I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Můj jediný syn se narodil, když mi bylo 37 let. To bylo právě 32 let po smrti dědečka, a ten zemřel ve svých 64 letech. Dědeček byl o 12 let starší než babička, brali se v roce 1947, právě když babičce bylo 18 let.

V kterém roce se narodil můj syn?

Poznámka: případné nesrovnalosti související s konkrétními daty narození ignorujte; můžete např. předpokládat, že všichni jmenovaní mají narozeniny ve stejný den.

(*M. Smitková*)

Nápověda. Kolik let bylo dědečkovi jako ženichovi?

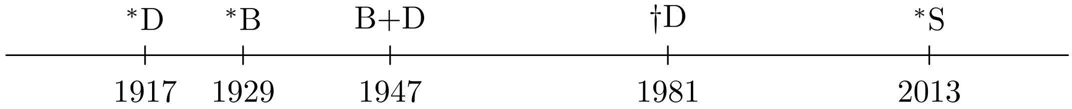
Možné řešení. Úlohu můžeme řešit podle daných informací odzadu:

V roce 1947 bylo babičce 18 let a dědečkovi 30 $(= 18 + 12)$.

Dědeček zemřel ve svých 64 letech, tedy 34 let po svatbě $(64 - 30 = 34)$, což bylo v roce 1981 $(= 1947 + 34)$.

Syn se narodil 32 let po smrti dědečka, tj. v roce 2013 $(= 1981 + 32)$.

Poznámka. Odvozené souvislosti lze znázornit na časové ose:



Uvědomte si, že bez dalších upřesnění je řešení úlohy nejednoznačné. Pokud by se např. dědeček narodil 31.12.1916 a babička 1.1.1929, byli by od sebe 12 let (a jeden den), přitom první letopočet by se lišil od výše uvedeného. Od řešitelů se neočekává diskuze více možností, nicméně postřehy či příklady tohoto druhu jsou chvalitebné.

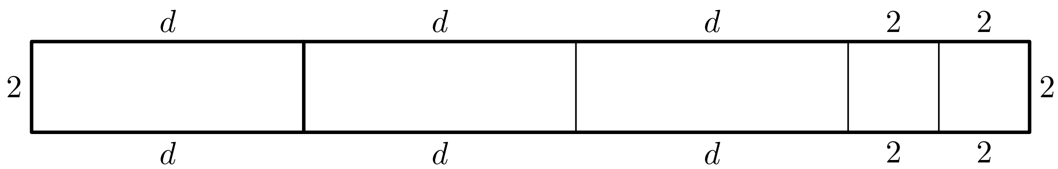
Z6–I–2

Petr měl obdélník šířky 2 cm a neznámé délky. Radka měla obdélník šířky 2 cm, jehož délka byla rovna obvodu Petrova obdélníku. Když k sobě obdélníky přiložili jejich šířkami, získali nový obdélník s obvodem 63 cm.

Určete obsah Petrova obdélníku. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete obvody obdélníků pomocí délky Petrova obdélníku.

Možné řešení. Označme neznámou délku Petrova obdélníku jako d. Petrův obdélník měl obvod $4 + 2d$ (cm), což byla délka Radčina obdélníku.



Složený obdélník měl obvod $6d + 12 = 63$ (cm). Odtud dostáváme $6d = 63 - 12 = 51$ (cm), a tedy $d = 51 : 6 = 17 : 2$ (cm).

Petrův obdélník měl obsah $2 \cdot d = 17\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámka. Pro jakýkoli obdélník se stranami 2 a a lze vztah mezi jeho obsahem ($S = 2a$) a obvodem ($o = 4 + 2a$) vyjádřit jako $S = o - 4$.

Z předchozího znázornění je patrné, že obsah Radčina obdélníku je o $8\,\mathrm{cm}^2$ větší než dvojnásobek obsahu Petrova obdélníku, který označíme P. Tedy obsah složeného obdélníku je

$$3P + 8 = 63 - 4.$$

Odtud dostáváme $3P = 63 - 4 - 8 = 51$, a tedy $P = 17\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z6–I–3

Míša zkoumá čísla, která lze vyjádřit jako součet alespoň dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Obzvlášť ji zajímají čísla, která se takto dají vyjádřit vícero způsoby (např. $18 = 5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6$). Číslům, která lze takto vyjádřit alespoň třemi způsoby, říká velkolepá.

Najděte alespoň tři Míšina velkolepá čísla. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Jaké výsledky lze získat součtem dvou, tří atd. po sobě jdoucích přirozených čísel?

