73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Na párty se sešlo* 20 *osob, z toho* 10 *chlapců a* 10 *dívek. Každému se líbí právě* k *osob opačného pohlaví. Je vždy možné vytvořit pár, v němž se oběma líbí ten druhý? Řešte a) pro* $k = 5$*, b) pro* $k = 6$. (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

V následujících úlohách předpokládáme, že na dané párty jsou alespoň dvě osoby a známosti jejích účastníků jsou vzájemné. To se ovšem netýká sympatií z návodné úlohy N1 a doplňující úlohy D1.

N1. U stolu sedí tři chlapci a čtyři dívky. Každému chlapci se líbí tři dívky, každé dívce jen jeden chlapec. Existuje mezi nimi vždy dvojice opačného pohlaví, ve které se oběma líbí ten druhý?

N2. Na párty se každého z návštěvníků zeptáme, kolik ostatních návštěvníků zná. Ukažte, že pokud jejich odpovědi sečteme, vyjde vždy sudé číslo.

N3. Ukažte, že na každé párty lze nalézt aspoň dva účastníky, kteří tam mají stejný počet známých.

D1. Může se na párty ze soutěžní úlohy v případě $k = 6$ stát, že bude existovat právě 20 párů, v nichž se oběma líbí ten druhý?

D2. Na párty se každý účastník zná s právě třemi dalšími. Ukažte, že počet účastníků párty je sudý. Dále uveďte příklady známostí na takových párty s 6, 8 a 2024 účastníky.

D3. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří. a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet. b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá.

D4. Lukáš a Marek, kteří se znají, se sešli na párty, na níž platilo: Mají-li někteří dva účastníci stejný počet známých, pak nemají žádného společného známého. Dokažte, že na párty je někdo, kdo tam má právě jednoho známého. Návod: Nejprve vyberte jednoho účastníka, který zná na párty největší počet osob.

D5. Ve společnosti lidí jsou některé dvojice spřátelené. Pro každé celé $k \geqq 3$ řekneme, že společnost je k-dobrá, pokud lze každou k-tici lidí ze společnosti rozesadit kolem kruhového stolu tak, že se každí dva sousedé přátelí. Dokažte, že je-li společnost 6-dobrá, pak je i 7-dobrá.

D6. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda.

2. *Z číslic* 1 *až* 9 *vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda lze takto získat posloupnost*

a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22,

b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte ta pětimístná čísla, z nichž každé má pět různých lichých číslic, přitom součet prvních tří číslic je 11 a součet posledních tří číslic je 15.

N2. Určete největší možné hodnoty následujících součtů, ve kterých $a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9$ je libovolné pořadí číslic $1, 2, \ldots, 8, 9$:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,

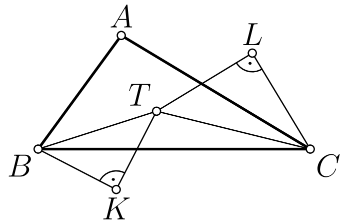
c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.

D1. Nalezněte největší možné šestimístné číslo, jehož každá číslice (počínaje třetí číslicí zleva) je součtem předchozích dvou.

D2. Dané přirozené číslo n má číslice, jejichž hodnoty se zleva doprava zvětšují. Ukažte, že ciferný součet čísla $9n$ je vždy roven devíti. Návod: $9n = 10n - n$.

D3. Nalezněte největší možné přirozené číslo, jehož každá číslice (kromě obou krajních) je menší než aritmetický průměr číslic sousedních.

3. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL stejně jako na obrázku. Označme D střed strany BC a E střed úsečky KL. Určete všechny možné hodnoty poměru $|AT| : |DE|$.* (Michal Rolínek)



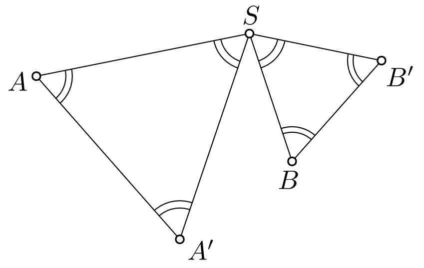
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Při řešení návodných a doplňujících úloh lze s výhodou využít *spirální podobnosti.** Tak běžně nazýváme podobná zobrazení, která jsou výsledky složení stejnolehlosti a otočení se společným středem, který pak nazýváme *středem* dané spirální podobnosti.

