71. ročník Matematické olympiády (2021/22)

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Trojmístné číslo má ciferný součet 16. Jestliže v tomto čísle zaměníme číslice na místech stovek a desítek, číslo se o 360 zmenší. Jestliže v původním čísle zaměníme číslice na místech desítek a jednotek, číslo se o 54 zvětší.

Najděte ono trojciferné číslo. (*L. Hozová*)

Z9–II–2

Deltoid $ABCD$ je souměrný podle úhlopříčky AC. Délka AC je 12 cm, délka BC je 6 cm a vnitřní úhel u vrcholu B je pravý. Na stranách AB, AD jsou dány body E, F tak, že trojúhelník ECF je rovnostranný.

Určete délku úsečky EF. (*K. Pazourek*)

Z9–II–3

Ludvík si u jistého příkladu na dělení všiml, že když dělenec zdvojnásobí a dělitel zvětší o 12, dostane jako výsledek svoje oblíbené číslo. Totéž číslo by dostal, i kdyby původní dělenec zmenšil o 42 a původní dělitel zmenšil na polovinu.

Určete Ludvíkovo oblíbené číslo. (*M. Petrová*)

Z9–II–4

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že E je průsečíkem úhlopříček, trojúhelníky ADE, BCE, CDE mají po řadě obsahy $12\,\mathrm{cm}^2$, $45\,\mathrm{cm}^2$, $18\,\mathrm{cm}^2$ a délka strany AB je 7 cm.

Určete vzdálenost bodu D od přímky AB. (*M. Petrová*)

Okresní kolo kategorie Z9 se koná **26.ledna 2022** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 12 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory a jiné elektronické pomůcky povoleny nejsou.

Řeší-li žák okresní kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 4 hodin a 20 minut po začátku soutěže, nejpozději však ve 14:20. Aby mohly být uznány číselné výsledky, musí odevzdané řešení obsahovat pomocné výpočty.

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Trojmístné číslo má ciferný součet 16. Jestliže v tomto čísle zaměníme číslice na místech stovek a desítek, číslo se o 360 zmenší. Jestliže v původním čísle zaměníme číslice na místech desítek a jednotek, číslo se o 54 zvětší.

Najděte ono trojciferné číslo. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme původní trojmístné číslo $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Podle první informace ze zadání platí

$$a + b + c = 16. \tag{1}$$

Podle druhé informace platí $\overline{bac} = \overline{abc} - 360$, tedy

$$\begin{aligned} 100b + 10a + c &= 100a + 10b + c - 360, \\ 360 &= 90a - 90b, \\ 4 &= a - b. \end{aligned} \tag{2}$$

Podle třetí informace platí $\overline{acb} = \overline{abc} + 54$, tedy

$$\begin{aligned} 100a + 10c + b &= 100a + 10b + c + 54, \\ 9c - 9b &= 54, \\ c - b &= 6. \end{aligned} \tag{3}$$

Pokud ze druhé, resp. třetí informace vyjádříme $a = b + 4$, resp. $c = b + 6$ a dosadíme do první, dostaneme $3b + 10 = 16$, tedy $b = 2$. Dosazením tohoto výsledku do předchozích vyjádření získáme $a = 6$ a $c = 8$. Původní trojmístné číslo bylo 628.

Hodnocení. Po 2 bodech za každou z rovnic (2) a (3); 2 body za dořešení soustavy a určení neznámého čísla. Správné řešení bez dalšího komentáře hodnoťte 1 bodem.

Poznámky. Rozdíly čísel vzniklých záměnou dvou číslic jsou vždy násobkem devíti, přičemž příslušný násobek odpovídá místům zaměňovaných číslic. Např. v předchozím řešení vidíme $\overline{abc} - \overline{bac} = 90(a-b)$ a $\overline{abc} - \overline{acb} = 9(b-c)$, obdobně $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-b)$. Taková či podobná rozvaha před samotným řešením úlohy dovoluje rychlejší odvození vztahů (2) a (3).

