

Česko-Rakousko-Polsko-Slovenské střetnutí 2023

ISTA, Rakousko

(První den – 19. červen, 2023)

1. Je dáno přirozené číslo $n \geq 3$. Určete nejmenší přirozené číslo k takové, že každé dva vnitřní body n -úhelníka lze propojit lomenou čarou o k úsečkách, která je celá obsažena uvnitř zadaného n -úhelníka. (Body na hranici jsou také uvnitř n -úhelníka.)

2. Mějme reálná čísla a_1, a_2, \dots, a_n taková, že pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ je splněna nerovnost

$$n \cdot a_k \geq \sum_{i=1}^k a_i^2.$$

Dokažte, že existuje alespoň $\frac{n}{10}$ indexů k takových, že $a_k \leq 1000$.

3. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňující $\angle BAD = \angle BCD$ a $\angle ABC < \angle ADC$. Označme M střed úsečky AC . Dokažte, že existují body X, Y postupně na stranách AB, BC takové, že $XY \perp BD$, $MX = MY$ a $\angle XMY = \angle ADC - \angle ABC$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.

Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech

Česko-Rakousko-Polsko-Slovenské střetnutí 2023

ISTA, Rakousko

(Druhý den – 20. červen, 2023)

4. Mějme p, q, r kladná reálná čísla taková, že rovnice

$$\lfloor pn \rfloor + \lfloor qn \rfloor + \lfloor rn \rfloor = n$$

je splněna pro nekonečně mnoho přirozených čísel n .

(a) Dokažte, že p, q a r jsou všechna racionální.

(b) Určete počet přirozených čísel c takových, že existují přirozená čísla a a b taková, že rovnice

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{cn}{202} \right\rfloor = n$$

je splněna pro nekonečně mnoho přirozených čísel n .

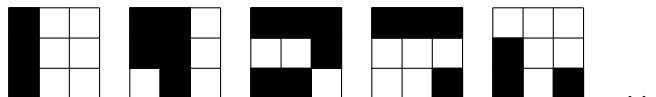
5. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s ortocentrem H a v něm D pata výšky z A na stranu BC . Dále označme T bod na kružnici s průměrem AH takový, že tato kružnice má vnitřní dotyk s kružnicí opsanou trojúhelníku BDT . Konečně označme N střed úsečky AH . Ukažte, že $BT \perp CN$.

6. Je dané přirozené $n \geq 1$ a tabulka $n \times n$, jejíž políčka jsou ze začátku všechna bílá. Malíř Marek chodí po tabulce a přebarvuje políčka dle následujících pravidel. Každou *procházku* Marek začne v levém spodním rohu tabulky a pokračuje následovně:

- pokud stojí na bílém poli, zabarví ho černě a posune se o políčko nahoru (nebo vyjde ven z tabulky, pokud byl v horní řadě),
- pokud stojí na černém poli, zabarví ho bíle a posune se o políčko doprava (nebo vyjde ven z tabulky, pokud byl v nejpravějším sloupci).

Procházka končí, když Marek vyjde ven z tabulky. Určete nejmenší přirozené číslo s takové, že po *přesně* s procházkách budou všechna políčka tabulky znovu bílá.

Například pro $n = 3$ bude po každé z prvních pěti Markových procházek tabulka vypadat takto:



Čas: 4 hodiny a 30 minut.

Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech