73. ročník Matematické olympiády (2023/24)

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

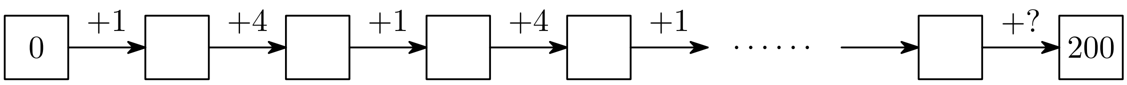
**Z5–I–1**

*Zajíc běží závod na 2024 metrů. Při startu se odrazil levou nohou a po celou dobu závodu pravidelně střídá levou, pravou a obě nohy. Když se zajíc odrazí levou nohou, skočí 35 dm, když se odrazí pravou nohou, skočí 15 dm, a když se odrazí oběma nohama, skočí 61 dm.*

*Kolik skoků zajíc udělá, než dorazí do cíle? A kterou nohou se bude odrážet před cílovým skokem?* *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Doplňte chybějící čísla (ve čtverečcích i místo otazníku) v následujícím hadu. Přičítání 1 a 4 se pravidelně střídá:




[Ve čtverečcích je postupně doplněno 1, 5, 6, 10, ..., 196, poslední přičítané číslo je 4.]

N2. Potřebujeme 100 žárovek. Ty však prodávají jen v baleních po 6 kusech. Kolik balení musíme koupit?

[Musíme koupit alespoň 17 balení ($17 \cdot 6 \geqq 100$, ale $16 \cdot 6 < 100$).]

N3. Mravenec ušel za minutu 15 cm. Cvrček ušel za minutu o 1 dm víc než mravenec. Kobylka za minutu naskákala o 2 m větší vzdálenost než ušel cvrček. Kolikrát byla kobylka rychlejší než mravenec?

[Kobylka za minutu naskákala 225 cm, tedy byla 15krát rychlejší než mravenec.]

N4. Libor a Robert dávali do mísy zrnka rýže. Pravidelně se střídali takto: Libor dal do mísy 3 zrnka, pak dal Robert 1 zrnko, Libor znovu dal 3 zrnka atd. Kdo poslední dával zrnka do mísy, jestliže počet zrnek v míse je udán číslem

a) končícím nulou,
b) končícím devítkou?

[Poslední číslice v postupně se zvětšujícím počtu zrnek v misce se pravidelně opakují. Poslední zrnka dával a) Robert, b) Libor.]

D1. Taška unese celkem 19 kg. Můžeme do ní dát melouny, nejvíce tři ananasy a nevíce dvě manga. Melouny váží 6 kg, ananasy váží 4 kg a manga váží 1 kg. Kolik nejvíce kusů ovoce můžeme do tašky dát? Uveďte všechny možnosti.

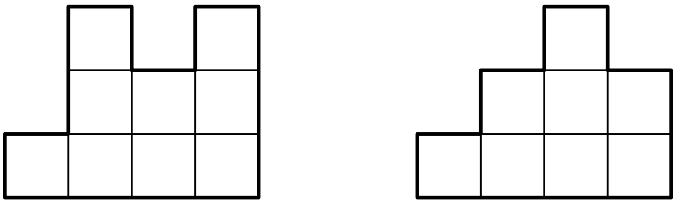
[V rámci daných omezení vychází, že v tašce může být nejvíce 5 kusů ovoce, a to buď 2 melouny, 1 ananas a 2 manga, nebo 3 ananasy a 2 manga, anebo 1 meloun, 3 ananasy a 1 mango.]

**Z5–I–2**

*Zuzka postavila ze šestnácti stejně velkých kostek čtverec o rozměrech $4 \times 4$ kostky. S dalšími stejnými kostkami pokračovala ve stavění. Kostky na sebe stavěla tak, že každé dvě sousední kostky měly společnou celou stěnu. Výsledná stavba vypadala ze dvou různých stran jako na následujícím obrázku.*

*Zjistěte, kolik nejvíce a kolik nejméně kostek Zuzka na svou stavbu mohla použít.*

*(E. Novotná)*



Návodné a doplňující úlohy

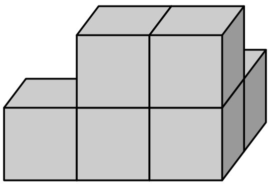
N1. Kolik krychlí o hraně 1 cm potřebujeme na sestavení velké krychle o hraně 7 cm?

[Je potřeba $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ krychlí.]

N2. Předchozí velkou krychli obarvíme modře. Kolik z jednotkových krychlí má právě dvě stěny modré?

[Dvě modré stěny mají krychle na hranách, které nejsou v rozích, tj. $12 \cdot 5 = 60$ krychlí.]

N3. Na obrázku je stavba z kostek o hraně 1 cm, která zbyla z kvádru o rozměrech $3 \times \times 2 \times 2$ cm. Kolik kostek jsme mohli z tohoto kvádru odebrat, aby vznikla uvedená stavba?

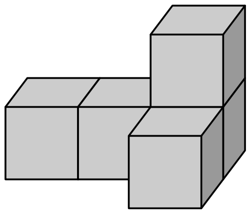


[Celý kvádr měl 12 krychlí. Z průmětu není zřejmé, zda zbylo 6, nebo 7 krychlí, tedy se odebralo buď 6, nebo 5 krychlí.]

N4. Kolika způsoby můžeme doplnit ke stavbě z pěti krychlí na následujícím obrázku jednu krychli, jestliže

a) nepoužíváme lepidlo, ale krychle přikládáme celými stěnami k sobě,
b) používáme lepidlo, krychle lepíme k sobě celými stěnami.

Předpokládáme, že stavba leží na podložce, tedy k spodním stěnám krychlí v dolní vrstvě krychli nedoplňujeme.



[Krychli lze doplnit a) 13 způsoby, b) 15 způsoby. Možnosti navíc v případě b) se týkají dvou stěn kostky ve druhé vrstvě.]

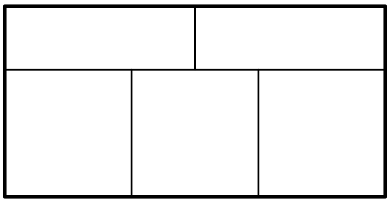
D1. Jakou nejvyšší stavbu (tj. stavbu s nejvíce patry) můžeme postavit ze 100 stejných krychlí, jestliže krychle klademe stěnami na sebe ve vrstvách a v každé vrstvě je alespoň o 3 krychle méně než ve vrstvě pod ní?

[Nejvíc pater může být osm, na stavbu stačí $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 = 92$ kostek.]

**Z5–I–3**

*Katka měla na zahrádce pět záhonů rozmístěných jako na obrázku. Záhony chtěla osadit česnekem, mrkví a ředkvičkou tak, aby na každém záhonu byl jen jeden druh zeleniny a aby žádné dva záhony se stejnou zeleninou nesousedily.*

*Kolika způsoby mohla Katka záhony osázet?* *(L. Hozová)*

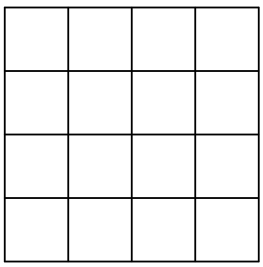


Návodné a doplňující úlohy

N1. Rozdělte čtverec na šest polí stejného tvaru, která pak obarvíte dvěma barvami tak, aby pole stejné barvy spolu nesousedila žádným bodem své hranice.

[Stačí např. šest stejně širokých střídavě obarvených pruhů.]

N2. Následující obrazec sestává ze 16 shodných čtvercových polí. Kolik nejméně barev potřebujeme na jeho obarvení, aby se stejně obarvená pole nedotýkala stranami?



[Stačí dvě barvy, viz šachovnici.]

N3. Můžeme předchozí obrazec pokrýt následujícími osmi dominovými kostkami, aby spolu stranou nesousedila dvě pole se sudými čísly, ani dvě pole s lichými čísly?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 3 | 5 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 8 | 4 | 2 | 4 |

[Na každé kostce je jedno liché a jedno sudé číslo. Kostky stačí vyskládat v duchu předchozí úlohy.]

N4. Obrazec z úlohy N2 rozdělte podél vyznačených úseček na čtyři stejné části tak, aby se všechny části navzájem dotýkaly alespoň jedním vrcholem. Najděte tři řešení.