Druhou, resp. třetí informaci ze zadání lze názorně zapsat takto:

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ -\ b\ a\ c \\ \hline 3\ 6\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ c\ b \\ -\ a\ b\ c \\ \hline 5\ 4 \end{array}$$

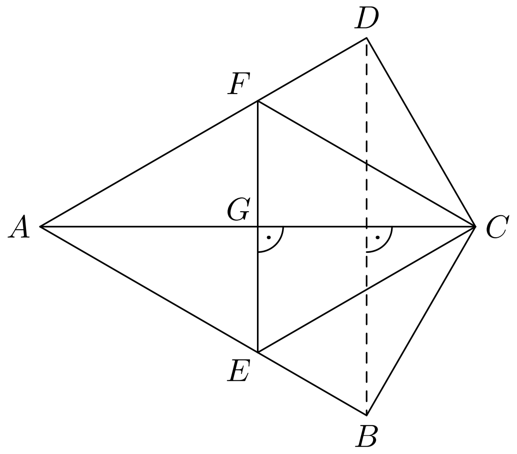
Porovnáním míst u nejvyšších řádů zjišťujeme, že rozdíl $a-b$ je 3 nebo 4, resp. rozdíl $c-b$ je 5 nebo 6 (dvě možnosti u každého rozdílu odpovídají tomu, zda uvažujeme přechod přes desítku či nikoli). Tato omezení společně s (1) dávají jediné řešení, které lze odhalit systematickým zkoušením možností. Např. podmínkám $a-b = 4$ a $a+b+c = 16$ vyhovují čísla 952, 844, 736 a 628, z nichž pouze poslední uvedené vyhovuje též omezení na rozdíl $c - b$.

Z9–II–2

Deltoid $ABCD$ je souměrný podle úhlopříčky AC. Délka AC je 12 cm, délka BC je 6 cm a vnitřní úhel u vrcholu B je pravý. Na stranách AB, AD jsou dány body E, F tak, že trojúhelník ECF je rovnostranný.

Určete délku úsečky EF. (*K. Pazourek*)

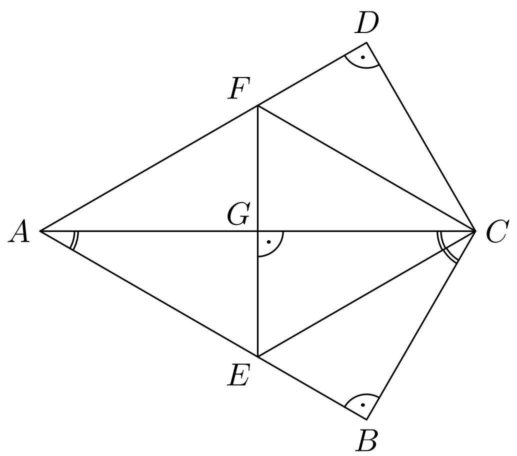
Možné řešení. Trojúhelníky ACB a ACD jsou souměrné podle společné strany AC, body E, F leží na stranách AB, AD a trojúhelník ECF je rovnostranný, tedy také tento trojúhelník je souměrný podle AC. Zejména úsečky EF a AC jsou kolmé; jejich průsečík označíme G.



Vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku mají velikost 60°. Osa souměrnosti, resp. výška rovnostranného trojúhelníku tento úhel půlí a rozděluje trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky se zbylými vnitřními úhly 30°a 60°. Poměr přepony a kratší odvěsny v těchto menších trojúhelnících je právě 2 : 1. Tyto obecné poznatky využijeme v naší úloze několikerým způsobem:

Jednak přímka AC je osou souměrnosti trojúhelníku ECF, tedy úhel ACE má velikost 30°. Jednak poměr přepony a kratší odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku ABC je podle zadání 2 : 1, tedy se jedná o polovinu rovnostranného trojúhelníku, jehož zbylé vnitřní úhly BAC a ACB mají velikosti 30°a 60°.

Odtud vyvozujeme, že úhel BCE má velikost 30°(rozdíl úhlů ACB a ACE). Tedy trojúhelník ABC sestává ze tří navzájem shodných pravoúhlých trojúhelníků AGE, CGE a CBE (shodují se ve vnitřních úhlech a každé dva mají společnou stranu).



