smitková*)

$$\bigcirc \xrightarrow{-5} \bigcirc \xrightarrow{:8} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 9} \bigcirc \xrightarrow{-2} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{+3} \bigcirc \xrightarrow{:7} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 3} \bigcirc \xrightarrow{+12} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{-2} \bigcirc \xrightarrow{+3} \bigcirc \xrightarrow{:5} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 4} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{:4} \bigcirc \xrightarrow{+7} \bigcirc \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 3} \bigcirc$$

Nápověda. Některá políčka připouští méně možností ke zkoušení než jiná.

Možné řešení. Při doplňování je vhodné začít s políčky předcházejícími dělení. Přitom větší dělitel znamená méně možností.

Např. ve druhém políčku na prvním řádku může být buď 8, nebo 16 (jediná čísla od 1 do 20 dělitelná 8). Pokud by v tomto políčku bylo 16, muselo by v předchozím políčku být 21 ($21 - 5 = 16$), což je ovšem víc než 20. Proto je v onom políčku 8. Podle předepsaných operací doplníme celý řádek a ověříme, že se žádné číslo neopakuje:

$$13 \xrightarrow{-5} 8 \xrightarrow{:8} 1 \xrightarrow{\cdot 9} 9 \xrightarrow{-2} 7$$

Ve druhém políčku na druhém řádku může být buď 7, nebo 14 (jediná čísla od 1 do 20 dělitelná 7). Číslo 7 je už použito v předchozím řádku, tedy je v onom políčku 14. Podle předepsaných operací doplníme celý řádek a ověříme, že se žádné číslo neopakuje:

$$11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{:7} 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{+12} 18$$

Ve třetím políčku na třetím řádku může být 5, 10, 15, nebo 20 (jediná čísla od 1 do 20 dělitelná 5). Žádné z těchto čísel není zatím použito, takže můžeme zkoušet dosazovat:

- Pokud bychom dosadili 5, resp. 10, potom by v následujícím políčku (po dělení 5) bylo 1, resp. 2. Obě tato čísla jsou již použita na předchozích řádcích.
- Pokud bychom dosadili 15, potom by v předchozím políčku bylo 12 ($12 + 3 = 15$) a v prvním políčku 14 ($14 - 2 = 12$). Toto číslo je však použito na druhém řádku.

- Nezbývá než dosadit 20. Podle předepsaných operací doplníme celý řádek a ověříme, že se žádné číslo neopakuje:

$$19 \xrightarrow{-2} 17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{:5} 4 \xrightarrow{\cdot 4} 16$$

Na poslední řádek zbývají zatím nepoužitá čísla 3, 5, 10, 12 a 15. V prvním políčku musí být 12 (jediné z těchto čísel dělitelné 4). Doplnění podle předepsaných operací vyčerpává právě zbylá čísla, tedy se vskutku nic neopakuje:

$$12 \xrightarrow{:4} 3 \xrightarrow{+7} 10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\cdot 3} 15$$

Z5–I–2

Trpaslíci natírali krychlové kostky zelenou a bílou barvou tak, že každá stěna byla celá obarvena jednou z těchto dvou barev. Po chvíli si všimli, že některé obarvené kostky vypadají po vhodném pootočení zcela stejně a začali je podle tohoto hlediska třídit do skupin (ve stejné skupině jsou stejně obarvené kostky).

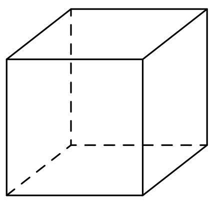
Kolik nejvýše skupin mohli takto dostat? (*I. Jančigová*)

Nápověda. V jakých vztazích mohou být dvojice stěn krychle?

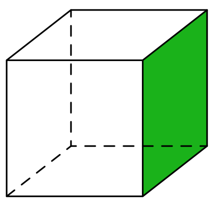
Možné řešení. Krychle má šest stěn, přičemž každá stěna sousedí se čtyřmi dalšími stěnami (mají společnou hranu) a s jednou stěnou je rovnoběžná (žádný společný bod).

Možná obarvení můžeme třídit podle počtu zelených (resp. bílých) stěn. Takto dostáváme sedm možností, pro něž postupně rozebereme různé typy obarvení.