Možné řešení. Dvě po sobě jdoucí čísla dávají součty

$$1 + 2 = 3, \quad 2 + 3 = 5, \quad 3 + 4 = 7, \quad \ldots$$

Sčítance postupně zvětšujeme o 1, tedy součty se postupně zvětšují o 2.

Tři po sobě jdoucí čísla dávají součty

$$1 + 2 + 3 = 6, \quad 2 + 3 + 4 = 9, \quad 3 + 4 + 5 = 12, \quad \ldots$$

Sčítance postupně zvětšujeme o 1, tedy součty se postupně zvětšují o 3.

Dále zjišťujeme, že nejmenší součet čtyř po sobě jdoucích čísel je $1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4 = 10$ a následující možné součty jsou 14, 18, 22, ...

Obdobnými úvahami dostáváme následující přehled součtů několika po sobě jdoucích čísel:

součty dvou	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...
součty tří	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	...	
součty čtyř	10	14	18	22	26	30	34	38	42	...		
součty pěti	15	20	25	30	35	40	45	...				
součty šesti	21	27	33	39	45	...						

Hledaná velkolepá čísla jsou taková čísla, která patří alespoň do tří různých výše uvedených skupin. Tři nejmenší velkolepá čísla (a jejich příslušné rozklady) jsou:

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$
$$21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$
$$27 = 13 + 14 = 8 + 9 + 10 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Poznámka. Způsobů, jak velkolepá čísla hledat, je více. Např. pro každých šest po sobě jdoucích čísel platí, že součet prvního a šestého čísla je stejný jako součet druhého a pátého, a ten je stejný jako součet třetího a čtvrtého; tento součet je lichý a označíme jej a. Součet všech šesti čísel je pak roven $3a$, což je číslo, které lze vyjádřit jako součet tří po sobě jdoucích čísel $a-1$, a, $a+1$. Protože a je liché číslo, je také $3a$ liché a každé takové číslo je součtem dvou po sobě jdoucích čísel; při stávajícím značení $\frac{1}{2}(3a+1)$ a $\frac{1}{2}(3a-1)$.

Také platí, že součet lichého počtu po sobě jdoucích čísel je vždy násobkem tohoto počtu. Všechny tyto (a další zajímavé) poznatky lze s úspěchem kombinovat k nalezení dalších velkolepých čísel. Z uvedeného plyne, že velkolepých čísel je neomezené množství.

Z6–I–4

Kuba si zapsal čtyřmístné číslo, jehož dvě číslice byly sudé a dvě liché. Pokud by v tomto čísle vyškrtl obě sudé číslice, dostal by číslo čtyřikrát menší, než kdyby v tomtéž čísle vyškrtl obě liché číslice.

Které největší číslo s těmito vlastnostmi si mohl Kuba zapsat? (*M. Petrová*)

Nápověda. Které největší číslo mohl Kuba dostat po vyškrtnutí sudých číslic?

Možné řešení. Po vyškrtnutí sudých číslic má zbýt číslo, které je čtyřikrát menší než jiné dvojmístné číslo. Toto číslo tedy musí být menší než 25 ($4 \cdot 25 = 100$, a to už je trojmístné).

Po vyškrtnutí sudých číslic má zbýt číslo zapsané lichými číslicemi. Největší takové číslo, které je zároveň menší než 25, je číslo 19. Avšak $4 \cdot 19 = 76$, což není číslo tvořené sudými číslicemi.

Dalším kandidátem je číslo 17. Pro něj platí $4 \cdot 17 = 68$, což je číslo tvořené sudými číslicemi.

Čtyřmístné číslo tedy bylo tvořeno lichými číslicemi 1 a 7 (v tomto pořadí) a sudými číslicemi 6 a 8 (v tomto pořadí), přičemž pořadí lichých a sudých číslic není nijak omezeno. Největší číslo splňující všechny tyto požadavky je 6817. A to je největší číslo, které mohl Kuba zapsat.

Další možnosti není nutné prověřovat: čtyřnásobek čísla menšího než 17 je menší než 68, tedy při splnění ostatních podmínek větší číslo než 6817 dostat nelze.

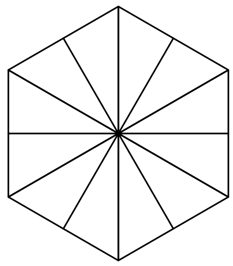
Z6–I–5

Mojmír rozstříhal pravidelný šestiúhelník na 12 shodných dílů. Z těchto dílů (ne nutně ze všech) skládal rozličné pravoúhlé trojúhelníky.