[Lze rozdělit např. na čtverce $2 \times 2$, na dílky tvaru L či na dílky tvaru T.]

N5. Obrazec z úlohy N2 rozdělte podél vyznačených úseček na tři obdélníky (nikoli čtverce). Najděte všechna řešení, přičemž řešení lišící se jen umístěním obdélníků považujeme za stejná.

[Existují čtyři řešení s rozměry obdélníků buď $1 \times 2$, $1 \times 2$, $3 \times 4$, nebo $1 \times 4$, $1 \times 4$, $2 \times 4$, nebo $1 \times 4$, $2 \times 3$, $2 \times 3$, anebo $2 \times 3$, $2 \times 4$, $1 \times 2$.]

**Z5–I–4**

*V zahrádkářské osadě měl pan Jahoda ve svém sudu 16 litrů vody. Soused pan Malina měl ve svém sudu třikrát více vody než pan Jahoda. Začalo pršet a do obou sudů napršelo stejné množství vody. Po dešti pan Malina zjistil, že má v sudu dvakrát více vody než pan Jahoda.*

*Kolik litrů vody napršelo do každého sudu?* *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Rusalka měla 10 perel. Bludička jich měla dvakrát tolik.

a) Kolik perel by musela Bludička dostat, aby jich měla čtyřikrát víc než Rusalka?
b) Kolik perel by pak musela dostat Rusalka, aby jich měla dvakrát víc než Bludička?

[Bludička měla 20 perel. Tedy a) Bludička by musela dostat 20 perel, b) Rusalka by musela dostat 70 perel.]

N2. Pankrác měl dvacetkrát víc nanuků než Servác. Servác měl čtyřikrát méně nanuků než Bonifác. Měl víc nanuků Pankrác, anebo Bonifác? A kolikrát?

[Pankrác měl pětkrát víc nanuků než Bonifác $(20 : 4 = 5)$.]

N3. Silva měla dvě prázdná akvária. Do prvního nalila dva litry vody. Do druhého nalila tolik vody, aby v něm bylo pětkrát víc litrů než v prvním. Pak do obou akvárií nalila stejné množství vody. Nyní bylo ve druhém akváriu dvakrát tolik vody co v prvním. Kolik vody bylo v obou akváriích dohromady?

[Silva ve druhém kroku dolila 6 litrů. V akváriích bylo dohromady $8 + 16 = 24$ litrů.]

D1. Máme jednu třílitrovou a jednu pětilitrovou nádobu, k tomu neomezené množství vody. Popište, jak s těmito prostředky odměřit

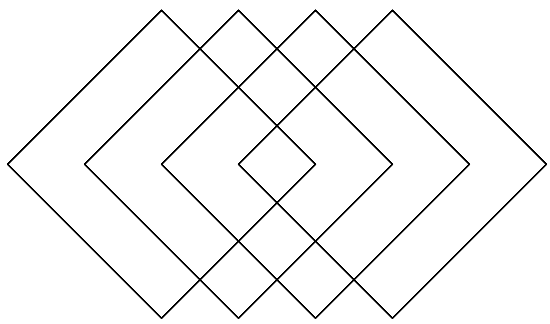
a) 1 litr,
b) 2 litry,
c) 4 litry.

[Přelévat lze jen celé objemy nádob. Možná řešení popíšeme pomocí dvojic, která značí množství vody v nádobách v jednotlivých krocích, a to v pořadí (třílitrová, pětilitrová): a) $(0,0) \to (3,0) \to (0,3) \to (3,3) \to (\underline{1},5)$; b) $(0,0) \to (0,5) \to (3,\underline{2})$; c) lze pokračovat s prvním přeléváním $\cdots \to (1,5) \to (1,0) \to (0,1) \to (3,1) \to (0,\underline{4})$.]

**Z5–I–5**

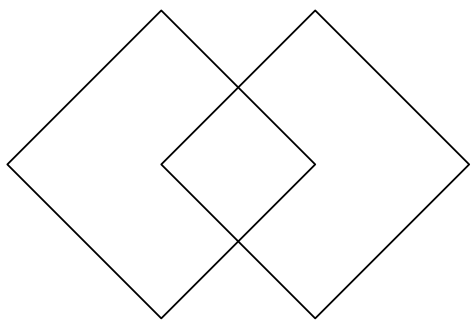
*Ze čtyř shodných čtverců byl vytvořen ornament jako na obrázku. Strany čtverců jsou dlouhé 4 cm, jsou navzájem rovnoběžné či kolmé a protínají se buď ve svých čtvrtinách, nebo polovinách. Libor chtěl ornament vybarvit a zjistil, že barva na 1 cm$^2$ každého souvislého pole ho bude stát tolik korun, kolika čtvercům je toto pole společné.*

*Kolik korun bude stát barva na vybarvení ornamentu?* *(K. Pazourek)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Máme dva stejné čtverce. Jeden z vrcholů prvního čtverce leží ve středu druhého čtverce, stejně tak jeden z vrcholů druhého čtverce leží ve středu prvního čtverce. Jaká část druhého čtverce leží zároveň i v prvním čtverci?

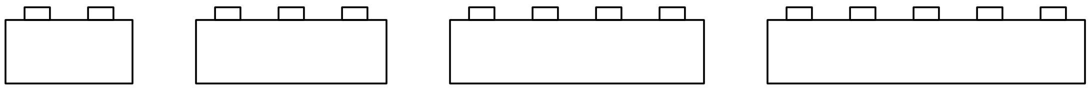


[Čtvrtina jednoho čtverce patří do druhého čtverce.]

N2. Podlaha tvaru obdélníku o rozměrech 4 metry a 6 metrů je pokryta čtvercovými dlaždicemi o straně 50 centimetrů. Kolik je na podlaze dlaždic?

[Na podlaze je 96 dlaždic ($8 \cdot 12 = 96$).]

N3. Ze stavebnice jsme vybrali obdélníkové kostky široké jeden dílek a dlouhé 2, 3, 4 a 5 dílků. Kostky skládáme na sebe a za sebe tak, že žádné dvě kostky se nepřekrývají o víc než polovinu délky kterékoliv z nich. Jaká je délka nejkratší stavby, kterou takto můžeme postavit?



[Součet délek kostek je 14 dílků. Spoje jsou tři, na každý je potřeba aspoň jeden dílek, jeden spoj může mít dva dílky. Nejkratší stavba je dlouhá 10 dílků.]

N4. Petr měl sedm čtvercových papírů. Žádné dva papíry nebyly stejně velké, každý papír měl délku strany v centimetrech vyjádřenu celým číslem. Petr papíry rozstříhal na proužky široké 1 cm a ze všech poskládal pás široký 1 cm (proužky se nepřekrývaly, jen dotýkaly hranami). Jaký nejkratší mohl být tento pás?

[Nejmenší možné papíry měly délky stran od 1 do 7 cm. Z nich lze nastříhat proužky délek 1, 4, 9, 16, 25, 36 a 49 cm. Nejkratší pás mohl být dlouhý 140 cm.]

**Z5–I–6**

*Lucka napsala na lístek číslo 12345 a dvakrát jej mezi číslicemi rozstřihla. Získala tak tři menší kartičky se třemi čísly. Tyto kartičky přeskládala dvěma způsoby, čímž dostala dvě různá pětimístná čísla. Rozdíl těchto dvou čísel byl 28 926.*

*Mezi kterými číslicemi Lucka lístek rozstřihla?* *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Určete dvě číslice, jejichž rozdíl je 7. Najděte všechny možnosti.

[Možné dvojice čísel jsou (7,0), (8,1), (9,2).]

N2. Když od dvojciferného čísla odečteme součet jeho číslic, dostaneme jednociferné číslo. Najděte všechna čísla s touto vlastností.

[Všechna taková čísla jsou 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Ve všech případech je zmiňovaný rozdíl roven 9 (pro větší dvojciferná čísla by to byl větší násobek 9).]

N3. Když od čísla odečtu jednu jeho číslici, dostanu dvě třetiny původního čísla. Které číslo jsem měl na začátku?

[Na začátku bylo číslo 15 ($15 - 5 = 10$).]