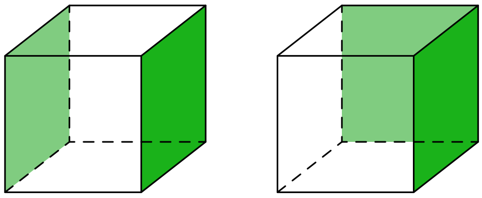
- Žádná stěna zelená (všechny bílé): všechny takové krychle vypadají stejně, tedy máme jediný typ.



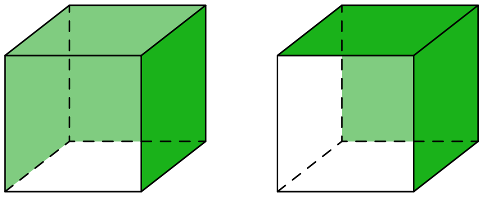
- Jedna stěna zelená (pět bílých): taktéž jediný typ.



- Dvě stěny zelené (čtyři bílé): rozlišujeme dva typy podle toho, zda spolu zelené stěny sousedí, či nikoli.



- Tři stěny zelené (tři bílé): rozlišujeme dva typy, podle toho, zda zelené stěny sousedí po dvou, či všechny navzájem.



- Ostatní případy není třeba vypisovat: diskuze pro možnosti s prohozenými počty zelených a bílých stěn jsou stejné.

Celkem dostáváme $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ typů obarvení. Trpaslíci mohli dostat nejvýše 10 skupin obarvených kostek.

Z5–I–3

Adámek přepočítával svoji sbírku duhových kuliček. Zjistil, že je může rozdělit do stejně početných hromádek, a to vícero způsoby. Kdyby je rozdělil do tří hromádek, bylo by v každé hromádce o osm kuliček víc, než by bylo v každé hromádce při dělení do čtyř hromádek.

Kolik měl Adámek duhových kuliček? (*E. Semerádová*)

Nápověda. Představte si skutečné přeskupování kuliček ze čtyř hromádek do tří.

Možné řešení. Přeskupování kuliček ze čtyř hromádek do tří lze provést tak, že všechny kuličky z jedné hromádky se rozdělí do třech zbylých.

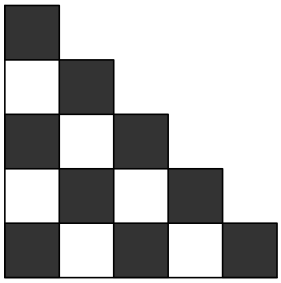
V každé ze tří nových hromádek bylo o osm kuliček víc než původně, tedy hromádka, ze které se rozdávalo, měla 24 kuliček ($3 \cdot 8 = 24$).

Všechny hromádky byly stejně početné a původně byly čtyři, tedy Adámek měl 96 kuliček ($24 \cdot 4 = 96$).

Poznámka. Pokud neznámý počet kuliček v každé ze čtyř hromádek označíme k, potom podmínku ze zadání lze vyjádřit jako $4k = 3 \cdot (k + 8)$. Rozepsáním dostáváme $4k = 3k + 24$, tedy $k = 24$.

Z5–I–4

Jarda vystřihl z rohu šachovnice následující útvar sestávající z patnácti polí:

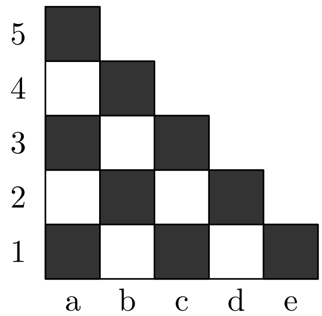


Následně odstřihl několik dalších polí, a to tak, že výsledný útvar neobsahoval díry a nerozpadal se, měl stejný počet černých a bílých polí a měl největší možný obsah. Navíc zjistil, že ze všech možných útvarů s těmito vlastnostmi měl ten jeho největší možný obvod.

Která pole Jarda dodatečně odstřihl? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Nápověda. Jakou barvu měla vystřižená pole? A kolik jich bylo?