Delší odvěsna v každém z těchto tří trojúhelníků se shoduje se stranou BC, která má délku 6 cm. Navíc poměr přepony a kratší odvěsny je 2 : 1. Pokud velikost přepony označíme a, potom podle Pythagorovy věty platí

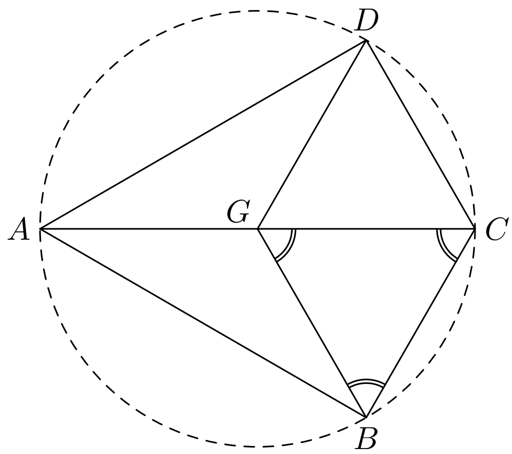
$$a^2 = 36 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Po úpravě dostáváme $a^2 = 48$, tedy $a = 4\sqrt{3} \doteq 6{,}93\,(\mathrm{cm})$. A to je velikost úsečky EF.

Hodnocení. 2 body za určení potřebných úhlů, resp. rozpoznání polovin rovnostranných trojúhelníků; 2 body za dopočítání velikosti EF; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.

Poznámky. Závěrečný výpočet může být nahrazen odkazem na známý vztah mezi výškou a stranou rovnostranného trojúhelníku. S uvedeným značením platí $6 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, tedy $a = 4\sqrt{3}$.

Se znalostí Thaletovy věty, resp. věty opačné lze k velikosti úhlu ACB dospět následovně: Protože u vrcholů B a D je pravý úhel, leží oba na kružnici s průměrem AC. Střed této kružnice je středem úsečky AC a označíme jej G (tentýž bod jako v řešení uvedeném výše). Podle zadání je poloměr této kružnice roven délce strany BC ($\frac{1}{2}|AC| = |BC|$). Tedy trojúhelník GCB je rovnostranný, zejména vnitřní úhel u vrcholu C má velikost 60°.



Z uvedeného mj. vyplývá, že body A, B, C, D jsou čtyři z vrcholů pravidelného šestiúhelníku.

Z9–II–3

Ludvík si u jistého příkladu na dělení všiml, že když dělenec zdvojnásobí a dělitel zvětší o 12, dostane jako výsledek svoje oblíbené číslo. Totéž číslo by dostal, i kdyby původní dělenec zmenšil o 42 a původní dělitel zmenšil na polovinu.

Určete Ludvíkovo oblíbené číslo. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pokud účinkující v původním příkladu označíme jako $a : b$, potom Ludvíkovo pozorování můžeme zapsat takto:

$$2a : (b + 12) = (a - 42) : \frac{b}{2}.$$

To je dvojí vyjádření Ludvíkova oblíbeného čísla, které kvůli následným úpravám označíme jako ℓ.

Z vyjádření vlevo dostáváme

$$2a = b\ell + 12\ell,$$

z vyjádření vpravo dostáváme

$$a - 42 = \frac{b}{2} \cdot \ell,$$
$$2a = b\ell + 84.$$

Porovnáním těchto dvou vyjádření zjišťujeme, že $12\ell = 84$, tedy Ludvíkovo oblíbené číslo je $\ell = 7$.

Hodnocení. 3 body za zápis vztahů ze zadání a pomocné úpravy; 3 body za dopočítání, výsledek a kvalitu komentáře.

Poznámky. Dvojic čísel a a b vyhovujících Ludvíkově rovnosti je neomezené množství. Nahodile odhalené možnosti vedoucí ke správnému výsledku (např. $a = 49$ a $b = 2$) nelze považovat za úplné řešení úlohy — takové zpracování hodnoťte nejvýše 3 body.