D1. Z číslic 6, 7, 8, 9 sestavíme dvě dvojciferná čísla, každou číslici použijeme právě jednou. Jak to můžeme udělat, aby

a) jejich součet byl největší možný,

b) jejich součet byl nejmenší možný,

c) jejich rozdíl byl největší možný,

d) jejich rozdíl byl nejmenší možný?

[a) Největší součet můžeme udělat jako $97 + 86 = 96 + 87 = 183$, b) nejmenší součet $68 + 79 = 69 + 78 = 147$, c) největší rozdíl $98 - 67 = 31$, d) nejmenší rozdíl $86 - 79 = 7$.]

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

**Z6–I–1**

*Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček.*

*Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda?* *(M. Petrová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Babička měla v košíku 8 jablek, dědeček měl polovinu jablek, co babička. Kolik jablek by měla dát babička dědečkovi, aby měli stejně?

[Dědeček měl 4 jablka, babička by mu měla dát 2 jablka.]

N2. Na stole byly při oslavě koláčky, laskonky a muffiny. Fiona snědla dva koláčky, čtvrtinu všech laskonek a čtyři muffiny. Shrek snědl všechny zbylé laskonky, ale i tak snědl méně zákusků než Fiona. Kolik nejvíce zákusků můžeme ještě Shrekovi dát, abychom měli jistotu, že jich nesní víc než Fiona?

[Původní počet laskonek musel být dělitelný čtyřmi. Buď mají snědeno Fiona 7 zákusků a Shrek 3, nebo Fiona 8 a Shrek 6. Shrekovi můžeme dát nejvíce 2 zákusky.]

N3. Michal a David hráli karty o žetony. Na začátku měl každý jiný počet žetonů. V první hře Michal prohrál polovinu svých žetonů a dal je Davidovi, ve druhé hře zase prohrál David jeden žeton a dal ho Michalovi. Třetí hru opět prohrál David a musel Michalovi odevzdat třetinu svých žetonů. V tu chvíli hru ukončili. Když si Michal chtěl posbírat své žetony, čtyři z nich mu spadly do kanálu. Nakonec tak měl každý z nich 8 žetonů. Kolik žetonů měli, než začali hrát?

[Příběh je vhodné sledovat zpětně od konečného počtu žetonů. Původně měl Michal 14 žetonů a David 6 žetonů.]

N4. Markus a Aurelius házeli třemi klasickými herními kostkami obarvenými červeně, modře a zeleně. Markus získal při svém hodu součet 8. Poté Aurelius hodil tentýž součet. Přitom na červené kostce padla Aureliovi polovina toho, co Markusovi, na modré kostce Aurelius hodil o tři víc než Markus a na zelené kostce měl o třetinu méně než Markus. Co mohlo Aureliovi padnout na jednotlivých kostkách?

[Musíme se ptát i na to, co mohlo padnout Markusovi, a kontrolovat všechny podmínky společně. Vyhovuje jediná možnost, kdy Aureliovi padla na červené kostce 2, na modré 4 a na zelené 2.]

**Z6–I–2**

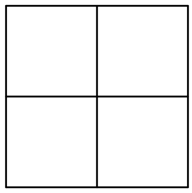
*Karolína narýsovala čtverec o straně 6 cm. Na každé straně čtverce vyznačila modrou barvou dva body, kterými rozdělila příslušnou stranu na tři shodné části. Potom sestrojila čtyřúhelník, který měl všechny vrcholy modré a jehož žádné dva vrcholy neležely na stejné straně čtverce.*

*Jaké obsahy čtyřúhelníků mohla Karolína dostat? Uveďte všechny možnosti.*

*(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Kolik různých trojúhelníků lze nalézt ve čtvercové tabulce $2 \times 2$, jestliže vrcholy každého trojúhelníku jsou jedině v mřížových bodech? Shodné trojúhelníky počítejte za jeden.

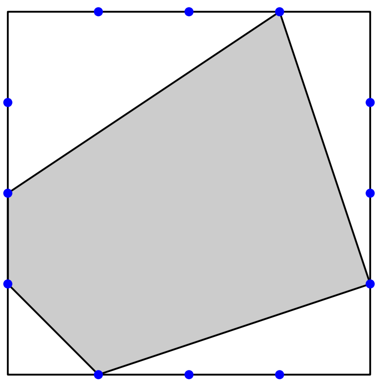


[Je třeba postupovat systematicky. Takových trojúhelníků je osm.]

N2. Klára má na zahrádce zatlučené kolíky tvořící vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Pomocí lanek spojujících kolíky chce tento záhon rozdělit čtyři trojúhelníkové záhonky. Kolika způsoby to může udělat, jestliže souměrná dělení se počítají jen jednou?

[Lze to udělat dvěma způsoby, a to buď spojením kolíků 1—3—6—4, nebo spojením 1—3—6 a 3—4.]

N3. Strany čtverce měří 12 cm a vyznačené body dělí každou ze stran na čtyři stejné části, viz obrázek. Určete obsah šedého pětiúhelníku.



[Stačí od čtverce odečíst trojúhelníky v jeho rozích. Obsah pětiúhelníku je 90 cm$^2$.]

D1. Jaké různé obsahy mohou mít trojúhelníky zakreslené ve čtvercové tabulce $3 \times 3$, jestliže vrcholy každého trojúhelníku jsou jedině v mřížových bodech? Strana každého čtverečku měří 1 cm.

[Nejmenší, resp. největší možný trojúhelník má obsah $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$, resp. $4{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Každý trojúhelník je buď polovinou pravoúhelníku tvořeného čtverečky sítě, nebo lze takovými trojúhelníky do pravoúhelníku doplnit. Možné obsahy trojúhelníků jsou celočíselnými násobky $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$, tedy možné obsahy jsou 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 4 a $4{,}5\,\mathrm{cm}^2$.]

## Z6–I–3

*V osmimístném čísle je každá jeho číslice (kromě poslední) větší než číslice následující. Kolik je všech takových čísel?* *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Kolik trojmístných čísel vytvořených z číslic 1, 2, 3, 4, z nichž žádná se neopakuje, má na místě jednotek větší číslici než na místě stovek?

[Je to polovina všech trojmístných čísel, které lze z daných číslic vytvořit, a těch je $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Čísel vyhovujících zadání je 12.]

N2. Adam, Boris, Cecil, David a Evžen si dělají na táboře každé ráno nástup. Jeden je vedoucím dne, stojí naproti nastoupené řadě a zbylí chlapci se seřadí vzestupně podle výšky (každý z chlapců je jinak vysoký). V pondělí jeden z chlapců, který však nebyl vedoucím dne, zaspal a nástup propásl. Jak mohl pondělní nástup vypadat? Určete počet všech možností.

[Vedoucím dne je jeden z pěti chlapců, zaspal jeden ze zbylých čtyř, pořadí v nástupu je dáno jednoznačně výškami chlapců. Nástup mohl mít $5 \cdot 4 = 20$ různých podob.]

N3. V lednici bylo šest různých jogurtů (vanilkový, čokoládový, borůvkový, jahodový, mangový a citronový). Maminka dala každému ze tří dětí jeden jogurt ke svačině, tedy v lednici zbyly tři jogurty. Kolik různých kombinací jogurtů mohlo zůstat v lednici?

[Tři jogurty ze šesti lze postavit do řady $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ způsoby, každou trojici lze proházet $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ způsoby. V lednici mohlo zůstat $120 : 6 = 20$ kombinací druhů jogurtů.]

N4. Při slavnostní hostině se podával studený předkrm, poté polévka, teplý předkrm, hlavní chod, salát a dezert. Hosté si mohli vybrat mezi dvěma druhy dezertu, ostatní chody byly bez možnosti výběru. Jonáš se rozhodl vynechat dva chody, ale rozhodně ne dezert. Kolika způsoby si mohl Jonáš vybrat slavnostní hostinu?

[Dva chody z pěti (tj. všechny chody kromě dezertu) lze vybrat 10 způsoby, dezert byl na výběr ze dvou možností. Jonáš mohl mít $10 \cdot 2 = 20$ různých hostin.]

