72. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY (2022/2023)

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Nechť a a b ($a > b$) jsou kladná celá čísla, jejichž součet je osminásobkem jejich největšího společného dělitele. Dokažte, že číslo $a^2 - b^2$ nebo jeho trojnásobek je druhou mocninou celého čísla.

2. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z splňují nerovnost

$$(x + y + z)^2 > 2\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dokažte, že čísla x, y, z jsou buď všechna kladná, nebo všechna záporná.

3. Na stranách AB a BC daného trojúhelníku ABC leží po řadě takové body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokažte, že $|AE| = |BE|$.

4. Kolik 33místných čísel dělitelných 3 neobsahuje ve svém zápisu číslici 3? Výsledek zapište ve tvaru součinu mocnin prvočísel.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 4. dubna 2023

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Nechť a a b ($a > b$) jsou kladná celá čísla, jejichž součet je osminásobkem jejich největšího společného dělitele. Dokažte, že číslo $a^2 - b^2$ nebo jeho trojnásobek je druhou mocninou celého čísla.* (Zdeněk Pezlar a Michal Pecho)

Řešení. Označme d největšího společného dělitele čísel a, b. Pak platí $a = da'$ a $b = db'$, kde přirozená čísla a' a b' jsou nesoudělná a přitom podle zadání platí $a' > b'$.

Zadanou podmínku na součet $a+b$ vyjádříme rovností $da' + db' = 8d$. Z ní po vydělení číslem d dostaneme $a' + b' = 8$. Dvojice (a', b') přirozených čísel se součtem 8 a vlastností $a' > b'$ je proto jedna z dvojic $(7, 1)$, $(6, 2)$ nebo $(5, 3)$, prostřední z nich však rovnou vyloučíme kvůli soudělnosti čísel 6 a 2.

Pro dvojici $(7, 1)$ vychází

$$a^2 - b^2 = d^2\bigl(7^2 - 1^2\bigr) = 48d^2 = 3 \cdot (4d)^2.$$

Trojnásobek tohoto čísla je tedy druhá mocnina celého čísla $12d$.

Pro dvojici $(5, 3)$ dostáváme

$$a^2 - b^2 = d^2\bigl(5^2 - 3^2\bigr) = 16d^2 = (4d)^2,$$

což je přímo druhá mocnina celého čísla $4d$.

Tvrzení úlohy tak platí v obou případech, které připadly v úvahu.

Poznámka. Z rovnosti $(ka)^2 - (kb)^2 = k^2(a^2 - b^2)$ pro každé celé $k > 1$ si lze povšimnout, že číslo $(ka)^2 - (kb)^2$ nebo jeho trojnásobek je druhou mocninou celého čísla právě tehdy, když je takové číslo $a^2 - b^2$. Proto stačí tvrzení úlohy dokázat pro případ, kdy čísla a a b jsou nesoudělná, tj. platí $d = 1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Vyjádření $a = a'd$, $b = b'd$: 1 bod.
A2. Odvození rovnosti $a' + b' = 8$: 3 body.
A3. Důkazy tvrzení úlohy pro každý z jednotlivých případů, kdy platí $a' + b' = 8$: 0–3 body podle míry úplnosti.
B1. Zdůvodnění, že je možné předpokládat $d = 1$ (a nezavádět tak čísla a', b', tj. místo nich psát a, b): 2 body.

Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{B1}) + \mathrm{A3}$ bodů.

2. *Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z splňují nerovnost*

$$(x+y+z)^2 > 2\,(x^2+y^2+z^2).$$

Dokažte, že čísla x, y, z jsou buď všechna kladná, nebo všechna záporná.

