I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Věrka ze tří daných číslic sestavovala navzájem různá trojmístná čísla, přičemž u každého čísla použila všechny tři číslice. Takto sestavila všechna možná čísla a když je sečetla, vyšlo jí 1221.

Jaké číslice Věrka použila? Určete pět možností. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Mohla být některá z číslic 0?

Možné řešení. Aby Věrka mohla z daných číslic sestavit trojmístné číslo, musela být alespoň jedna číslice nenulová. Aby byl součet všech sestavených čísel čtyřmístný, musela sestavit alespoň dvě trojmístná čísla. Odtud vyplývá, že dané číslice nemohly být stejné a nanejvýš jedna z nich byla nulová.

V následujícím prověříme všechny možnosti (různá písmena označují různé nenulové číslice):

- S jednou číslicí nulovou a zbylými dvěma nenulovými různými lze sestavit čísla $\overline{ab0}$, $\overline{ba0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{b0a}$. Jejich součet je roven
$$(2a + 2b) \cdot 100 + (a + b) \cdot 10 + (a + b) = 211(a + b).$$
Číslo 1221 však není dělitelné 211, tímto způsobem tedy požadovaný součet dostat nelze.
- S jednou číslicí nulovou a zbylými dvěma stejnými lze sestavit čísla $\overline{aa0}$, $\overline{a0a}$. Jejich součet je roven
$$2a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = 211a.$$
Ze stejného důvodu jako v předchozím případě takto požadovaný součet dostat nelze.
- S třemi navzájem různými nenulovými číslicemi lze sestavit čísla $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Jejich součet je roven
$$(2a + 2b + 2c) \cdot 100 + (2a + 2b + 2c) \cdot 10 + (2a + 2b + 2c) = 222(a + b + c).$$
Číslo 1221 však není dělitelné 222, tímto způsobem tedy požadovaný součet dostat nelze.
- Se dvěma stejnými nenulovými číslicemi a třetím různým nenulovým lze sestavit čísla $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$. Jejich součet je roven
$$(2a + b) \cdot 100 + (2a + b) \cdot 10 + (2a + b) = 111(2a + b).$$
Protože $1221 = 111 \cdot 11$, lze požadovaný součet dostat právě tehdy, když $2a + b = 11$ neboli $b = 11 - 2a$. Mezi číslicemi od 1 do 9 vyhovují této podmínce právě dvojice:
$$a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$
$$b = 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1.$$

Věrka mohla použít kteroukoli z následujících trojic číslic:
$$(1, 1, 9), \quad (2, 2, 7), \quad (3, 3, 5), \quad (4, 4, 3), \quad (5, 5, 1).$$

Z8–I–2

TRN a HAM jsou shodné rovnostranné trojúhelníky. Přitom bod T je těžištěm trojúhelníku HAM a bod R leží na polopřímce TA.

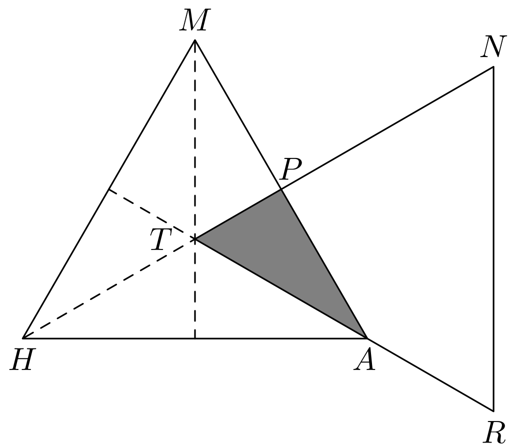
Jaký je poměr obsahů částí trojúhelníku TRN, které jsou uvnitř a vně trojúhelníku HAM? (*E. Semerádová*)

Nápověda. Těžiště je průsečíkem těžnic.

Možné řešení. Těžiště je průsečíkem těžnic, a ty jsou v rovnostranném trojúhelníku současně výškami i osami vnitřních úhlů. Těmito přímkami je trojúhelník HAM rozdělen na šest navzájem shodných trojúhelníků.

Zejména velikosti vnitřních úhlů každého z těchto trojúhelníků jsou 90° u vrcholů na stranách HAM (pata výšky), 30° u vrcholů HAM (polovina vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníku) a 60° u vrcholu T (aby součet všech byl 180°).

Označme P průsečík stran trojúhelníků HAM a TRN. Trojúhelník ATP je společnou částí trojúhelníků HAM a TRN. Porovnáním vnitřních úhlů u vrcholu T zjišťujeme, že trojúhelník ATP je jedním ze šesti výše zmiňovaných shodných trojúhelníků.



