

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Karel narýsoval trojúhelník ADE . Na straně AD vyznačil body B a C tak, že platilo:

- bod C je středem strany AD ,
- trojúhelníky ABE a BCE mají stejný obsah,
- trojúhelník BDE je rovnoramenný se základnou BE ,
- obvod trojúhelníku ABE je o 6 cm větší než délka lomené čáry EBC ,
- obvod trojúhelníku ACE je o 2 cm větší než obvod trojúhelníku CDE ,

Vypočtete obvod trojúhelníku ADE . (E. Semerádová)

Z7–II–2

Jsem Ivan a jsem třikrát mladší než můj otec. Mám bratry Vincenta a Jakuba, kterým je 11 a 9 let. Můj věk je roven pětinasobku třetiny věku mladšího z bratrů. Zvláště naší rodiny je, že jsme se všichni narodili 12. dubna, takže dnes slavíme narozeniny.

Za kolik let bude věk našeho otce roven součtu věků nás tří bratrů? (L. Hozová)

Z7–II–3

Eva měla šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (na každé kartičce byla jedna číslice). Přeskupováním všech šesti kartiček tvořila skupiny čísel a sledovala jejich vlastnosti. Zjistila, že umí různými způsoby poskládat trojice čísel, z nichž každé je dělitelné šesti.

Určete všechny takové trojice čísel. (E. Novotná)

Okresní kolo kategorie Z7 se koná **12. dubna 2022** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 2 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 9 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory a jiné elektronické pomůcky povoleny nejsou.

Řeší-li žák okresní kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 2 hodin a 20 minut po začátku soutěže, nejpozději však ve 12:20. Aby mohly být uznány číselné výsledky, musí odevzdané řešení obsahovat pomocné výpočty.

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Karel narýsoval trojúhelník ADE . Na straně AD vyznačil body B a C tak, že platilo:

- bod C je středem strany AD ,
- trojúhelníky ABE a BCE mají stejný obsah,
- trojúhelník BDE je rovnoramenný se základnou BE ,
- obvod trojúhelníku ABE je o 6 cm větší než délka lomené čáry EBC ,
- obvod trojúhelníku ACE je o 2 cm větší než obvod trojúhelníku CDE ,

Vypočtete obvod trojúhelníku ADE . (E. Semerádová)

Možné řešení. Trojúhelníky ABE a BCE mají stejný obsah a dohromady tvoří trojúhelník ACE . Tedy bod B je středem úsečky AC neboli úsečky AB a BC jsou shodné. Trojúhelník ABE a lomená čára EBC mají společnou stranu EB a přitom $|AB| = |BC|$. Zadaný rozdíl tedy odpovídá straně AE , tj. $|AE| = 6$ cm.

Bod C je středem úsečky AD , tedy úsečky AC a CD jsou shodné. Trojúhelníky ACE a CDE mají společnou stranu CE a přitom $|AC| = |CD|$. Rozdíl obvodů tedy odpovídá rozdílu délek stran AE a DE , tj. $|AE| = |DE| + 2$ cm neboli $|DE| = 6 - 2 = 4$ cm.

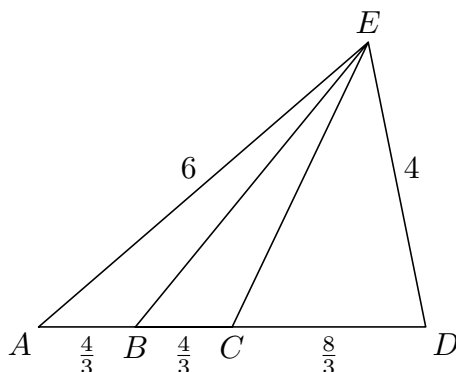
Trojúhelník BDE je rovnoramenný se základnou BE , tedy $|DB| = |DE| = 4$ cm. Úsečky AB a BC jsou shodné a stejně tak úsečky AC a CD jsou shodné, tedy $|AB| = \frac{1}{4}|AD|$ neboli $|BD| = \frac{3}{4}|AD|$. Odtud dostáváme $|AD| = \frac{4}{3}|BD| = \frac{16}{3}$ cm.