(Jaromír Šimša)

Řešení. Nerovnost, kterou čísla x, y, z splňují, nejprve algebraicky upravíme:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &> 2(x^2+y^2+z^2),\\ 2xz+2yz &> x^2+y^2+z^2-2xy,\\ 2x(y+z) &> (x-y)^2+z^2.\end{aligned}$$

Jelikož poslední pravá strana jakožto součet dvou druhých mocnin je nezáporná, musí být kladný součin $x(y+z)$ z levé strany této rovnosti. Protože výchozí nerovnost je zřejmě v proměnných x, y, z symetrická, jejím důsledkem jsou tři nerovnosti

$$x(y+z) > 0, \qquad y(z+x) > 0, \qquad z(x+y) > 0. \tag{1}$$

Podle (1) jsou všechna tři čísla x, y, z různá od nuly. Kdyby tudíž dokazovaný závěr neplatil, nastal by jeden ze dvou následujících případů.

- Dvě z čísel x, y, z jsou kladná a zbylé je záporné.
- Dvě z čísel x, y, z jsou záporná a zbylé je kladné.

V obou těchto případech však jedna z nerovností (1) neplatí: Vynásobíme-li totiž součet dvou kladných (resp. záporných) čísel s číslem záporným (resp. kladným), dostaneme ve výsledku záporné číslo. Tento spor už dokazuje tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Ukážeme jiný způsob provedení důkazu sporem. Povšimneme si úvodem, že zadaná nerovnost se nezmění, pokud trojici čísel (x,y,z) do ní dosadíme v jakémkoli jiném pořadí. Totéž platí při záměně trojice (x,y,z) trojicí $(-x,-y,-z)$.

Předpokládejme tedy, že tvrzení úlohy neplatí. Mějme tudíž čísla x, y, z, která splňují zadanou nerovnost, avšak všechna tři nejsou ani kladná, ani záporná. To při uspořádání $x \geqq y \geqq z$, které umíme zařídit, znamená, že $x \geqq 0$ a $z \leqq 0$. Platí tedy $x \geqq y \geqq 0 \geqq z$ nebo $x \geqq 0 \geqq y \geqq z$. Stačí uvažovat pouze první možnost, neboť od té druhé přejdeme k první, když trojici (x,y,z) zaměníme trojicí $(-z,-y,-x)$.

Nechť tedy $x \geqq y \geqq 0 \geqq z$. S ohledem na to zadanou nerovnost, kterou čísla x, y, z splňují, upravíme následovně:

$$\begin{aligned}0 &> x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz,\\ 0 &> (x-y)^2+z^2-2xz-2yz.\end{aligned}$$

Všechny členy na pravé straně jsou však nezáporné – první dva jakožto druhé mocniny, zbylé dvě nerovnosti $-2xz \geqq 0$ a $-2yz \geqq 0$ platí díky našemu předpokladu $x \geqq y \geqq 0 \geqq z$. Tím je důkaz sporem hotov.

Jiné řešení. Zadanou nerovnost tentokrát upravíme na tvar

$$(x-y-z)^2-4yz<0,$$

z něhož díky nerovnosti $(x-y-z)^2 \geqq 0$ plyne $yz>0$, takže čísla y, z jsou buď obě kladná, nebo obě záporná. S ohledem na symetrii výchozí nerovnosti totéž platí i pro zbylé dvojice čísel x, z resp. x, y, takže všechna tři čísla x, y, z jsou buď kladná, nebo záporná, jak jsme měli ukázat.

Jiné řešení. Zadanou nerovnost upravíme standardním způsobem na kvadratickou nerovnost v proměnné x:

$$x^2-2(y+z)x+(y-z)^2<0.$$

Takto zapsaná nerovnice s neznámou x má podle předpokladu řešení. Proto grafem kvadratické funkce s předpisem

$$f(x)=x^2-2(y+z)x+(y-z)^2 \tag{2}$$

je taková parabola, jejíž část leží pod osou x. Příslušná kvadratická rovnice $f(x)=0$ proto má dva různé kořeny, tudíž její diskriminant D je kladný:

$$0<D=4(y+z)^2-4(y-z)^2=16yz.$$

Odtud plyne $yz>0$. Podobně jako v předchozím řešení ze symetrie plyne rovněž $xy>0$ a $xz>0$, tedy všechna tři čísla x, y, z mají stejná znaménka.