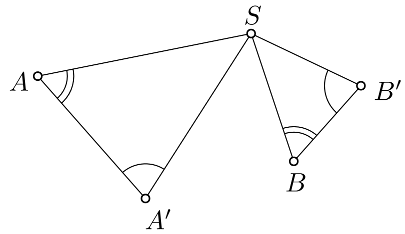
N1. Navzájem různé body S, A, A', B, B' jsou zvoleny tak, že oba trojúhelníky SAA' a $SB'B'$ jsou rovnostranné, přičemž při pohledu z bodu S jsou body A, A', B, B' právě takto uspořádány v kladném směru (jako na obrázku). Dokažte tvrzení:

* S tímto pojmem a jeho užitím při řešení mnoha úloh se lze přístupným způsobem seznámit v bakalářské práci Tomáše Hrdličky *Spirální podobnost v planimetrii* se seznamem užité literatury, který zahrnuje odkazy na další (internetové) zdroje.

(i) Trojúhelníky SAB a $SA'B'$ jsou shodné. (ii) Označíme-li S_{AB} a $S_{A'B'}$ po řadě středy úseček AB a $A'B'$, je trojúhelník $SS_{AB}S_{A'B'}$ rovnostranný.



(N1)



(N2)

N2. Dokažte obměnu obou tvrzení z N1 pro obecnější situaci, kdy trojúhelníky SAA' a SBB' jsou (přímo) podobné (jako na obrázku):
(i) $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$, (ii) $\triangle SS_{AB}S_{A'B'} \sim \triangle SAA' \sim \triangle SBB'$.

D1. Vně trojúhelníku ABC leží body D, E, F takové, že trojúhelníky BCD, CAE a ABF jsou rovnostranné. Ukažte, že těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

D2. Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB a vnitřním úhlem při vrcholu A o velikosti $60°$ existuje bod P, pro který platí $|\sphericalangle APB| = 120°$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určete délku úsečky AP.

4. *O lichém prvočísle p řekneme, že je* speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální?*

(Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel u a v, ve kterých u je dělitelem $2v$ a v je dělitelem $3u$.

N2. Ukažte, že pro žádné liché prvočíslo p není součet $1 + 2 + 3 + \ldots + p$ dělitelný nějakým prvočíslem větším než p.

N3. Pro dané liché prvočíslo p označme S součet všech přirozených čísel menších než p, která mají ve svých dekadických zápisech alespoň jednu číslici z dekadického zápisu čísla p. Ukažte, že pokud $p \mid S$, pak číslo S nemá kromě p žádného prvočinitele většího než $\frac{1}{2}(p-1)$.

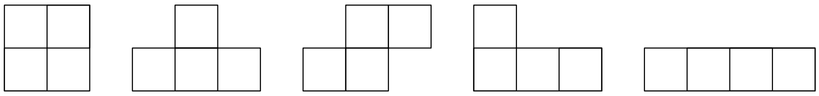
D1. Ukažte, že součet dvou po sobě jdoucích prvočísel nemůže být dvojnásobek jiného prvočísla.

D2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c platí, $a+b+c \mid abc$, pak je $a+b+c$ složené číslo.

D3. Pro každé $n > 1$ označme S_n součet n prvních prvočísel. Ukažte, že v intervalu $\langle S_n, S_{n+1} \rangle$ leží vždy druhá mocnina některého přirozeného čísla.

D4. Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je a) pět, b) sedm.

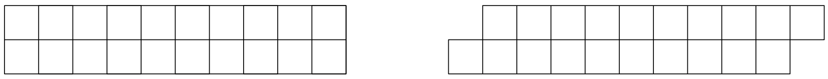
5. *Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina políček tabulky* 7×7 *s následující vlastností: Pro každé z vyobrazených* tetramin



lze tuto podmnožinu vyplnit bez překrývání výhradně jeho kopiemi. Jednotlivé kopie můžeme libovolně otáčet a překlápět. (Michal Rolínek)

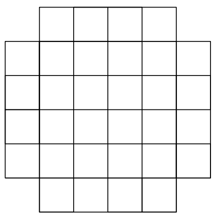
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nalezněte neprázdnou podmnožinu políček tabulky 20×20, kterou lze vyplnit (beze zbytku a překrývání) kopiemi levého obrazce i kopiemi pravého obrazce.



N2. Určete, kolik políček obsahuje nejmenší obrazec, který lze vyplnit a) jak tetraminy typu I, tak tetraminy typu O, jakož i tetraminy typu L, b) jak tetraminy typu S, tak tetraminy typu T.

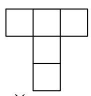
D1. Rozhodněte, zda lze následující tabulku vyplnit tetraminy typu L.



D2. Rozhodněte, zda lze tabulku 10×10 vyplnit tetraminy typu T.

D3. Rozhodněte, zda lze tabulku 10×10 vyplnit tetraminy typu I.

D4. Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou.

D5. Nechť $n \geqq 3$ je přirozené číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec  v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé.