Obvod trojúhelníku ADE je roven

$$|AD| + |DE| + |EA| = \frac{16}{3} + 4 + 6 = \frac{46}{3} \doteq 15,33 \text{ (cm)}.$$

Hodnocení. 3 body za pomocné postřehy a dílčí výsledky; 3 body za dopočítání a kvalitní komentáře.

Poznámka. Útvar vypadá až na měřítko takto:



Z7–II–2

Jsem Ivan a jsem třikrát mladší než můj otec. Mám bratry Vincenta a Jakuba, kterým je 11 a 9 let. Můj věk je roven pětinasobku třetiny věku mladšího z bratrů. Zvláště naší rodiny je, že jsme se všichni narodili 12. dubna, takže dnes slavíme narozeniny.

Za kolik let bude věk našeho otce roven součtu věků nás tří bratrů? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Mladšímu z bratrů je 9 let, tedy mně je 15 let ($\frac{9}{3} \cdot 5 = 15$). Jsem třikrát mladší než můj otec, tedy otci je 45 let ($3 \cdot 15 = 45$). Součet věků nás tří bratrů je 35 let ($11 + 9 + 15 = 35$).

Věk otce je o 10 let větší než součet věků nás tří bratrů a tento rozdíl se každým rokem snižuje o 2 (otci přibude 1 rok, zatímco v našem součtu přibudou 3 roky). Věk otce bude stejný jako součet věků nás tří bratrů za 5 let ($10 : 2 = 5$).

Hodnocení. 3 body za dílčí výsledky; 3 body za dopočítání a kvalitu komentáře.

Poznámka. Úlohu lze řešit postupným připočítáváním roků k věku otce a součtu věků bratrů, dokud nebude rozdíl nulový. Symbolicky: za r roků bude otcův věk $45 + r$, zatímco součet věků bratrů bude $35 + 3r$. Požadovaná rovnost po úpravách dává

$$\begin{aligned}35 + 3r &= 45 + r, \\2r &= 10, \\r &= 5.\end{aligned}$$

Z7–II–3

Eva měla šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (na každé kartičce byla jedna číslice). Přeskupováním všech šesti kartiček tvořila skupiny čísel a sledovala jejich vlastnosti. Zjistila, že umí různými způsoby poskládat trojice čísel, z nichž každé je dělitelné šesti.

Určete všechny takové trojice čísel. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Číslo je dělitelné šesti, právě když je sudé a součet jeho číslic je dělitelný třemi. Tři vytvořená čísla musí končit sudou číslicí, a ty jsou k dispozici právě tři:

$$2, \quad 4, \quad 6.$$

Jediná volnost v tvorbě čísel je tedy na předchozích místech.

Přidáním číslice 3 k jakémukoli číslu neovlivní jeho dělitelnost, příp. nedělitelnost třemi. Můžeme tedy přednostně uvažovat o doplnění zbylých číslic 1 a 5 tak, aby byla zajištěna dělitelnost třemi. To lze udělat jediné takto:

$$12, \quad 54, \quad 6.$$

Pokud po doplnění 3 vznikne trojmístné číslo, můžeme číslice na prvních dvou místech prohodit, aniž by se některá z kontrolovaných vlastností pokazila. Celkem tak dostáváme pět vyhovujících možností:

$$\begin{aligned}312, \quad 54, \quad 6, \\132, \quad 54, \quad 6, \\12, \quad 354, \quad 6, \\12, \quad 534, \quad 6, \\12, \quad 54, \quad 36.\end{aligned}$$

Hodnocení. 2 body za přípravné postřehy s dělitelností; 2 body za shrnutí a výčet možností; 2 body za kvalitu komentáře.