Poznámka. Ukažme, jak některé poznatky z předchozích řešení, a vlastně i celý nový důkaz, plynou z dalších úvah o výše zmíněné parabole, která je grafem kvadratické funkce (2). Ta díky zadanému předpokladu nabývá aspoň jednu zápornou hodnotu.

Doplněním na čtverec trojčlenu z pravé strany (2) získáme vyjádření, které jsme dříve využili v třetím řešení, totiž

$$f(x)=(x-y-z)^2-4yz.$$

Z něho vidíme, že funkce f má nejmenší hodnotu v bodě $x_0=y+z$, která je přitom rovna $f(x_0)=-4yz$. Z nerovnosti $f(x_0)<0$ proto plyne, stejně jako z nerovnosti $D>0$ ve čtvrtém řešení, nerovnost $yz>0$. Proto y a z jsou nenulová čísla se stejným znaménkem, které tak má i číslo $x_0=y+z$. Jelikož navíc platí $f(0)=(y-z)^2 \geqq 0$, dané číslo x s vlastností $f(x)<0$ má (díky poloze paraboly) stejné znaménko jako číslo x_0, a tudíž (zde bez úvah o symetrii) jako i obě čísla y a z, jak jsme měli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Odvození nerovnosti typu $x(y+z)>0$: 3 body.
A2. Zdůvodněné uspořádání typu $x \geqq y \geqq 0 \geqq z$ při důkazu sporem: 2 body.
A3. Úprava nerovnosti do tvaru typu $2xz+2yz>(x-y)^2+z^2$: 2 body.
B1. Úprava nerovnosti do tvaru typu $(x-y-z)^2-4yz<0$: 3 body.
B2. Odvození nerovnosti typu $xy>0$: 4 body.

Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}+\mathrm{A3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2})$ bodů.

3. *Na stranách AB a BC daného trojúhelníku ABC leží po řadě takové body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokažte, že $|AE| = |BE|$.* (Patrik Bak)

Řešení. Označme $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Z rovnoramenných trojúhelníků BCD a CDE tak postupně máme

$$\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CDE|.$$

Dokazovaná rovnost $|AE| = |BE|$ bude platit, právě když v trojúhelníku ABE, v němž $|\sphericalangle ABE| = \beta$, bude rovněž $|\sphericalangle EAB| = \beta$ neboli $|\sphericalangle EAD| = \beta$. To díky rovnosti $|\sphericalangle ECD| = \beta$ nastane, právě když čtyřúhelník $ADEC$ bude tětivový. Tuto jeho vlastnost dokážeme dopočtem několika dalších úhlů.

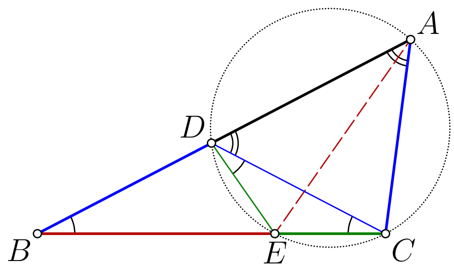
Pro vnější úhel ADC trojúhelníku BCD platí $|\sphericalangle ADC| = 2\beta$. Proto z dosud nevyužitého rovnoramenného trojúhelníku ADC plyne rovnost

$$|\sphericalangle CAD| = 2\beta.$$

Výpočtem třetího úhlu v trojúhelníku CDE dostáváme

$$|\sphericalangle DEC| = 180° - 2\beta.$$

Vidíme, že $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DEC| = 180°$, což znamená, že $ADEC$ je skutečně tětivový čtyřúhelník, jak jsme slíbili dokázat.



Jiné řešení. Ukažme postup bez užití poznatku, že čtyřúhelníku $ADEC$ lze opsat kružnici.

Rovnost $|AE| = |BE|$ nám vyplyne ze shodnosti trojúhelníků AEC a BED. V nich podle zadání platí $|AC| = |BD|$ a $|EC| = |ED|$. Proto díky větě *sus* stačí ověřit rovnost $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EDB|$.