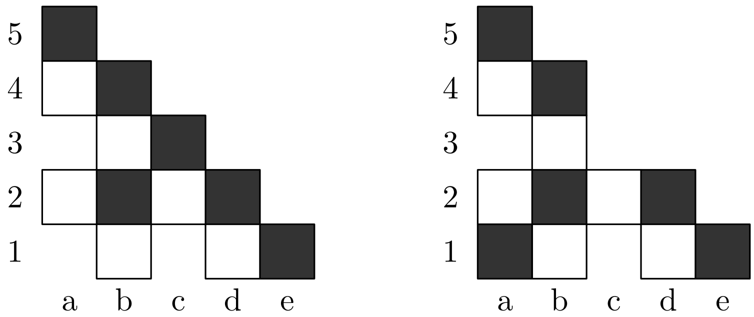
Možné řešení. Původní Jardův útvar tvořilo 9 černých a 6 bílých polí, tedy černých polí bylo o 3 víc než bílých. Pokud po odstřižení dalších polí měl útvar stejný počet bílých a černých polí a současně největší možný obsah, musel Jarda odstřihnout 3 černá pole. Pro snazší vyjadřování si pole označíme jako na běžné šachovnici:



Aby nový útvar neobsahoval díry a ani se nerozpadl na více částí, nemohl Jarda odstřihávat pole jen tak (jistě např. nemohl odstřihnout pole b2 či pole c1 společně s polem d2). S tímto vědomím prozkoumáme, jak odstřižení jednotlivých polí ovlivňuje obvod útvaru:

- Po odstřižení kteréhokoli z polí a5 a e1 se obvod zmenší — místo původních tří stran se na obvodu projeví jedna nová.
- Po odstřižení kteréhokoli z polí a1, b4, c3 a d2 se obvod nezmění — místo původních dvou stran se na obvodu projeví dvě nové.
- Po odstřižení kteréhokoli z polí a3 a c1 se obvod zvětší — místo původní jedné strany se na obvodu projeví tři nové.

Tedy Jarda odstřihl pole a3, c1 a dále buď a1, nebo c3 (každá jiná volba by měla za následek rozpad či větší obvod útvaru):



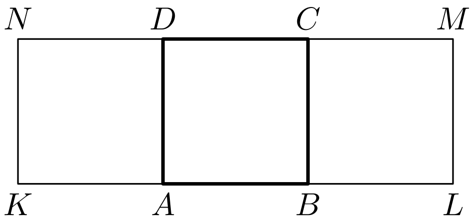
Z5–I–5

Na papíru byl sestrojen čtverec $ABCD$ se stranou 4 cm. Pavel sestrojil vrcholy obdélníku, který měl třikrát větší obsah než čtverec $ABCD$. Přitom rýsoval pouze kružnice, protože pravítko nenašel.

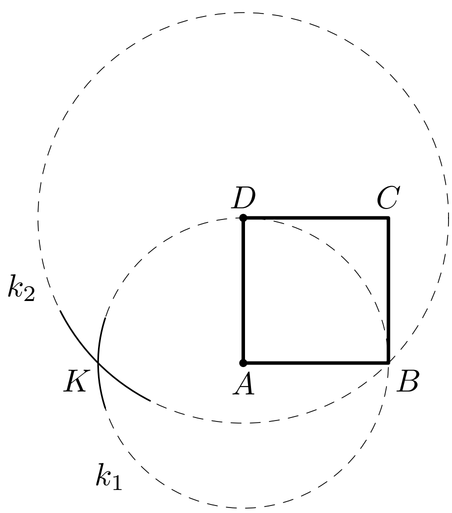
Jak mohl Pavel postupovat? Popište alespoň jednu konstrukci. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Uvažte nejprve obdélník složený ze dvou shodných čtverců.