**Z6–I–4**

*V následujícím písemném násobení dvou trojmístných čísel jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:*

$$
\begin{array}{r}
* * * \\
\times \quad * * * \\
\hline
* * * * \\
3\,1\,7\,5\phantom{\,*} \\
* * *\phantom{\,* *} \\
\hline
* * 6 * *
\end{array}
$$

*(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Toník si zašifroval dvě číslice, jednu označil jako $A$, druhou jako $B$. Vytvořil z nich čísla $AAB$ a $BA$. Když menší z nich odečetl od většího, vyšel mu výsledek 155. Jaké číslice se skrývají za písmeny $A$ a $B$?

[Řád výsledku (číslo mezi 100 a 200) diktuje číslici $A$, hodnota výsledku diktuje číslici $B$. Za písmeny se skrývají číslice $A = 2$ a $B = 7$.]

N2. Zjistěte, jaké číslice se skrývají za písmeny $A$, $B$ a $C$, jestliže platí $ABC \cdot AA = 2024$. Za stejnými písmeny se skrývají stejné číslice, za různými písmeny různé číslice.

[Prvočíselný rozklad čísla 2024 je $2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Jediný rozklad požadovaného tvaru je $2024 = 184 \cdot 11$. Za písmeny se skrývají číslice $A = 1$, $B = 8$, $C = 4$.]

N3. Mařenka chtěla znát oblíbené číslo Jeníčka. Ten jí prozradil, že jeho oblíbené číslo lze rozložit na součin tří prvočísel, přitom součet dvou z těchto prvočísel je 30 a součet jiných dvou z těchto prvočísel je 18. Jaké může být Jeníčkovo oblíbené číslo?

[Možná prvočísla v součtu 18 jsou buď 5 a 13, nebo 7 a 11. Tedy možná prvočísla v součtu 30 jsou buď 7 a 23, nebo 11 a 19, nebo 13 a 17. Jeníčkovo oblíbené číslo může být buď 1105, nebo 1463, nebo 1771.]

N4. V následujícím písemném násobení trojmístného a dvojmístného čísla jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:

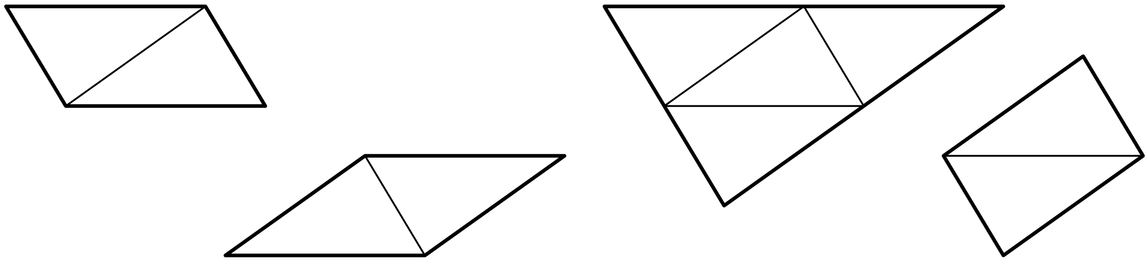
$$
\begin{array}{r}
* * * \\
\times \quad * * \\
\hline
* * * \\
6\,9\,5\phantom{\,*} \\
\hline
* * * 3
\end{array}
$$

[Mezivýsledek 695 je součinem prvního činitele a první číslice druhého činitele, a to je možné jediným způsobem ($695 = 139 \cdot 5$). První činitel je 139, druhý činitel 57, první mezivýsledek 973 a výsledek 7923.]

**Z6–I–5**

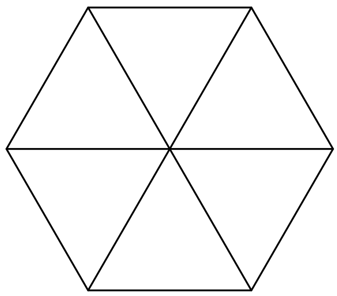
*Péťa složil z navzájem shodných trojúhelníků několik rovinných útvarů, viz obrázek. Obvody prvních tří jsou postupně 8 cm, 11,4 cm a 14,7 cm.*

*Určete obvod čtvrtého útvaru.* *(E. Semerádová)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Madla si narýsovala dva stejné pravidelné šestiúhelníky a rozdělila je na shodné rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku. Trojúhelníky z jednoho šestiúhelníku přiložila ke stranám druhého šestiúhelníku a vytvořila tak pravidelnou šesticípou hvězdu. Jak se lišil obvod hvězdy od obvodu původního šestiúhelníku? Jak se lišily jejich obsah?

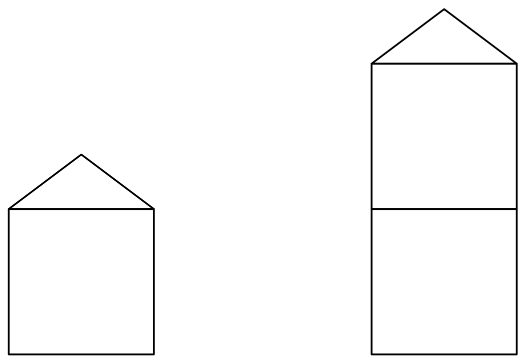


[Hvězda je složena z dvojnásobného počtu trojúhelníků a jedna strana šestiúhelníku byla nahrazena dvěma stranami hvězdy. Obsah i obvod hvězdy byl vzhledem k šestiúhelníku dvojnásobný.]

N2. Martin si narýsoval pravidelný šestiúhelník se stranou délky 4 centimetry a rozstříhal jej na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Pak se snažil trojúhelníky přeskládat tak, aby se sousední trojúhelníky dotýkaly vždy celými stranami a aby obvod vzniklého souvislého obrazce byl co největší. Jak mohl trojúhelníky přeskládat a jaký byl výsledný obvod? Najděte alespoň tři možnosti.

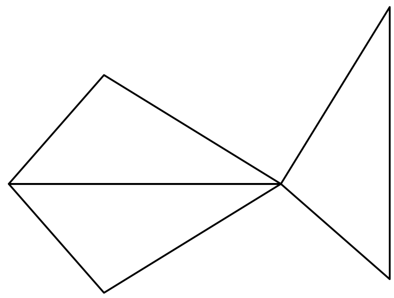
[Největší obvod mají útvary, v nichž žádný trojúhelník není obložen ze všech stran (např. přeskládání „do řady“). Obvod každého takového útvaru je $8 \cdot 4 = 32$ cm.]

N3. Obrazec se skládá ze čtverce a rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna je stejně dlouhá jako strana čtverce. Obvod obrazce je 25 cm. Pokud pod obrazec přikreslíme ještě jeden shodný čtverec jako na obrázku, obvod se zvětší o 9,6 cm. Jaký je obvod samotného rovnoramenného trojúhelníku?



[Obvod obrazce se zvětšil o dvě strany čtverce, tedy délka strany čtverce je 4,8 cm. Obvod trojúhelníku je $25 - 2 \cdot 4{,}8 = 15{,}4$ cm.]

N4. Radim složil ze tří shodných různostranných trojúhelníků tvar ryby. Určete obvod tohoto útvaru, jestliže nejkratší strana trojúhelníku je o 4 cm kratší než jeho nejdelší strana, zbylá strana trojúhelníku je o 2 cm menší než jeho nejdelší strana a tělo ryby (bez ocasní ploutve) má obvod 16 cm.



[Ze známého obvodu těla lze odvodit velikosti stran trojúhelníku 3, 5 a 7 cm. Obvod celého útvaru je 31 cm.]

**Z6–I–6**

*Aleš, Bára, Cyril, Dana, Eva, František a Gábina se stali na svých školách vítězi ve stolním fotbálku a sešli se na dvoudenním turnaji o celkového vítěze. Každé z těchto sedmi dětí mělo během turnaje sehrát jednu hru s každým jiným. První den turnaje odehrál Aleš jednu hru, Bára dvě hry, Cyril tři, Dana čtyři, Eva pět her a František šest.*

*Kolik her odehrála první den Gábina?* *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Anežka, Broňa a Cilka spolu hrály šipky. Hrály vždy po dvojicích, vítězka získala 2 body, poražená 0 bodů, při remíze dostaly obě hráčky po 1 bodu. Když dohrály každá s každou jednu hru, měla Anežka 4 body a Broňa 1 bod. Dokážeš zjistit, kolik bodů měla Cilka?