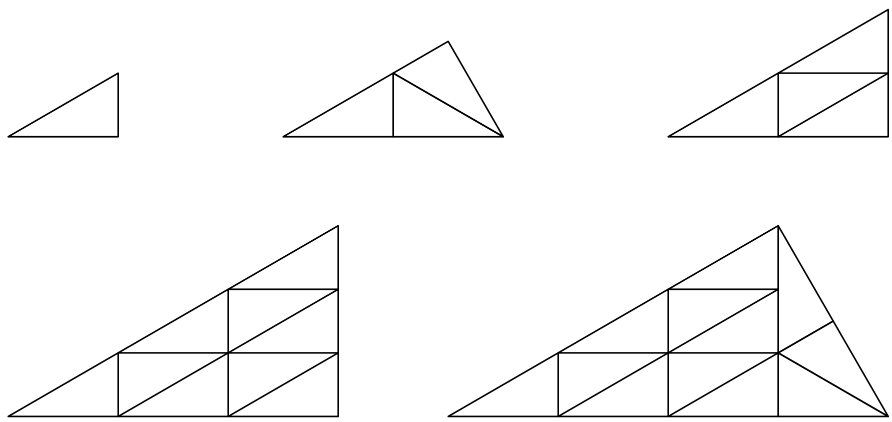
Jak mohly vypadat Mojmírovy složené trojúhelníky? Narýsujte alespoň čtyři možnosti. (*L. Hozová*)

Nápověda. Využijte dělení na šest shodných trojúhelníků.

Možné řešení. Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na 12 shodných trojúhelníků půlením šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, z nichž je pravidelný šestiúhelník utvořen:

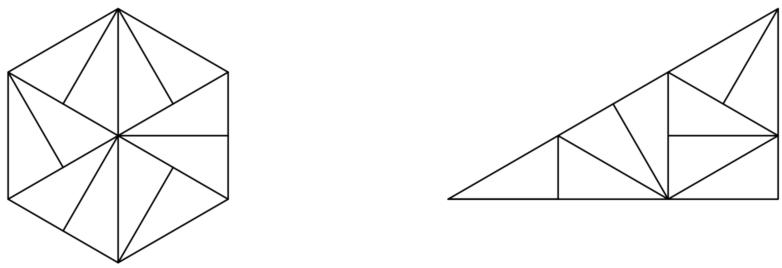


Z těchto trojúhelníků lze složit pravoúhlé trojúhelníky pomocí 1, 3, 4, 9, resp. všech 12 dílů např. takto:

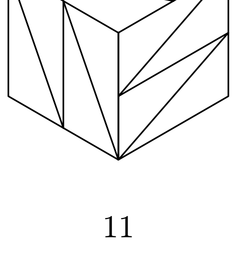


Ke zdůvodnění, že naznačené skládání je v pořádku, je třeba si uvědomit, že použité díly jsou trojúhelníky s vnitřními úhly 30°, 60°a 90°, jejichž nejdelší strana je shodná se stranou původního šestiúhelníku a nejkratší strana je poloviční.

Poznámky. Uvědomte si, že jak rozdělení původního šestiúhelníku, tak seskupení dílů (u větších trojúhelníků) může vypadat velmi různorodě. Proto i různá seskupení dílů v tomtéž trojúhelníku lze považovat za různá řešení úlohy. Viz např. následující ukázky:



Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na 12 shodných trojúhelníků také následujícím způsobem:



Největší vnitřní úhel v každém z těchto trojúhelníků je 120°, zbylé dva jsou přibližně 40,9°a 19,1°. Pomocí těchto trojúhelníků však nelze složit pravý úhel.

Pravidelný šestiúhelník lze též rozdělit na 12 shodných dílů netrojúhelníkového tvaru. Z takových dílů se trojúhelníky skládají jen těžko, pokud vůbec.

Z6–I–6

Pětice kamarádů porovnávala, kolik starého železa přivezli do sběru. Průměrně to bylo 55 kg, avšak Ivan přivezl jen 43 kg.

Kolik kg v průměru přivezli bez Ivana? (*L. Hozová*)

Nápověda. O kolik kg se liší Ivanův příspěvek od průměru?

Možné řešení. Ivan přivezl 43 kg, tj. o 12 kg méně, než byl (aritmetický) průměr všech kamarádů. Těchto 12 kg odpovídá průměrně 3 kg na každého ze čtyř zbylých kamarádů ($12 : 4 = 3$).

Bez Ivana kamarádi přivezli průměrně 58 kg železa ($55 + 3 = 58$).

Poznámka. Všech pět kamarádů dohromady přivezlo 275 kg železa ($5 \cdot 55 = 275$). Bez Ivana na ostatní připadlo 232 kg ($275 - 43 = 232$), tedy průměrně na jednoho 58 kg ($232 : 4 = 58$).