Trojúhelníky HAM a TRN jsou shodné a jejich společná část představuje $\frac{1}{6}$ obsahu každého. Proto část trojúhelníku TRN, která leží vně trojúhelníku HAM, představuje $\frac{5}{6}$ jeho obsahu. Poměr obsahů těchto částí je $1 : 5$.

Poznámka. Ze zadání nevíme, zda bod P leží na straně AM, nebo AH. Volba na obrázku není podstatná, v obou případech jsou závěry i jejich zdůvodnění stejné.

Z8–I–3

Na nově objevené planetě žijí zvířata, která astronauti pojmenovali podle počtu nohou jednonožky, dvounožky, trojnožky atd. (zvířata bez nohou nebyla nalezena). Zvířata s lichým počtem nohou mají dvě hlavy, zvířata se sudým počtem nohou mají jednu hlavu. V jisté prohlubni potkali skupinu takových zvířat a napočítali u nich 18 hlav a 24 nohou.

Kolik zvířat mohlo být v prohlubni? Určete všechny možnosti. (*T. Bárta*)

Nápověda. Počty hlav i nohou v prohlubni jsou sudé.

Možné řešení. Protože celkový počet hlav zvířat v prohlubni byl sudý, musel být počet jednohlavých zvířat sudý. Protože jednohlavá zvířata mají sudé počty nohou, dvouhlavá zvířata mají liché počty nohou a celkový počet nohou byl sudý, musel být počet dvouhlavých zvířat také sudý. Protože nohou bylo celkem 24, nemohlo být jednohlavých zvířat víc než 12.

Označme počet jednohlavých, resp. dvouhlavých zvířat v prohlubni j, resp. d. Předchozí závěry odpovídají požadavkům, aby j a d byla kladná sudá čísla a $j \leqq 12$. Informace o počtu hlav navíc znamená $j + 2d = 18$. Všem těmto požadavkům vyhovují právě následující dvojice čísel:

$$j = 2,\ 6,\ 10,$$
$$d = 8,\ 6,\ 4.$$

Pro každou z uvedených možností je třeba ověřit, zda mohla skutečně nastat, tj. zda existuje příklad počtů jednotlivých druhů zvířat se správným celkovým počtem nohou:

- Pro $j = 2$ a $d = 8$ mohlo jít např. o 2 čtyřnožky, 4 jednonožky a 4 trojnožky $(2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 24)$.
- Pro $j = 6$ a $d = 6$ mohlo jít např. o 6 dvounožek, 3 jednonožky a 3 trojnožky $(6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24)$.
- Pro $j = 10$ a $d = 4$ mohlo jít o 10 dvounožek a 4 jednonožky $(10 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24)$.

V prohlubni mohlo být 10, 12, nebo 14 zvířat.

Z8–I–4

V dané skupině čísel je jedno číslo rovno průměru všech, největší číslo je o 7 větší než průměr, nejmenší je o 7 menší než průměr a většina čísel ze skupiny má podprůměrnou hodnotu.

Jaký nejmenší počet čísel může být ve skupině? (*K. Pazourek*)

Nápověda. Jaký je průměr tří blížeji popsaných čísel ze skupiny?

Možné řešení. Označme průměr čísel ve skupině p. Nejmenší číslo ze skupiny je $p - 7$, největší $p + 7$. Průměr těchto tří čísel je p, průměr zbylých čísel ze skupiny proto musí být tentýž.

Tedy některá ze zbylých čísel musí být menší, některá větší než p. Aby navíc většina čísel byla podprůměrných, musí být těch, která jsou menší než p, alespoň o dvě víc než těch, která jsou větší než p.

Ve skupině je nejméně sedm čísel, schematicky uspořádaných následovně:

$$p - 7, \quad *, \quad *, \quad *, \quad p, \quad *, \quad p + 7.$$

Poznámky. Vyhovujících sedmic čísel je neomezené množství; lze je popsat např. takto

$$p - 7, \quad p - a, \quad p - b, \quad p - c, \quad p, \quad p + d, \quad p + 7,$$

kde $0 < a, b, c, d \leqq 7$ a $a + b + c = d$. (Příkladem může být sedmice -7, -4, -1, -1, 0, 6, 7.)

Formální zdůvodnění úvodního postřehu vyplývá z definice (aritmetického) průměru: pokud zbylých čísel ze skupiny je n a jejich součet je s, potom jejich průměr je $\frac{s}{n}$, zatímco průměr všech je $\frac{s+3p}{n+3} = p$. Úpravami druhého výrazu dostáváme $\frac{s}{n} = p$.

Úlohu je možné řešit postupným zvyšováním počtu čísel ve skupině a ověřováním všech zadaných podmínek.