[Broňa remizovala s Cilkou, Anežka vyhrála nad Broňou i Cilkou. Cilka měla 1 bod.]

N2. Na obědě se sešlo sedm přátel. V restauraci neměli dost velký stůl, proto hosty posadili k několika prázdným stolům. Když přinesl číšník přípitek, ťukl si každý s každým u svého stolu, ale s nikým jiným. Celkem se ozvalo devět cinknutí skleniček. Ke kolika stolům byli přátelé rozsazeni?

[Jeden člověk si necinkne s nikým, dva si cinknou jednou, tři třikrát, čtyři šestkrát, pět desetkrát atd. Přátelé seděli u dvou stolů (u jednoho tři, u druhého čtyři).]

N3. Aleš, Bořek, Cecilka, Dana a Eva si před prázdninami slíbili, že každý s každým půjde jednou na zmrzlinu, přitom se vždy sejdou pouze ve dvou. Aleš tvrdil, že kdyby každý den šla jedna dvojice na zmrzlinu, tak budou potřebovat aspoň dva týdny. Měl Aleš pravdu?

[Aleš neměl pravdu, dá se to stihnout za 10 dní (z pěti lidí lze utvořit 10 dvojic).]

N4. Na táborové výpravě byla tři stanoviště. Na prvním stanovišti si každý z oddílu losoval, jestli na další stanoviště pojede na kole, půjde pěšky, nebo se sveze autobusem. Také na druhém stanovišti si každý losoval, jak se dostane na třetí. Tentokrát si navíc mohli vylosovat cestu lodí. Zdenda je zdatný matematik a správně si odvodil, že alespoň dva lidé z oddílu budou z prvního až na třetí stanoviště cestovat společně. Kolik nejméně táborníků bylo na výpravě?

[Všech možností dopravy z prvního stanoviště na třetí je $3 \cdot 4 = 12$. Na výpravě bylo alespoň 13 táborníků.]

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

**Z7–I–1**

*Ajka, Barborka, Cilka a Danek se dohadovali o počtu zrnek písku na jejich pískovišti. Danek sdělil kamarádkám svůj odhad a ty se jej rozhodly ověřit. Ajka napočítala 873 451 230, Barborka 873 451 227 a Cilka 873 451 213 zrnek. Součet (kladných) rozdílů těchto tří výsledků od Dankova odhadu byl 29.*

*Kolik zrnek písku mohl odhadovat Danek? Uveďte všechny možnosti.* *(V. Bachratá)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Rozdíl dvou čísel je 105, jedno z nich je 150. Jaký může být součet těchto čísel?

[Druhé číslo je buď 45, nebo 255. Součet čísel je buď 195, nebo 405.]

N2. Vypočítejte co nejjednodušeji:

$$987\,004 + 789\,003 - 987\,002 - 789\,001 = ?$$

[Dva a dva sčítanci se liší o 2. Výsledek je 4.]

N3. Jsou dána čísla 4, 14, 18 a 24. Vyberte z nich tři čísla tak, aby součet jejich (kladných) rozdílů od čísla 15 byl co nejmenší.

[Nejmenší součet rozdílů od čísla 15 má trojice 14, 18 a 24 (tento součet je 13).]

D1. Pro každé jednomístné přirozené číslo vezměte jeho nezáporný rozdíl od čísla 5. Vyjádřete aritmetický průměr takto vzniklých čísel.

[Nezáporné rozdíly jsou 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4. Průměr těchto čísel je $\frac{20}{9}$.]

**Z7–I–2**

*Pan Delfín a pan Žralok byli zdatní rybáři. Jednou dohromady ulovili 70 ryb. Pět devítin ryb, které ulovil pan Delfín, byli pstruzi. Dvě sedmnáctiny ryb, které ulovil pan Žralok, byli kapři.*

*Kolik ryb ulovil pan Delfín?* *(L. Hozová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Richard napsal číslo tvořené navzájem různými číslicemi. Pak z nich třetinu číslic umazal. Kolik číslic mohlo mít zbylé číslo? Určete všechny možnosti.

[Původní číslo mělo nejvýše 10 číslic a počet číslic byl dělitelný třemi. Zbylé číslo mělo buď 2, nebo 4, nebo 6 číslic.]

N2. Ve spíži byly schovány koláče, z nichž třetina byla maková. Hugo si tajně dva makové koláče vzal, čímž snížil podíl makových koláčů na čtvrtinu. Kolik makových koláčů zbylo ve spíži?

[Původní počet všech koláčů byl dělitelný třemi a makové koláče byly alespoň 3. Zbylý počet všech koláčů byl dělitelný čtyřmi a makový koláč zbyl alespoň 1. Původně bylo makových koláčů šest, zbyly čtyři.]

N3. Máme tři zlomky, jejichž čitatelé i jmenovatelé jsou zapsáni přirozenými čísly. Společný jmenovatel prvního a druhého zlomku je 4, společný jmenovatel druhého a třetího zlomku je 6. Jaký může být nejmenší součet všech tří zlomků?

[Pro nejmenší součet hledáme zlomky s nejmenšími možnými čitateli a s největšími možnými jmenovateli. Nejmenší součet zlomků je $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.]

D1. Na oslavě narozenin měli velký dort. Míša z něj snědla desetinu. Nina snědla dvanáctinu zbytku. Sourozenci Opletalovi snědli dvě třetiny toho, co zbylo po Nině. Patrik snědl jedenáctinu toho, co zbylo po Opletalových. Jaká část dortu byla celkem snědena?

[Po Míše zbylo $\frac{9}{10}$ dortu, po Nině zbylo $\frac{11}{12} \cdot \frac{9}{10}$, po Opletalových $\frac{1}{3} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{9}{10}$ a po Patrikovi $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{4}$ dortu. Celkem byly snědeny tři čtvrtiny dortu.]

**Z7–I–3**

*Myslím si tři čísla. Když je sečtu, dostanu 15. Když od součtu prvních dvou čísel odečtu třetí, dostanu 10. Když od součtu prvního a třetího čísla odečtu druhé, dostanu 8. Která čísla si myslím?* *(E. Semerádová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Máme dvě čísla, jejichž rozdíl je 10 000. K oběma číslům přičteme 2 024. Jaký bude rozdíl takto zvětšených čísel?

[Rozdíl se nezmění bez ohledu na to, co se k oběma číslům přičítalo.]

N2. Máme čísla $a$, $b$, $c$ a $d$, pro která platí

$$a - b = b - c = c - d = 100.$$

Určete rozdíl $a - d$.

[$a = b + 100$, $b = c + 100$, $c = d + 100$, tedy $a = d + 300$. Rozdíl $a - d$ je roven 300.]

N3. Jindra rýsoval červené a modré úsečky. Úsečky stejné barvy měly stejnou délku. Čtyři červené úsečky za sebou tvořily úsečku, která se lišila o 12 cm od úsečky sestrojené ze čtyřech modrých úseček. Jak se lišily délky jedné modré a jedné červené úsečky?

[Rozdíl délek jedné modré a jedné červené úsečky byl $12 : 4 = 3$ cm.]

N4. Jindra měl našetřeno tolik peněz, co Michal a Pavel dohromady. Když si Michal od Pavla půjčil tolik, kolik sám měl, zbylo Pavlovi o 500 korun méně, než co měl Jindra. Kolik korun měl Michal původně?

[Rozdíl mezi tím, co měl Jindra, a tím, co měl nakonec Pavel, byl dvojnásobkem původních Michalových úspor. Michal měl původně 250 korun.]

D1. V zahradě stály dva stejné sudy plné vody. Když Lída odebrala z prvního sudu několikrát vodu konví, zbylo v něm 26 litrů vody. Když Lída odebrala z druhého sudu několikrát vodu toutéž konví, zbylo v něm 41 litrů. Konev byla vždy naplněna až po okraj a její objem byl udán v celých litrech. Jaký mohl být objem konve? Určete všechny možnosti.

[Rozdíl objemů vody po odebírání je celočíselným násobkem objemu konve. Konev mohla mít 1, 3, 5, nebo 15 litrů.]