Bez dodatečného značení podílu můžeme upravovat úvodní rovnost:

$$\begin{aligned} 2a \cdot \frac{b}{2} &= (a-42)(b+12), \\ ab &= ab - 42b + 12a - 12 \cdot 42, \\ 42(b+12) &= 12a. \end{aligned}$$

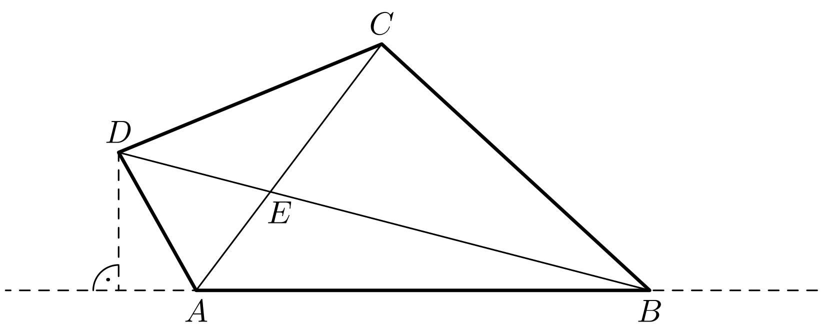
Odtud po krácení dostáváme $2a = 7(b + 12)$, tedy hledaný podíl je $2a : (b + 12) = 7$.

Z9–II–4

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že E je průsečíkem úhlopříček, trojúhelníky ADE, BCE, CDE mají po řadě obsahy $12\,\mathrm{cm}^2$, $45\,\mathrm{cm}^2$, $18\,\mathrm{cm}^2$ a délka strany AB je $7\,\mathrm{cm}$.

Určete vzdálenost bodu D od přímky AB. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Ze znalosti obsahů dílčích trojúhelníků určíme obsah trojúhelníku ABD. Ze znalosti délky strany AB určíme vzdálenost bodu D od přímky AB.



Trojúhelníky ADE a CDE mají společnou stranu DE a strany AE a EC ležící na jedné přímce. Poměr jejich obsahů je tedy stejný jako poměr délek stran AE a EC,

$$|AE| : |EC| = 12 : 18 = 2 : 3. \qquad (*)$$

Obdobně trojúhelníky ABE a BCE mají společnou stranu BE a strany AE a EC ležící na jedné přímce. Poměr jejich obsahů je tedy stejný jako poměr délek stran AE a EC,

$$S_{ABE} : 45 = 2 : 3.$$

Odtud dostáváme $S_{ABE} = 30\,\mathrm{cm}^2$. Obsah trojúhelníku ABD je součtem obsahů trojúhelníků ABE a ADE,

$$S_{ABD} = 30 + 12 = 42\,(\mathrm{cm}^2).$$

Tento obsah je roven polovině součinu velikosti strany AB a vzdálenosti bodu D od této strany, $S_{ABD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot v$. Obsah ABD i velikost AB známe, tedy hledaná vzdálenost je rovna

$$v = \frac{2 \cdot 42}{7} = 12\,(\mathrm{cm}).$$

Hodnocení. 4 body za obsah trojúhelníku ABD; 2 body za hledanou vzdálenost a kvalitu komentáře.

Poznámky. Úvahy a vztahy z první části uvedeného řešení lze stručně zapsat jako $S_{ADE} : S_{CDE} = S_{ABE} : S_{BCE}$, ekvivalentně jako $S_{BCE} : S_{CDE} = S_{ABE} : S_{ADE}$, kde jedinou neznámou je obsah S_{ABE}.

Také platí, že poměr obsahů $S_{ABD} : S_{BCD}$ je stejný jako poměr výšek trojúhelníků vzhledem ke společné straně BD, a ten je stejný jako poměr úseček $|AE| : |EC|$. Přitom $S_{BCD} = S_{BCE} + S_{CDE}$ známe ze zadání a poměr $|AE| : |EC|$ je odvozen v $(*)$. Odtud je možné vyjádřit S_{ABD}.