



11. ČESKO-POLSKO-SLOVENSKÉ STŘETNUTÍ JUNIORŮ

Soutěž jednotlivců

15. 5. 2023

Úloha 1. Uvažujme trojúhelník ABC , kde $|BC| = 2|AC|$. Označme M střed strany BC a D bod úsečky AB , pro který platí $|AD| = 2|BD|$. Dokažte, že $AM \perp MD$.

Úloha 2. Pro přirozené číslo n označme $d(n)$ počet jeho kladných dělitelů. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která je $d(n)$ druhým největším dělitelem čísla n .

Úloha 3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nechť P je jeho vnitřní bod, který leží na ose úhlu BAC . Předpokládejme, že průsečík výšek H trojúhelníku ABP leží uvnitř trojúhelníku ABC . Označme Q průsečík přímky AP a kolmice k AC procházející bodem H . Dokažte, že body Q a P jsou souměrné podle osy BH .

Úloha 4. Každé pole tabulky $n \times n$ je buď modré, nebo červené. Předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky:

- Pokud řádek a sloupec obsahují stejný počet červených polí, potom jejich společné pole je červené.
- Pokud řádek a sloupec obsahují různý počet červených polí, potom jejich společné pole je modré.

Dokažte, že tabulka obsahuje sudý počet modrých polí.

Úloha 5. Martin provádí se zlomky následující aritmetické operace. V každém tahu zvětší poslední dosažený výsledek o jeho převrácenou hodnotu a obdrží tak nový výsledek. Martin začne číslem 1, po prvním tahu tak dostane 2, po druhém obdrží $5/2$, následně $29/10$ atd. Po 300 tazích dostane číslo x . Určete největší celé číslo, které není větší než x .

*Čas: 3 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 5 bodů.*