6. *Pro reálná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle 1,2\rangle$ platí $(a+c)(b+d)=8$. Dokažte, že*

$$\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}\geqq 1,$$

a určete, kdy nastane rovnost. (Zdeněk Pezlar)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro libovolná reálná čísla x, y a z dokažte
a) $x^2+y^2+z^2\geqq 2(x+y)z-2xy$, b) $2+x^2\big(1+y^2\big)\geqq 2x(1+y)$.

N2. Reálná čísla a, b leží v intervalu $\langle 1,2\rangle$. Ukažte, že platí následující nerovnosti:
a) $a^2+b^2\leqq 1+2ab$, b) $a^2+b^2\leqq \frac{5}{2}ab$,
c) $2\leqq a/b+b/a\leqq \frac{5}{2}$, d) $a^2+2b^2\leqq (2a+1)b+3$.

N3. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1,a_2,\ldots,a_n$ platí

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n)\geqq n^2.$$

Kdy nastane rovnost?

N4. Pro libovolnou n-tici kladných reálných čísla $a_1,a_2,\ldots,a_n$ definujeme jejich aritmetický průměr $\mathcal{A}_n$ a harmonický průměr $\mathcal{H}_n$ vzorci

$$\mathcal{A}_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\quad \text{a}\quad \mathcal{H}_n=\frac{n}{1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n}.$$

Dokažte, že vždy platí $\mathcal{A}_n\geqq\mathcal{H}_n$.

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqq\frac{3}{2}.$$

D2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big)\leqq m^2,\quad \text{kde } m=\min\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Big).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost.

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leqq 2.$$

D4. Pro reálná čísla a, b platí $9a^2+8ab+7b^2\leqq 6$. Dokažte, že $7a+5b+12ab\leqq 9$.

D5. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí $abcd=4$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=10$. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab+bc+cd+da$.

D6. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: Kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují rovnosti $a+b+c+d=6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl má absolutní hodnotu nejvýše 4.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Na párty se sešlo* 20 *osob, z toho* 10 *chlapců a* 10 *dívek. Každému se líbí právě k osob opačného pohlaví. Je vždy možné vytvořit pár, v němž se oběma líbí ten druhý? Řešte a) pro $k = 5$, b) pro $k = 6$.* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

V následujících úlohách předpokládáme, že na dané párty jsou alespoň dvě osoby a známosti jejích účastníků jsou vzájemné. To se ovšem netýká sympatií z návodné úlohy N1 a doplňující úlohy D1.

N1. U stolu sedí tři chlapci a čtyři dívky. Každému chlapci se líbí tři dívky, každé dívce jen jeden chlapec. Existuje mezi nimi vždy dvojice opačného pohlaví, ve které se oběma líbí ten druhý? [Ano. Všech dvojic je 12. Uvažte, v kolika z nich se a) chlapci líbí dívka, b) dívce líbí chlapec. Nebo podle celkového počtu chlapeckých sympatií dokažte, že některá dívka se líbí všem třem chlapcům (užitím Dirichletova principu nebo sporem).]

N2. Na párty se každého z návštěvníků zeptáme, kolik ostatních návštěvníků zná. Ukažte, že pokud jejich odpovědi sečteme, vyjde vždy sudé číslo. [Návod: Kolikrát jsme počítali každou známost?]

N3. Ukažte, že na každé párty lze nalézt aspoň dva účastníky, kteří tam mají stejný počet známých. [Na párty o n účastnících je počet známých každého jedno z n čísel $0, 1, \ldots, n-1$. Aspoň dva z těchto n počtů musí být stejné, neboť je vyloučeno, aby se jeden počet rovnal číslu 0 a jiný číslu $n-1$, tudíž různých počtů je nejvýše $n-1$.]

D1. Může se na párty ze soutěžní úlohy v případě $k = 6$ stát, že bude existovat právě 20 párů, v nichž se oběma líbí ten druhý? [Ano. Popíšeme jeden z mnoha možných příkladů. Pět čtyřčlenných skupin po 2 chlapcích a 2 dívkách rozestavme po obvodu kruhu a vyberme „kladný“ směr jeho procházení. Předpokládejme, že každému chlapci se líbí právě 2 dívky z jeho skupiny a další 4 dívky ze dvou skupin, které jsou od jeho skupiny nejbližší v kladném směru, a že podobně každé dívce se líbí právě 2 chlapci z její skupiny a další 4 chlapci ze dvou skupin, které jsou od její skupiny nejbližší v kladném směru. Pak všechny páry se vzájemnými sympatiemi jsou částmi vytvořených pěti čtveřic a jejich počet tak je $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$.]