**Z7–I–4**

*Anetčin strýc má narozeniny ve stejný den v roce jako Anetčina teta. Strýc je starší než teta, ne však o víc než o deset let, a oba jsou plnoletí. Na poslední oslavě jejich narozenin si Anetka uvědomila, že když vynásobí jejich oslavované věky a výsledný součin ještě vynásobí počtem psů, kteří se na oslavě sešli, dostane číslo 2024.*

*Kolik psů mohlo být na této oslavě? Určete všechny možnosti.* *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte všechny dělitele čísla 46 827, které nejsou dělitelné třemi.

[Prvočíselný rozklad daného čísla je $3^2 \cdot 11^2 \cdot 43$. Dělitelé, které nejsou dělitelné třemi, jsou 1, 11, 43, 121, 473, 5203.]

N2. Kolik dělitelů součinu čísel 1, 2, 3, 4 a 5 je sudých?

[Každý sudý dělitel je součinem 2, 4 či 8 s nějakým lichým dělitelem. Liší dělitelé jsou 1, 3, 5 a 15. Sudých dělitelů je $3 \cdot 4 = 12$.]

N3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má právě pět různých dělitelů.

[Nejmenší takové číslo je $16 = 2^4$.]

D1. Vyjádřete číslo 2000 jako součin tří jeho dělitelů tak, aby první dělitel byl jednociferný, druhý dvojciferný a třetí trojciferný. Najděte všechny možnosti.

[Možná vyjádření jsou $2000 = 1 \cdot 10 \cdot 200 = 1 \cdot 16 \cdot 125 = 1 \cdot 20 \cdot 100 = 2 \cdot 10 \cdot 100$.]

**Z7–I–5**

*Pravoúhlý trojúhelník má obsah 36 m². V něm je umístěn čtverec tak, že dvě strany čtverce jsou částmi dvou stran trojúhelníku a jeden vrchol čtverce je ve třetině nejdelší strany.*

*Určete obsah tohoto čtverce.* *(E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

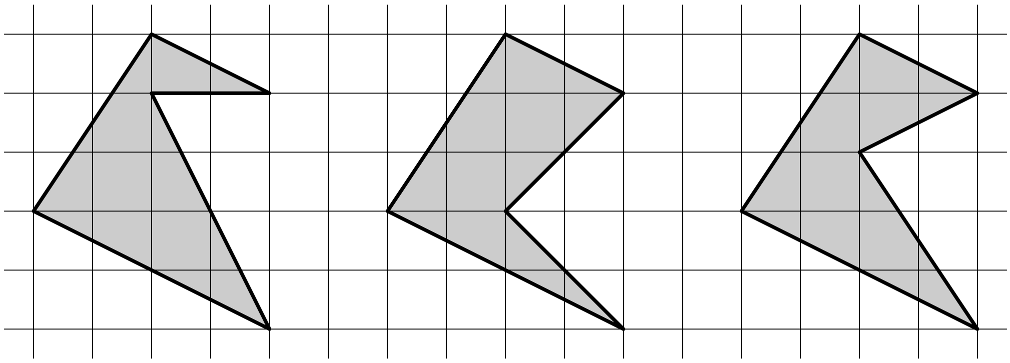
N1. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku o obsahu $60\,\mathrm{cm}^2$ je vepsán čtverec tak, že dvě strany čtverce leží na odvěsnách, jejich společný vrchol leží v hlavním vrcholu trojúhelníku a protilehlý vrchol leží na základně. Jaký je obsah tohoto čtverce?

[Vrcholy čtverce dělí strany trojúhelníku na poloviny. Obsah čtverce je $30\,\mathrm{cm}^2$.]

N2. Je dán rovnoramenný tupoúhlý trojúhelník $ABC$ se základnou $AB$. Vyznačme na základně $AB$ bod $D$ tak, že $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$. Bodem $D$ veďme kolmici k základně a její průsečík s ramenem $AC$ označme $E$. Obsah trojúhelníku $ADE$ je $6\,\mathrm{cm}^2$. Jaký je obsah čtyřúhelníku $DBCE$?

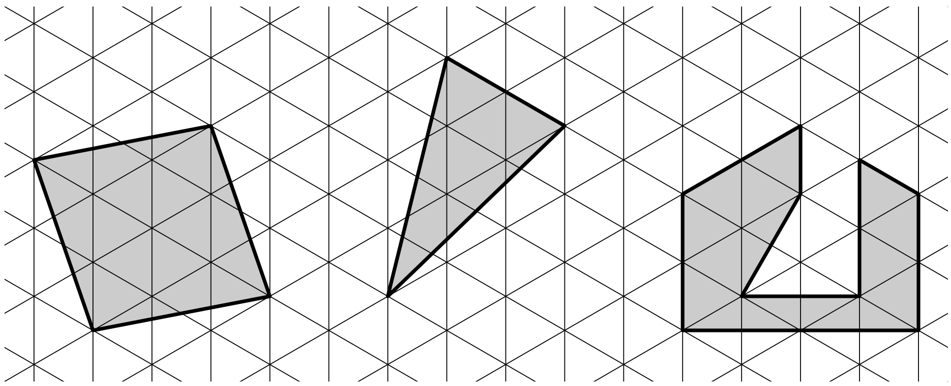
[Trojúhelník $ADE$ má čtyřikrát menší obsah než trojúhelník $ASC$, kde $S$ je střed $AB$. Obsah celého trojúhelníku $ABC$ je $8 \cdot 6 = 48\,\mathrm{cm}^2$. Obsah čtyřúhelníku $DBCE$ je $48 - 6 = 42\,\mathrm{cm}^2$.]

N3. Určete obsahy následujících útvarů ve čtvercové síti, kde strana základního čtverce sítě měří 1 cm:



[Každý obsah lze spočítat odečítáním trojúhelníků od pravoúhelníku tvořeného čtverci sítě. Každý útvar lze také přeměnit (dělením na trojúhelníky a transformacemi zachovávajícími základny a výšky) na pravoúhelník tvořený čtverci sítě. V mnoha případech je možné základní čtverce, resp. jejich části počítat přímo. Všechny útvary mají obsah $8\,\mathrm{cm}^2$.]

D1. Určete obsahy následujících útvarů v trojúhelníkové síti, kde obsah základního trojúhelníku sítě je $1\,\mathrm{cm}^2$:



[Dvojice základních trojúhelníků sítě tvoří rovnoběžníky. S touto představou lze postupovat obdobně jako v předchozí úloze. V některých případech je možné základní trojúhelníky, resp. jejich části počítat přímo. Obsahy útvarů jsou postupně 16, 8 a $14\,\mathrm{cm}^2$.]

**Z7–I–6**

*Trpaslíci počítají svoje věky ve dnech, takže každý den slaví narozeniny. U trpaslíka Nosíka se sešlo sedm trpaslíků s věky 105, 120, 140, 168, 210, 280 a 420 dnů. Během oslavy se všem osmi trpaslíkům podařilo rozdělit do dvou skupin se stejnými součty věků.*

*Kolik nejméně a kolik nejvíce dnů mohlo být trpaslíkovi Nosíkovi?* (E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Jsou dána čísla $3{*}{*}{*}{*}{*}54$, $3{*}{*}{*}{*}{*}40$, $3{*}{*}{*}{*}178$, kde hvězdičky značí neznámé číslice. Navíc je dáno zcela neznámé číslo $x$. Tato čtyři čísla je možné rozdělit do dvou skupin tak, že součet čísel v obou skupinách je stejný. Jindra tvrdí, že číslo $x$ jistě není tvaru $3{*}{*}{*}{*}{*}99$. Má Jindra pravdu?

[Všechna daná čísla jsou sudá, tedy také $x$ musí být sudé. Jindra má pravdu.]

N2. Řešte soutěžní úlohu pro případ, že by k Nosíkovi přišli jen dva trpaslíci s věky 105 a 120 dnů.

[Mohli se rozdělit jen dvěma způsoby. Nosíkovi mohlo být buď $120 - 105 = 15$, nebo $120 + 105 = 225$ dnů.]

D1. Král vážil svůj poklad a zjistil přitom následující:

- jedna truhlice váží stejně jako dvě žezla a dvě koruny dohromady,
- tři truhlice váží stejně jako čtyři žezla a třináct korun dohromady,
- jedna truhlice a dvanáct korun dohromady váží stejně jako šest žezel.

Čím lze vyvážit pět žezel? Najděte alespoň tři možnosti.