Obě velikosti úhlů můžeme jako v předchozím řešení vyjádřit pomocí β. Tak z trojúhelníku ABC podle rovností $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAD| = 2\beta$ platí

$$|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle BCA| = 180° - |\sphericalangle ABC| - \sphericalangle CAB| = 180° - 3\beta.$$

Podobně z přímého úhlu u vrcholu D s ohledem na $|\sphericalangle CDE| = \beta$ a $|\sphericalangle ADC| = 2\beta$ plyne

$$|\sphericalangle EDB| = 180° - |\sphericalangle CDE| - |\sphericalangle ADC| = 180° - 3\beta.$$

Tím je potřebná rovnost $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EDB|$ dokázána.

Jiné řešení. Bez počítání velikostí úhlů ukážeme, že E je hlavní vrchol rovnoramenného trojúhelníku BEA.

Rovnoramenné trojúhelníky BCD a DCE se společným úhlem u krajního bodu C jejich základen jsou podobné, platí tudíž $|DC|/|BC| = |EC|/|DC|$. Užitím této rovnosti a rovností ze zadání dostáváme

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{|EC|}{|AC|}.$$

Trojúhelníky ABC a EAC jsou tak rovněž podobné, a to podle věty *sus*, neboť u vrcholu C mají společný vnitřní úhel. Tato podobnost spolu se shodností úhlů při základně AD rovnoramenného trojúhelníku ADC vede k rovnostem

$$|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADC|.$$

Rovnoramenný trojúhelník BCD má tak u svého hlavního vrcholu D vnější úhel ADC shodný s vnějším úhlem AEC trojúhelníku BEA u vrcholu E. Protože tyto dva trojúhelníky mají navíc u vrcholu B společný vnitřní úhel, je rovněž E hlavní vrchol rovnoramenného trojúhelníku BEA, jak jsme slíbili ukázat.

Poznámka. Klíčový poznatek posledního řešení, totiž shodnost úhlů ADC a AEC, je zřejmě ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový. Ověření této vlastnosti čtyřúhelníku $ADEC$ jsme v prvním řešení podali odlišným postupem.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

Cestou prvního řešení

A0. Pozorování, že dokazovaná rovnost plyne ze shodnosti úhlů ABE a EAB: 0 bodů.
A1. Odvození, že dokazovaná rovnost vyplývá ze shodnosti úhlů EAD a ECD neboli z tětivovosti čtyřúhelníku $ADEC$: 2 body.
A2. Důkaz některé z rovností $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DEC| = 180°$ nebo $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BED|$ nebo $|\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ADE| = 180°$ nebo $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle EDC|$: 0–3 bodů podle úplnosti.
A3. Úplný důkaz tětivovosti čtyřúhelníku $ADEC$: 4 body.

Cestou druhého řešení

B1. Pozorování, že dokazovaná rovnost vyplývá ze shodnosti trojúhelníků AEC a BED: 2 body.
B2. Důkaz shodnosti úhlů ECA a EDB: 0–3 body podle úplnosti.
B3. Úplný důkaz shodnosti trojúhelníků AEC a BED: 4 body.

Cestou třetího řešení

C1. Důkaz podobnosti trojúhelníků ABC a EAC: 3 body.
C2. Důkaz shodnosti úhlů ADC a AEC: 4 body.
C3. Dokončení důkazu: 0–2 body podle úplnosti.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\mathrm{A1} + \max(\mathrm{A2}, \mathrm{A3}), \mathrm{B1} + \max(\mathrm{B2}, \mathrm{B3}), \max(\mathrm{C1}, \mathrm{C2}) + \mathrm{C3}, \mathrm{A1} + \mathrm{C2}\bigr)$ bodů.

4. *Kolik* 33*místných čísel dělitelných* 3 *neobsahuje ve svém zápisu číslici 3? Výsledek zapište ve tvaru součinu mocnin prvočísel.* (Eliška Macáková a Patrik Bak)

Řešení. Číslice pro vyhovující čísla budeme postupně vybírat zleva doprava. První z nich nesmí být rovna 0 ani 3, tedy to může být kterákoli číslice z osmiprvkové množiny $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Každou další číslici pak vybíráme z devítiprvkové množiny $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Předpokládejme nyní, že už jsme vybrali všechny číslice kromě té poslední na místě jednotek. Připomeňme, že přirozené číslo je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný jeho ciferný součet. Aby tedy bylo výsledné číslo dělitelné třemi, poslední (dosud nevybraná) číslice už má jednoznačně určený zbytek po dělení třemi.