D2. Na párty se každý účastník zná s právě třemi dalšími. Ukažte, že počet účastníků párty je sudý. Dále uveďte příklady známostí na takových párty s 6, 8 a 2024 účastníky. [Označte n počet účastníků a uvažte, že dvojnásobek počtu všech známostí na párty je sudé číslo, které se rovná $3n$. Pro $n = 6$ si představte, že účastníci jsou rozmístěni na obvodu kruhu a že se znají právě ti, co spolu nesousedí (možné jsou i jiné příklady). Pro n rovné 8, 2024 nebo obecně $n = 4k$ uvažte například situaci, kdy účastníci jsou rozděleni do k čtveřic, přičemž navzájem se znají právě lidé ze stejné čtveřice.]

D3. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří. a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet. b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá. [B–61–I–5]

D4. Lukáš a Marek, kteří se znají, se sešli na párty, na níž platilo: Mají-li někteří dva účastníci stejný počet známých, pak nemají žádného společného známého. Dokažte, že na párty je někdo, kdo tam má právě jednoho známého. Návod: Nejprve vyberte jednoho účastníka, který zná na párty největší počet osob. [Označme X jednoho z těch účastníků, kteří na párty znají nejvíce, řekněme k osob. Podle zadání je $k \geqq 1$, v případě $k = 1$ jsme hotovi. Je-li $k > 1$, žádní dva z k známých vybraného X nemají stejný počet známých, takže těchto k počtů tvoří celou množinu $\{1, 2, \ldots, k\}$.]

D5. Ve společnosti lidí jsou některé dvojice spřátelené. Pro každé celé $k \geqq 3$ řekneme, že společnost je k-dobrá, pokud lze každou k-tici lidí ze společnosti rozesadit kolem kruhového stolu tak, že se každí dva sousedé přátelí. Dokažte, že je-li společnost 6-dobrá, pak je i 7-dobrá. [A–67–III–1]

D6. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda. [A–61–III–5]

2. *Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda lze takto získat posloupnost*

a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22,

b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23. (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte ta pětimístná čísla, z nichž každé má pět různých lichých číslic, přitom součet prvních tří číslic je 11 a součet posledních tří číslic je 15. [Prostřední číslice musí být 1, protože $11 + 15$ je o jedna větší než $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Na prvních dvou místech pak musí být 3 a 7, na posledních dvou 9 a 5. Všechna taková čísla vyhovují: 37159, 37195, 73159, 73195.]

N2. Určete největší možné hodnoty následujících součtů, ve kterých $a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9$ je libovolné pořadí číslic $1, 2, \ldots, 8, 9$:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,

c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.

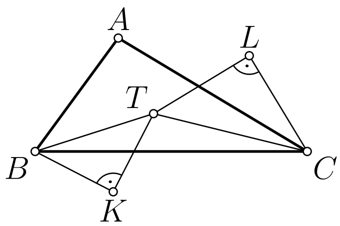
[a) $45 - 1 = 44$, b) $45 + 9 = 54$, c) $2 \cdot 45 - (1 + 2) = 87$.]

D1. Nalezněte největší možné šestimístné číslo, jehož každá číslice (počínaje třetí číslicí zleva) je součtem předchozích dvou. [303 369. Číslice zleva doprava jsou a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$ a $3a + 5b$. Z nerovnosti $3a + 5b \leqq 9$ plyne $a \leqq 3$, přitom pro $a = 3$ je nutně $b = 0$.]

D2. Dané přirozené číslo n má číslice, jejichž hodnoty se zleva doprava zvětšují. Ukažte, že ciferný součet čísla $9n$ je vždy roven devíti. Návod: $9n = 10n - n$. [Má-li dané n číslice $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$, jsou číslice rozdílu $10n - n$ podle písemného algoritmu pro odčítání zleva doprava rovny c_1, $c_2 - c_1, \ldots, c_{k-1} - c_{k-2}$, $c_k - (c_{k-1} + 1)$, $10 - c_k$. Jejich součet je skutečně 9.]