[2 žezla a 2 koruny váží stejně jako 6 žezel bez 12 korun. Tedy 2 žezla váží stejně jako 7 korun a 1 truhlice váží stejně jako 9 korun. Pět žezel lze vyvážit 3 žezly a 7 korunami, nebo 1 žezlem a 14 korunami, nebo 1 žezlem, 1 truhlicí a 5 korunami. Triviálně také lze pět žezel vyvážit pěti žezly. Pokud bychom připustili další žezla na stejné misce vah, potom lze najít nepřeberné množství dalších možností (např. 5 žezel a 1 další žezlo vyváží 2 truhlice a 3 koruny).]

D2. Na rovnoramenných vahách chceme vyvážit předmět, jehož hmotnost je v celých dekagramech. Přitom máme k dispozici pouze závaží o hmotnostech 3 dekagramy a 8 dekagramů. Je vždy možné tento úkol splnit? (Předpokládejte, že závaží každého druhu je neomezené množství a váha má neomezenou nosnost.)

[Je možné vyvážit jakékoli násobky 3 a 8 dekagramů, případně jejich součty. Také je možné vyvážit 1 dekagram, a to takto: $\underline{1} + 8 = 3 + 3 + 3$. Tedy lze vyvážit jakýkoli celočíselný počet dekagramů. Mnohé hodnoty je možné realizovat různými způsoby (např. 2 dekagramy lze také vyvážit takto: $\underline{2} + 3 + 3 = 8$).]

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

**Z8–I–1**

*V loňském roce bylo v našem skautském oddíle o 30 chlapců více než děvčat. Letos se počet dětí v oddíle zvětšil o 10 %, přičemž počet chlapců se zvětšil o 5 % a počet děvčat se zvětšil o 20 %.*

*Kolik dětí máme letos v oddíle?* *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Na pouťové střelnici byly červené a modré papírové růže. Červených růží bylo o 20 % více než modrých a dohromady jich bylo 55. Kolik bylo na střelnici modrých růží?

[Modrých růží bylo méně než 55/2 a jejich počet byl dělitelný pěti (20 % = 1/5). Modrých růží bylo 25 (a červených 30).]

N2. Mezi bonbóny na stole bylo 15 % bonbónů s bílou polevou. Když cukrářka přidala na stůl pět bonbónů s bílou polevou, jejich podíl mezi všemi bonbóny se zvýšil na 20 %. Kolik bonbónů bylo původně na stole?

[Původní počet bonbónů byl dělitelný dvaceti (15 % = 3/20). Původně bylo na stole 80 bonbónů (z toho 12 s bílou polevou).]

N3. Marek si každý měsíc zapisoval, kolik vody napršelo na jeho zahradu. Zjistil, že v červenci napršelo o 20 % více než v dubnu, v září napršelo o 25 % méně než v červenci a v prosinci napršelo stejně jako v dubnu, ale o 3 mm více než v září. Kolik mm napršelo v dubnu?

[V září napršelo 90 % toho, co v dubnu. Tedy 3 mm tvoří 10% dubnových srážek. V dubnu napršelo 30 mm.]

D1. Petr měl o čtvrtinu více papírových origami jeřábů než Pavel, dohromady jich měli 108. V sobotu se sešli a celé odpoledne skládali jeřáby. Pavlovi se podařilo složit tolik jeřábů, že jich měl celkem o šestinu více než původně. Petr složil 15 % svého původního počtu jeřábů. O kolik procent více jeřábů měli dohromady po sobotním skládání?

[Před sobotou měl Pavel složeno 48 jeřábů a Petr 60. V sobotu složil Pavel 8 jeřábů a Petr 9. Po sobotním skládání měli dohromady o $17/108 \doteq 15{,}7\,\%$ více jeřábů.]

**Z8–I–2**

*Adam měl papír, který byl natolik veliký, že by z něj šlo natrhat několik desítek tisíc kousků. Nejprve papír roztrhal na čtyři kousky. Každý z těchto kousků vzal a roztrhal buď na čtyři, nebo na deset kousků. Stejným způsobem pokračoval dál: každý nově vzniklý kousek roztrhal buď na čtyři, nebo na deset menších kousků.*

*Rozhodněte a vysvětlete, zda může Adam tímto způsobem natrhat přesně 20 000 kousků.* *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Stela měla mísu bonbónů. Obsah mísy rozdělila na poloviny, jednu polovinu pak rozdělila na třetiny a druhou polovinu na pětiny. Kolik nejméně bonbónů mohlo být v míse?

[Počet bonbónů byl dělitelný šesti a současně desíti. V míse bylo nejméně 30 bonbónů.]

N2. Adam trhá papír na kousky. Každý den roztrhá každý kousek papíru, který má z předchozího dne, a to buď na 4, nebo na 10 kousků. Ve středu začínal trháním jednoho kusu papíru. Kolik nejvíce a kolik nejméně kousků mohl mít po trhání v pátek téhož týdne?

[Adam si užil svoji trhací chvilku celkem třikrát. Nejvíce mohl mít $10^3 = 1\,000$ a nejméně $4^3 = 64$ kousků.]

N3. Žaneta a Václav hráli zajímavou hru, každý se svými 10 125 kamínky a hrací kostkou. V každém kole oba házeli kostkou a rozdělovali kamínky. Pokud padlo liché číslo, měl házející za úkol rozdělit svou hromádku na tři hromádky se stejným počtem kamínků, pokud padlo sudé číslo, rozdělovali na pět hromádek se stejným počtem kamínků. V dalších kolech rozdělovali všechny svoje hromádky na třetiny či pětiny podle toho, co padlo na kostce. První, kdo nemohl některou ze svých hromádek rozdělit, prohrál. Kolik kol mohla hra trvat?

[Prvočíselný rozklad čísla 10 125 je $3^4 \cdot 5^3$. Toto množství kamínků lze rozdělit třikrát na pět hromádek a čtyřikrát na tři hromádky. Hra mohla trvat nejméně 3 kola a nejvíce 7 kol.]

N4. Na festivalu rekordů upekli obrovský tvarohový koláč. Tonda, který koláč krájel, uměl rozkrojit jakýkoli kus buď na poloviny, nebo na třetiny. Mohl Tonda rozdělit celý koláč mezi 15 lidí? Pokud ano, mohli mít všichni stejně velký kus koláče?

[Jakýkoli počet kusů lze dostat i jen půlením. Stejné kusy lze dostat pouze pro počty tvaru $2^a \cdot 3^b$. Tonda mohl koláč rozdělit mezi 15 lidí, nikoli však na stejné kusy.]

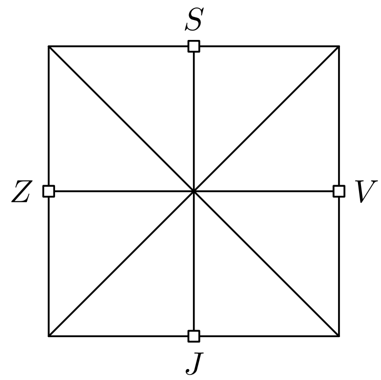
**Z8–I–3**

*Ve sportovním areálu tvořila stanoviště $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Tato stanoviště byla pospojována přímými cestami. Navíc na cestě z $A$ do $B$ byla fontána $F$, kterou se stanovištěm $C$ spojovala cesta kolmá k cestě z $B$ do $E$. Pat a Mat se sešli na stanovišti $E$ a rozhodli se zamést některé cesty. Pat zametl cestu z $E$ do $B$. Mat zametl cestu z $E$ do $A$ a ještě z $A$ do $F$.*

*Určete rozdíl úseků zametených Patem a Matem.* *(L. Hozová)*

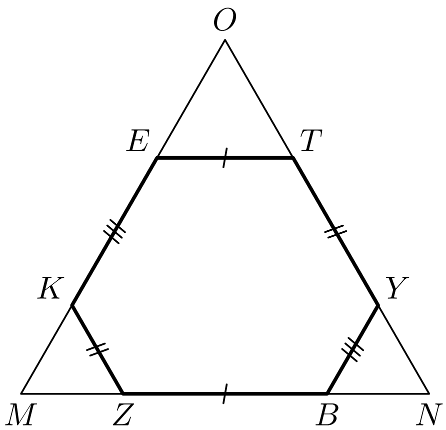
Návodné a doplňující úlohy

N1. Štaflík a Špagetka šli na procházku do parku. Cesty v parku tvoří čtvercový útvar jako na obrázku, uprostřed každé obvodové cesty je vchod. Štaflík vešel jižním vchodem, došel do středu parku, poté pokračoval úhlopříčně do severovýchodního rohu a po obvodové cestě se vydal směrem na jih, až došel zpět k jižnímu vchodu. Špagetka vešel do parku západním vchodem, hned zahnul na sever, na další křižovatce šel úhlopříčně až do jihovýchodního rohu, stejnou cestou se vrátil do středu parku a odtud nejkratší cestou k západnímu vchodu. Kdo měl delší procházku?




