

11-TH CZECH-POLISH-SLOVAK JUNIOR MATHEMATICAL COMPETITION

Team competition

16. 5. 2023

Úloha 1. Označme $S(n)$ součet všech číslic přirozeného čísla n . Určete všechna přirozená čísla n , pro která jsou obě čísla $n + S(n)$ a $n - S(n)$ druhými mocninami nenulových celých čísel.

Poznámka: Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

Úloha 2. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 2023$ v tomto pořadí. Můžeme s nimi opakovaně provádět následující operaci: Vybereme libovolný lichý počet po sobě napsaných čísel a tato čísla zapíšeme v obráceném pořadí. Kolik různých pořadí těchto 2023 čísel tak můžeme dostat?

Příklad: Pokud začneme pouze s čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6, můžeme provádět následující kroky

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow 3, 2, 1, 4, 5, 6 \rightarrow 3, 6, 5, 4, 1, 2 \rightarrow 3, 6, 1, 4, 5, 2 \rightarrow \dots$$

Uwaga: Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

Zadanie 3. Na przyjęciu spotkało się n osób, przy czym $n \geq 2$. Każda osoba nie lubi dokładnie jednej innej osoby obecnej na przyjęciu (ale niekoniecznie ze wzajemnością, tzn. może się zdarzyć, że A lub B pomimo, że B nie lubi A) i lubi wszystkie pozostałe. Wykaż, że gości można usadzić przy trzech stołach w taki sposób, aby każdy gość lubił wszystkie osoby przy swoim stole.

Poznámka: Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

Zadanie 4. W trójkącie ABC punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i AC . Dwusieczne kątów wewnętrznych ABC oraz BCA przecinają prostą MN odpowiednio w punktach P i Q . Niech p będzie styczną do okręgu opisanego na trójkącie AMP przechodzącą przez punkt P , a q będzie styczną do okręgu opisanego na trójkącie ANQ przechodzącą przez punkt Q . Wykaż, że proste p i q przecinają się na prostej BC .

Poznámka: Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

Úloha 5. Mazo vykonáva nasledujúcu operáciu na trojiciach nezáporných celých čísel: Ak aspoň jedno z nich je kladné, tak si vyberie jedno kladné číslo, zmenší ho o jedna a ostatným dvom číslam vymení cifry na mieste jednotiek. Začína s trojicou x, y, z . Nájdite trojicu kladných celých čísel x, y, z takých, že $xy + yz + zx = 1000$ (*) a počet operácii, ktoré môže Mazo následne s trojicou x, y, z vykonať je

- maximálny (t.j. neexistuje trojica kladných celých čísel spĺňajúca (*), ktorá by mu dovolila urobiť viac operácii);
- minimálny (t.j. každá trojica kladných celých čísel spĺňajúca (*) mu dovolí vykonať aspoň toľko operácií).

Uwaga: Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

Úloha 6. Daný je obdĺžnik $ABCD$. Body E a F ležia postupne na stranách BC a CD tak, že obsah trojuholníkov ABE , ECF , FDA je rovný 1. Určte obsah trojuholníka AEF .

Poznámka: Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

*Time: 5 hours
Each problem is worth 5 points.*