D3. Nalezněte největší možné přirozené číslo, jehož každá číslice (kromě obou krajních) je menší než aritmetický průměr číslic sousedních. [96 433 469. Číslo se zápisem $\overline{c_1 c_2 \ldots c_n}$, kde $n \geqq 3$, vyhovuje zadání, právě když platí $c_{i+1} - c_i > c_i - c_{i-1}$ pro každé přípustné i. Hledáme tak největší číslo, pro něž je odpovídající posloupnost rozdílů $c_2 - c_1$, $c_3 - c_2, \ldots, c_n - c_{n-1}$ rostoucí. Nechť je prvních k rozdílů záporných a posledních $n - 1 - k$ rozdílů nezáporných. Jejich součty jsou po řadě $c_{k+1} - c_1 \geqq -9$ a $c_n - c_{k+1} \leqq 9$. Odtud s ohledem na $1 + 2 + 3 + 4 > 9$ plyne, že $k \leqq 3$ a $n - 1 - k \leqq 4$ (je možný i rozdíl 0) neboli $n - k \leqq 5$. Proto $n = k + (n - k) \leqq 8$. Ukažme, že pro $n = 8$ (kdy nutně $k = 3$) vyhovující číslo existuje. Protože hledáme co největší takové, vybereme $c_1 = 9$ (ostatně c_1 je možno vždy zvětšit). Pak ovšem z $c_1 = 9$ a $k = 3$ plyne, že $c_2 - c_1 \leqq -3$ neboli $c_2 \leqq 6$, přitom pro $c_2 = 6$ je nutně $c_3 - c_2 = -2$ a $c_4 - c_1 = -1$, takže pak čtyřčíslí $c_1c_2c_3c_4$ je rovno 9643. Z podmínky nezápornosti čísla $c_5 - c_4$ při $c_4 = 3$ ovšem snadno plyne, že jediné vyhovující čtyřčíslí $c_5c_6c_7c_8$ pak je 3469.]

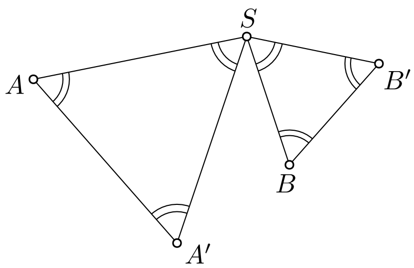
3. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL stejně jako na obrázku. Označme D střed strany BC a E střed úsečky KL. Určete všechny možné hodnoty poměru $|AT| : |DE|$.* (Michal Rolínek)



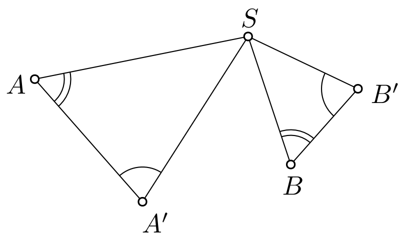
Návodné a doplňující úlohy:

Při řešení návodných a doplňujících úloh lze s výhodou využít *spirální podobnosti.** Tak běžně nazýváme podobná zobrazení, která jsou výsledky složení stejnolehlosti a otočení se společným středem, který pak nazýváme *středem* dané spirální podobnosti.

N1. Navzájem různé body S, A, A', B, B' jsou zvoleny tak, že oba trojúhelníky SAA' a $SB'B'$ jsou rovnostranné, přičemž při pohledu z bodu S jsou body A, A', B, B' právě takto uspořádány v kladném směru (jako na obrázku). Dokažte tvrzení: (i) Trojúhelníky SAB a $SA'B'$ jsou shodné. (ii) Označíme-li S_{AB} a $S_{A'B'}$ po řadě středy úseček AB a $A'B'$, je trojúhelník $SS_{AB}S_{A'B'}$ rovnostranný.



(N1)



(N2)

* S tímto pojmem a jeho užitím při řešení mnoha úloh se lze přístupným způsobem seznámit v bakalářské práci Tomáše Hrdličky *Spirální podobnost v planimetrii* se seznamem užité literatury, který zahrnuje odkazy na další (internetové) zdroje.

[Uvažte otočení se středem S a úhlem $+60°$. Co je obrazem úsečky AB? Co je obrazem bodu S_{AB}?]

N2. Dokažte obměnu obou tvrzení z N1 pro obecnější situaci, kdy trojúhelníky SAA' a SBB' jsou (přímo) podobné (jako na obrázku):
(i) $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$, (ii) $\triangle SS_{AB}S_{A'B'} \sim \triangle SAA' \sim \triangle SBB'$. [Uvažte složení stejnolehlosti a otočení se společným středem v bodě S (neboli spirální podobnost se středem S), které zobrazí A na A', a tedy rovněž B na B'. Pak proveďte analogické úvahy jako při řešení úlohy N1.]

D1. Vně trojúhelníku ABC leží body D, E, F takové, že trojúhelníky BCD, CAE a ABF jsou rovnostranné. Ukažte, že těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník. [Označte zmíněná těžiště po řadě A_1, B_1, C_1 a uvažte spirální podobnost se středem v C, která zobrazuje B_1 na A, a tedy rovněž A_1 na D. Pro úsečku B_1A_1 a její obraz AD pak platí $|AD| = \sqrt{3}|B_1A_1|$. Analogickými úvahami odvodíme nejen $|BE| = \sqrt{3}|C_1B_1|$ a $|CF| = \sqrt{3}|A_1C_1|$, ale také $|BE| = \sqrt{3}|A_1B_1|$, $|CF| = \sqrt{3}|B_1C_1|$ a $|AD| = \sqrt{3}|C_1A_1|$. Odtud již plyne $|A_1B_1| = |A_1C_1| = |B_1C_1|$.]