Možné řešení. Pavlův obdélník pojmenujeme $KLMN$. Tento obdélník může být složen ze čtverce $ABCD$ a dalších dvou s ním shodných čtverců např. takto:

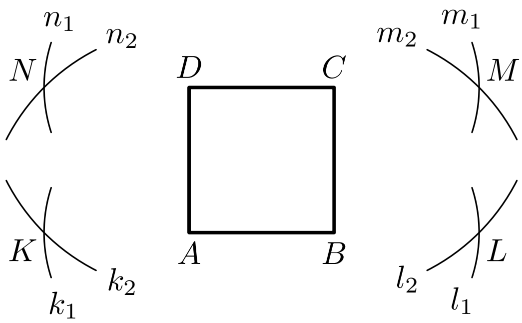


Úsečka AK je shodná se stranou čtverce, tedy bod K leží na kružnici se středem v bodě A a s poloměrem shodným s úsečkou AB; tuto kružnici označíme $k_1(A, AB)$. Úsečka DK je shodná s úhlopříčkou čtverce, tedy bod K leží na kružnici se středem v bodě D a s poloměrem shodným s úsečkou DB; tuto kružnici označíme $k_2(D, DB)$. Uvědomte si, že kružnice k_1 a k_2 mají dva společné body — kromě hledaného K ještě vrchol B daného čtverce.

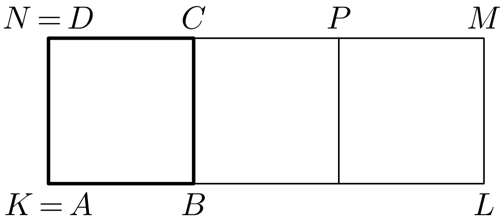


Obdobným způsobem lze sestrojit zbylé vrcholy obdélníku $KLMN$. Zkráceně je celá konstrukce popsána takto:

- bod K je průsečíkem kružnic $k_1(A, AB)$ a $k_2(D, DB)$ různým od bodu B,
- bod L je průsečíkem kružnic $l_1(B, BA)$ a $l_2(C, CA)$ různým od bodu A,
- bod M je průsečíkem kružnic $m_1(C, CD)$ a $m_2(B, BD)$ různým od bodu D,
- bod N je průsečíkem kružnic $n_1(D, DC)$ a $n_2(A, AC)$ různým od bodu C.



Poznámky. Vzájemný vztah čtverce $ABCD$ a obdélníku $KLMN$ můžeme uvažovat také např. takto:



V tomto případě stačí k sestrojení bodů L a M jeden další pomocný bod P, tedy celkem šest kružnic (místo osmi v předchozím řešení).

Uvědomte si, že obdélníků s trojnásobným obsahem vzhledem k danému čtverci je nepřeberné množství. Je zajímavé, že vrcholy každého takového obdélníku je možné sestrojit, avšak nalezení příslušné konstrukce není vůbec snadné. Např. pro obdélník se stranami $KL = 6 \cdot AB$ a $LM = \frac{1}{2} \cdot BC$ je hlavním problémem sestrojení středu úsečky pouze pomocí kružítka.

Z5–I–6

Na parkovišti stála auta a bicykly. Pokud by přijelo jedno další auto, bylo by jich stejně jako bicyklů. Pokud by přijelo pět dalších bicyklů, měly by všechny bicykly stejný počet kol jako všechna auta.

Kolik stálo na parkovišti aut a kolik bicyklů? (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Představte si situaci, kdy souhlasí počty kol aut a bicyklů.

Možné řešení. Auto má čtyři kola, bicykl dvě; jedno auto má stejný počet kol jako dva bicykly.

Bicyklů na parkovišti bylo o jeden víc než aut. Uvažme situaci, kdy by na parkovišti bylo o pět bicyklů víc než původně, tedy situaci, kdy by souhlasily počty kol. V takovém případě by bylo bicyklů o šest víc než aut.

Šest bicyklů navíc znamená 12 kol navíc. Tento rozdíl odpovídá právě šesti autům (auto má o dvě kola víc než bicykl a $2 \cdot 6 = 12$). Tedy na parkovišti stálo šest aut a sedm bicyklů (o jeden víc než aut).

Poznámky. Úvahu v posledním odstavci nahrazuje zkoušení možností, kdy se postupně zvyšují počty dopravních prostředků a kontroluje se jejich rozdíl:

aut	3	4	5	6	...
bicyklů	6	8	10	12	...
rozdíl	3	4	5	**6**	...

Sledovaný rozdíl se stále zvětšuje, tedy úloha jiné řešení nemá.

Pokud bychom předpokládali, že každé auto má také jedno rezervní kolo, potom bychom obdobnými úvahami dospěli k závěru, že na parkovišti stála čtyři auta a pět bicyklů.