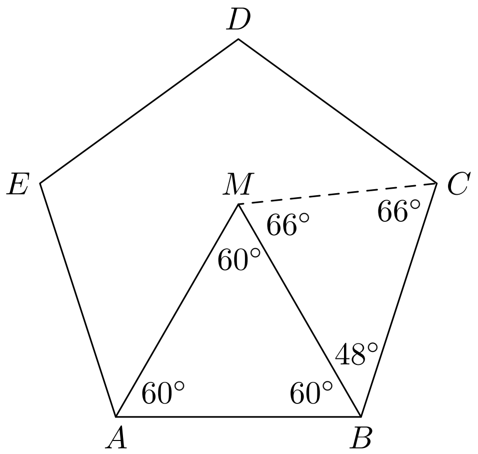
Z8–I–5

V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je obsažen rovnostranný trojúhelník ABM. Určete velikost úhlu BCM. *(L. Hozová)*

Nápověda. Jaké jsou velikosti vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku?

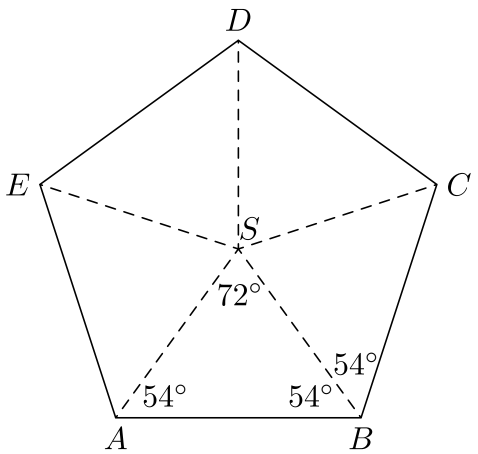
Možné řešení. Velikost vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku je $60°$, velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je $108°$. U vrcholu B tak zjišťujeme, že velikost úhlu CBM je $108° - 60° = 48°$.

Úsečky AB, BC a BM jsou navzájem shodné, tedy trojúhelník CBM je rovnoramenný se základnou CM. Vnitřní úhly u základny jsou shodné a součet všech je přímý úhel. Velikost úhlu BCM je proto rovna $\frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$.



Poznámka. Obecný n-úhelník lze rozdělit na $n - 2$ trojúhelníky (jejichž vrcholy jsou vrcholy n-úhelníku), tedy součet velikostí jeho vnitřních úhlů je $(n-2) \cdot 180°$. Pravidelný n-úhelník má všechny vnitřní úhly shodné, tedy velikost každého je $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Odtud plynou úvodní vztahy pro $n = 3$ a $n = 5$.

Pravidelný n-úhelník lze též rozdělit na n shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu n-úhelníku. Pro $n = 5$ dostáváme, že úhel ASB má velikost $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$, tedy že úhly SAB, SBA atd. mají velikost $\frac{1}{2}(180° - 72°) = 54°$.



Z8–I–6

Alenka dostala list papíru s následujícím sdělením:

A. *Nejvýše jedno z tvrzení A, B, C, D, E je pravdivé.*
B.
C. *Všechna tvrzení A, B, C, D, E jsou pravdivá.*
D.
E. *Tvrzení A je pravdivé.*

Tvrzení B a D byla napsána neviditelným inkoustem, který lze přečíst jen pod speciální lampou. Než Alenka takovou lampu našla, dokázala rozhodnout, zda může těmto tvrzením důvěřovat.

Určete i vy, která z tvrzení A, B, C, D, E jsou pravdivá a která nepravdivá.

(*I. Jančigová*)

Nápověda. Postupujte systematicky a promýšlejte všechny důsledky.

Možné řešení. Pokud by tvrzení A bylo pravdivé, potom by také tvrzení E bylo pravdivé. To by však byla pravdivá dvě tvrzení, což by bylo v rozporu s tvrzením A.

Pokud by tvrzení C bylo pravdivé, potom by všechna tvrzení měla být pravdivá. To by však bylo pravdivých tvrzení víc než jedno, což by bylo v rozporu s tvrzením A.

Pokud by tvrzení E bylo pravdivé, potom by tvrzení A mělo být také pravdivé. To by však byla pravdivá dvě tvrzení, což by bylo v rozporu s tvrzením A.

Tedy všechna viditelná tvrzení jsou nepravdivá. Z nepravdivosti A vyplývá, že alespoň dvě ze všech tvrzení jsou pravdivá, a to musí být ta neviditelná.

Tvrzení B, D jsou pravdivá, tvrzení A, C, E jsou nepravdivá.

Poznámka. V předchozím tiše předpokládáme, že každé z tvrzení je buď pravdivé, nebo nepravdivé (odborně mluvíme o *výrocích*). Uvědomte si, že existují problematická sdělení, o jejichž pravdivosti či nepravdivosti nelze rozhodnout (viz např. *Toto tvrzení je nepravdivé*).