D2. Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB a vnitřním úhlem při vrcholu A o velikosti $60°$ existuje bod P, pro který platí $|\sphericalangle APB| = 120°$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určete délku úsečky AP. [$|AP| = 2$. Uvažte spirální podobnost se středem v bodě A, která zobrazí C na B. Obraz bodu P označte P'. Koeficient této podobnosti je $|BA|/|CA| = 1/\cos 60° = 2$, tudíž pro obraz BP' úsečky CP o délce 1 platí $|BP'| = 2$. Dále z $\triangle ABC \sim \triangle AP'P$ (podle věty *sus*) plyne $|\sphericalangle AP'P| = 30°$ a $|\sphericalangle APP'| = 90°$, tudíž $|\sphericalangle P'PB| = |\sphericalangle APB| - |\sphericalangle APP'| = 30°$, což spolu s $|BP| = 4$ a $|BP'| = 2$ dává $|\sphericalangle BP'P| = 90°$. Příčka PP' tak svírá shodné střídavé úhly jak s přímkami AP a $P'B$, tak s přímkami AP' a BP. Čtyřúhelník $APBP'$ je proto rovnoběžník, odkud $|AP| = |BP'| = 2$.]

4. *O lichém prvočísle p řekneme, že je* speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální?*

(Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel u a v, ve kterých u je dělitelem $2v$ a v je dělitelem $3u$. [Existují přirozená a, b tak, že $2v = au$ a $3u = bv$. Vynásobením dostaneme $6vu = abuv$ neboli $ab = 6$. Proto (a, b) je nutně jedna z dvojic $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$. Požadované rovnosti $2v = au$ a $3u = bv$ se pak po řadě redukují na $u = 2v$, $u = v$, $u = \frac{2}{3}v$, $u = \frac{1}{3}v$. Vyhovují tedy právě dvojice (u, v) tvarů $(2n, n)$, (n, n), $(2n, 3n)$ a $(n, 3n)$, kde n je přirozené číslo.]

N2. Ukažte, že pro žádné liché prvočíslo p není součet $1 + 2 + 3 + \ldots + p$ dělitelný nějakým prvočíslem větším než p. [Daný součet je roven $\frac{1}{2}p(p + 1)$, tudíž každý jeho prvočinitel q dělí některé z čísel p nebo $p + 1$, a proto $q \leqq p$, neboť prvočíslo p je liché, a tak sudé číslo $p + 1$ je aspoň 4, a je tedy složené.]

N3. Pro dané liché prvočíslo p označme S součet všech přirozených čísel menších než p, která mají ve svých dekadických zápisech alespoň jednu číslici z dekadického zápisu čísla p. Ukažte, že pokud $p \mid S$, pak číslo S nemá kromě p žádného prvočinitele většího než $\frac{1}{2}(p-1)$. [Zřejmě $S \leqq 1+2+\ldots+(p-1) = \frac{1}{2}p(p-1)$, odkud $S/p \leqq \frac{1}{2}(p-1)$, kde S/p je přirozené číslo díky předpokladu $p \mid S$. Je-li proto q nějaký prvočinitel čísla S různý od p, je i prvočinitelem čísla S/p, které samo jak víme nepřevyšuje $\frac{1}{2}(p-1)$.]

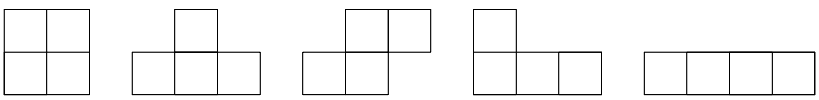
D1. Ukažte, že součet dvou po sobě jdoucích prvočísel nemůže být dvojnásobek jiného prvočísla. [Pro důkaz sporem při zřejmém označení rovnost $p_n + p_{n+1} = 2q$ přepišme do tvaru $\frac{1}{2}(p_n + p_{n+1}) = q$. Číslo q tedy leží uvnitř otevřeného intervalu (p_n, p_{n+1}), ve kterém však nejsou žádná prvočísla.]

D2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c platí, $a+b+c \mid abc$, pak je $a+b+c$ složené číslo. [Sporem: Pokud by číslo $s = a+b+c$ bylo prvočíslo, bylo by dělitelem (díky zadané podmínce $s \mid abc$) aspoň jednoho z čísel a, b, c. Ta jsou však všechna tři menší než jejich součet s, což je spor.]