Rozdělíme-li proto 9 možných číslic pro místo jednotek do tří skupin podle jejich zbytku po dělení třemi, z jejich výpisu

$$\{0, 6, 9\}, \qquad \{1, 4, 7\} \qquad \text{a} \qquad \{2, 5, 8\}, \tag{1}$$

vidíme, že pro výběr poslední číslice vždy máme právě 3 možnosti.

Celkově docházíme (užitím pravidla součinu) k závěru, že hledaný počet 33místných čísel dělitelných 3 neobsahujících číslici 3 je roven

$$8 \cdot 9^{31} \cdot 3 = 2^3 \cdot \left(3^2\right)^{31} \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^{63}.$$

Poznámky.

1. Všimněme si, že při našem postupu nemusíme jako poslední vybírat číslici na místě jednotek – jakákoli pozice kromě té první funguje stejně dobře. Pokud bychom však jako poslední vybírali první číslici zleva, nešlo by pravidlo součinu přímo použít (někdy bychom měli 2, někdy 3 možnosti).
2. Ke správnému výsledku lze dojít rovněž na základě poznatku, že právě třetina z 33místných čísel neobsahujících číslici 3 (jiná čísla až do konce poznámky neuvažujeme) je dělitelná třemi. Tento poznatek *nelze prohlásit za zřejmý* a musí být v řešení dokázán, například v této formě: *Rozdělíme-li všechna 33místná čísla do tří skupin podle jejich zbytku po dělení třemi, budou počty čísel ve všech třech skupinách stejné.* Skutečně, každé 33místné číslo dostaneme z 32místného čísla připsáním jedné číslice zprava. Z rozdělení všech možných takto připisovaných číslic do trojic z (1) pak plyne, že libovolné 32místné číslo uvedeným způsobem přispěje třemi čísly do každé ze tří skupin 33místných čísel, která po dělení dávají stejný zbytek. Proto tyto tři skupiny skutečně mají stejný počet prvků (rovný tedy trojnásobku počtu všech 32místných čísel, kterých je $8 \cdot 9^{31}$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

Cestou vzorového řešení

A1. Strategie počítání možností (nezávislých) výběrů jednotlivých číslic 33místného čísla s výsledky 1krát 8 a 32krát 9: 1 bod.

A2. Zdůvodnění, že kvůli požadované dělitelnosti třemi můžeme prvních 32 číslic vybrat jakkoli a pro poslední číslici na místě jednotek pak máme vždy 3 možnosti: 3 body.

A3. Uplatnění pravidla součinu (není ho nutné zmiňovat) k závěru z A2: 1 bod.

Postupem z poznámky 2

B1. Určení počtu $8 \cdot 9^{32}$ všech 33místných čísel bez číslice 3: 2 body.
B2. Důkaz tvrzení, že právě třetina z 33místných čísel bez číslice 3 je dělitelná třemi: 0–3 body podle úplnosti.

Jiné

C1. Jakékoli určení hledaného počtu, který však není upraven na požadovaný tvar: 1–5 bodů podle úplnosti zdůvodnění, které musí být v souladu s předchozími pokyny, přitom 1 bod udělte za správný počet bez jakéhokoli zdůvodnění, například při konstatování, že čísel se zbytkem 0 je zřejmě právě tolik, co čísel se zbytkem 1 i čísel se zbytkem 2.

Závěrem

D1. Úprava plně odvozeného počtu v nehotové formě na požadovaný součin mocnin prvočísel: 1 bod.

Celkově pak udělte $\max(\mathrm{A1} + \mathrm{A2} + \mathrm{A3}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}, \mathrm{C1}) + \mathrm{D1}$ bodů. Pokud řešitel předpokládá, že 33místný zápis 33místného čísla může začínat nulou, udělte mu nejvýše 2 body.