D3. Pro každé $n > 1$ označme S_n součet n prvních prvočísel. Ukažte, že v intervalu $\langle S_n, S_{n+1}\rangle$ leží vždy druhá mocnina některého přirozeného čísla. [Ukažme předně, že k tomu, aby v obecnějším intervalu $\langle S, S+(2k+1)\rangle$, kde S a k jsou přirozená čísla, ležela druhá mocnina, stačí, aby platilo $S \leqq (k+1)^2$ (pokud totiž v $\langle S, S+(2k+1)\rangle$ neleží žádné z čísel $1^2, 2^2, \ldots, k^2$, je pak $k^2 < S \leqq (k+1)^2$, tudíž v daném intervalu leží číslo $(k+1)^2$). Při zřejmém označení tak v naší úloze stačí pro každé $n > 1$ dokázat nerovnost $p_1 + \ldots + p_n \leqq \frac{1}{4}(p_{n+1}+1)^2$ (podle předchozího tvrzení pro $k = \frac{1}{2}(p_{n+1}-1)$). Jelikož $p_1 - 1$, p_2, $p_3, \ldots, p_n$ jsou různá čísla z množiny lichých čísel $\{1, 3, 5, \ldots, p_{n+1}-2\}$ se součtem prvků $\frac{1}{4}(p_{n+1}-1)^2$, stačí dokázat, že platí $1 + \frac{1}{4}(p_{n+1}-1)^2 \leqq \frac{1}{4}(p_{n+1}+1)^2$. To je ale zřejmé, neboť celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1}-1)^2$ je menší než celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1}+1)^2$.]

D4. Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je a) pět, b) sedm. [70–A–I–1]

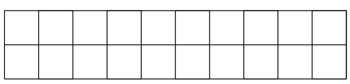
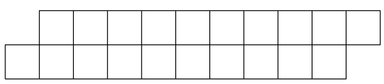
5. *Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina políček tabulky 7×7 s následující vlastností: Pro každé z vyobrazených* tetramin



lze tuto podmnožinu vyplnit bez překrývání výhradně jeho kopiemi. Jednotlivé kopie můžeme libovolně otáčet a překlápět. (Michal Rolínek)

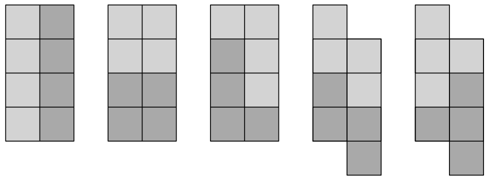
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nalezněte neprázdnou podmnožinu políček tabulky 20×20, kterou lze vyplnit (beze zbytku a překrývání) kopiemi levého obrazce i kopiemi pravého obrazce.

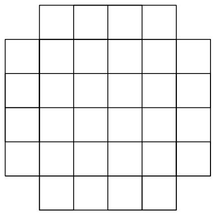



[Použijte každou dlaždici čtyřikrát „dokola“.]

N2. Určete, kolik políček obsahuje nejmenší obrazec, který lze vyplnit a) jak tetraminy typu I, tak tetraminy typu O, jakož i tetraminy typu L, b) jak tetraminy typu S, tak tetraminy typu T. [8 políček pro obě úlohy. Každý vyhovující obrazec musí být složen z alespoň dvou kopií každého ze zmíněných tetramin a mít tak alespoň 8 políček. Možné příklady obrazců s 8 políčky i s požadovanými vyplněními jsou na obrázku.]



D1. Rozhodněte, zda lze následující tabulku vyplnit tetraminy typu L.

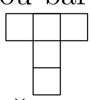


[Jde to. Dokonce lze bez přesahu vyplnit „polovinu“ tabulky, rozdělené její svislou (nebo vodorovnou) osou souměrnosti.]

D2. Rozhodněte, zda lze tabulku 10×10 vyplnit tetraminy typu T. [Nejde to. Obarvěte tabulku bílými a černými poli jako šachovnici. Pak každé tetramino T pokrývá lichý počet černých polí. Při vyplnění 25 tetraminy typu T by celkový počet pokrytých černých polí byl lichý.]

D3. Rozhodněte, zda lze tabulku 10×10 vyplnit tetraminy typu I. [Nejde to. Uvažte „hrubší“ šachovnicové obarvení, kdy jednobarevné čtverce mají velikost 2×2. Kolik černých polí pak pokryje jedno tetramino typu I, kolik by jich bylo pokryto při vyplnění jeho 25 kopiemi?]

D4. Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou. [A–56–III–1]

D5. Nechť $n \geqq 3$ je přirozené číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec  v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé. [A–72–III–6]

6. *Pro reálná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle 1,2\rangle$ platí $(a+c)(b+d)=8$. Dokažte, že*

$$\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}\geqq 1,$$

a určete, kdy nastane rovnost. (Zdeněk Pezlar)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro libovolná reálná čísla x, y a z dokažte
a) $x^2+y^2+z^2\geqq 2(x+y)z-2xy$, b) $2+x^2\bigl(1+y^2\bigr)\geqq 2x(1+y)$.
[Nerovnost z a) upravte na $(x+y-z)^2\geqq 0$, z b) na $(xy-1)^2+(x-1)^2\geqq 0$.]

N2. Reálná čísla a, b leží v intervalu $\langle 1,2\rangle$. Ukažte, že platí následující nerovnosti:
a) $a^2+b^2\leqq 1+2ab$, b) $a^2+b^2\leqq \frac{5}{2}ab$,
c) $2\leqq a/b+b/a\leqq \frac{5}{2}$, d) $a^2+2b^2\leqq (2a+1)b+3$.
[Nerovnost z a) upravte na $(a-b)^2\leqq 1$, nerovnost z b) na $(2a-b)\cdot(2b-a)\geqq 0$. Levá nerovnost z c) platí pro libovolná $a,b>0$ a lze ji dokázat například úpravou na $(a-b)^2\geqq 0$ (nebo užitím A-G nerovnosti pro dvě čísla a/b a b/a). Pravá nerovnost z c) plyne z b). Nerovnost z d) upravte na $(a-b)^2+(b-\frac{1}{2})^2\leqq\frac{13}{4}$ a využijte toho že $|a-b|\leqq 1$ a $0<b-\frac{1}{2}\leqq\frac{3}{2}$.]

N3. Dokažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $a_1,a_2,\dots,a_n$ platí

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n)\geqq n^2.$$

Kdy nastane rovnost? [Po roznásobení dostanete n jedniček a $n(n-1)/2$ dvojic zlomků a_i/a_j a a_j/a_i (kde $1\leqq i<j\leqq n$), přitom součet každých dvou takových zlomků je aspoň 2 podle řešení části c) z úlohy N2. Rovnost nastane, právě když platí $a_i/a_j=a_j/a_i$ kdykoli $i\neq j$, tedy právě když všechna čísla a_i jsou stejná.]

N4. Pro libovolnou n-tici kladných reálných čísla $a_1,a_2,\dots,a_n$ definujeme jejich aritmetický průměr $\mathcal{A}_n$ a harmonický průměr $\mathcal{H}_n$ vzorci

$$\mathcal{A}_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\quad\text{a}\quad\mathcal{H}_n=\frac{n}{1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n}.$$

Dokažte, že vždy platí $\mathcal{A}_n\geqq\mathcal{H}_n$. [Upravte na nerovnost z N3.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqq\frac{3}{2}.$$

[Přičtěte ke každému zlomku 1 a užijte N3 pro trojici $b+c$, $c+a$, $a+b$.]

D2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$(x+y+z)\Bigl(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Bigr)\leqq m^2,\quad\text{kde } m=\min\Bigl(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Bigr).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost. [63–A–I–2]

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leqq 2.$$

[S ohledem na symetrii jistě můžeme předpokládat, že $a \geqq \max(b, c)$. První zlomek je zřejmě nejvýše 1. Druhý zlomek je nejvýše $b/(a+c)$, neboť z nerovnosti $(1-a)(1-c) \geqq 0$ plyne $1 + ca \geqq a + c$. Podobně třetí zlomek je nejvýše $c/(a+b)$. Stačí tak dokázat, že součet $b/(a+c) + c/(a+b)$ je nejvýše 1. To však díky předpokladu $a \geqq \max(b, c)$ platí, neboť pak $b/(a+c) \leqq b/(b+c)$ a $c/(a+b) \leqq c/(b+c)$.]

D4. Pro reálná čísla a, b platí $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leqq 6$. Dokažte, že $7a + 5b + 12ab \leqq 9$. [Všimněme si, že v obou uvedených nerovnostech nastává rovnost pro $a = b = \frac{1}{2}$. Uplatněme proto odhad $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ ve tvaru $a \leqq a^2+\frac{1}{4}$ a jeho obdobu $b \leqq b^2+\frac{1}{4}$. Dostaneme $7a + 5b + 12ab \leqq 7\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 5\left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + 12ab$, přitom výraz napravo je roven $\left(9a^2 + 8ab + 7b^2\right) - 2(a-b)^2 + 3$.]

D5. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab+bc+cd+da$. [https://skmo.sk/dokument.php?id=994#page=9]

D6. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: Kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují rovnosti $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl má absolutní hodnotu nejvýše 4. [https://iksko.org/files/1/vzorak1.pdf#page=1]