[Označme $s$, resp. $u$ délku poloviny strany, resp. úhlopříčky čtverce. Štaflík ušel vzdálenost $4s + u$, Špagetka $2s + 3u$ a platí $u > s$. Delší procházku měl Špagetka.]

N2. Na stranách rovnostranného trojúhelníku $MNO$ jsou body $Z$, $B$, $Y$, $T$, $E$, $K$. Přitom platí, že $2|MZ| = 2|BN| = |ZB|$, $|MO| = 3|EO|$ a že vyznačené úsečky na obrázku jsou rovnoběžné. Určete obvod útvaru $ZBYTEK$, jestliže obvod trojúhelníku $MNO$ je 36 cm.

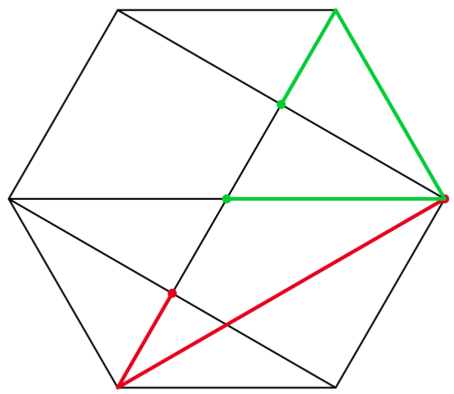



[Strany trojúhelníku $MNO$ měří 12 cm, další body leží ve třetinách, resp. čtvrtinách stran a trojúhelníky $MZK$, $BNY$ a $ETO$ jsou rovnostranné. Obvod mnohoúhelníku $ZBYTEK$ je 26 cm.]

N3. Přes koryto řeky byla natažena dvě lana. Modré lano bylo nataženo kolmo k oběma břehům, zelené bylo nataženo šikmo přes řeku. V jednom místě nad řekou se lana křížila. Mirek zjistil, že od místa křížení to je po modrém laně 4 metry k bližšímu břehu a 6 metrů k tomu vzdálenějšímu. Jedna cesta po zeleném laně ze břehu ke křížení a zpět na stejný břeh měří 9 metrů. Kolik metrů měří obdobná cesta z druhého břehu?

[Poměr vzdáleností od křížení ke břehům je stejný na obou lanech. Cesta po zeleném laně z druhého břehu ke křížení a zpět měří $9 \cdot 6/4 = 13{,}5$ metru.]

N4. V pravidelném šestiúhelníku jsou vyznačeny dvě lomené čáry. Porovnejte délky červené a zelené lomené čáry.



[Nejkratší části zelené a červené lomené čáry jsou stejné. Zbývající červená úsečka je úhlopříčkou kosočtverce, jehož strany jsou shodné se zbývajícími dvěma zelenými úsečkami. Červená lomená čára je kratší než zelená.]

**Z8–I–4**

*Hynek napsal následující příklad s pěti záhadnými sčítanci:*

$$@ + \#\# + *** + \&\&\&\& + \$\$\$\$\$ = ?$$

*Prozradil, že znaky @, #, ∗, &, $ představují navzájem různé číslice 1, 2, 3, 4, 5 a že výsledný součet je dělitelný jedenácti.*

*Které nejmenší a které největší číslo může být výsledkem Hynkova příkladu?*

*(E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Ondřej sestavil všechna nejvýše trojciferná čísla dělitelná jedenácti a obsahující pouze číslice 1, 2, 3. Kolik čísel Ondřej sestavil?

[Taková čísla jsou 11, 22, 33, 121, 132 a 231. Ondřej sestavil 6 čísel.]

N2. Sandra zapsala příklad se třemi sčítanci $*** + \%\% + \$$, v němž každý ze znaků $*$, % a $ zastupuje jednu z číslic od 1 do 9 (různé znaky zastupují různé číslice, stejné znaky stejnou). Jakou největší a jakou nejmenší hodnotu může mít uvedený součet, jestliže je dělitelný deseti?

[Uvedený součet může být nejvíce $999 + 88 + 3 = 1090$, nejméně $111 + 22 + 7 = 140$.]

N3. David zapsal příklad se dvěma sčítanci $*** + \%\%\%$, v němž znaky $*$ a % zastupují dvě číslice (stejné znaky zastupují stejné číslice). Výsledkem tohoto příkladu je trojciferné číslo dělitelné dvanácti. Určete všechny možné výsledky.

[Příklad lze přepsat jako $(* + \%) \cdot 111 = (* + \%) \cdot 3 \cdot 37$. Výsledek je dělitelný dvanácti, právě když číslo $* + \%$ je dělitelné čtyřmi. David mohl mít buď výsledek 444, nebo 888.]

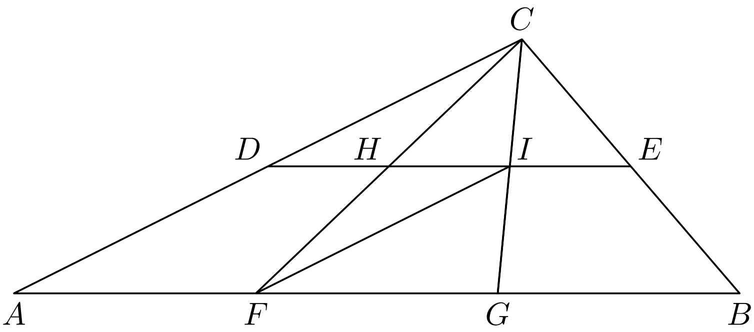
N4. Alena vynásobila tři dvojciferná čísla, z nichž každé bylo tvořeno dvěma stejnými číslicemi. Výsledek byl dělitelný číslem 280. Jaká čísla Alena násobila?

[Dvojciferná čísla se stejnými číslicemi jsou tvaru $a \cdot 11$, kde $a$ je číslice od 1 do 9. Prvočíselný rozklad čísla 280 je $2^3 \cdot 5 \cdot 7$. Alena násobila čísla 55, 77 a 88.]

**Z8–I–5**

*Trojúhelník $ABC$ je rozdělen úsečkami jako na obrázku. Úsečky $DE$ a $AB$ jsou rovnoběžné. Trojúhelníky $CDH$, $CHI$, $CIE$, $FIH$ mají stejný obsah, a to $8\,dm^2$.*

*Určete obsah čtyřúhelníku $AFHD$.* *(E. Semerádová)*

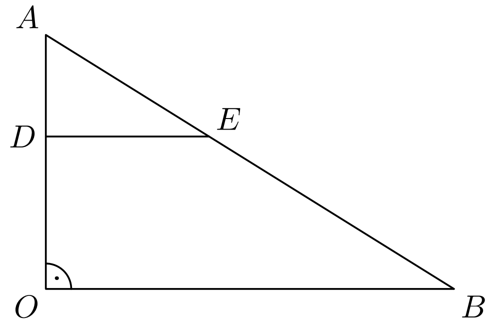



Návodné a doplňující úlohy

N1. Sestrojte trojúhelník $ABC$, jestliže pro středy $S_{AB}$, $S_{BC}$, $S_{CA}$ jeho stran platí $|S_{AB}S_{BC}| = 4\,\mathrm{cm}$, $|S_{BC}S_{CA}| = 5\,\mathrm{cm}$ a $|S_{CA}S_{AB}| = 2\,\mathrm{cm}$.

[Popsané úsečky jsou střední příčky trojúhelníku $ABC$. Ty tvoří trojúhelník, jimi je trojúhelník $ABC$ zcela určen a platí $|AB| = 10\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|CA| = 8\,\mathrm{cm}$.]

N2. Pravoúhlý trojúhelník $OBA$ má obsah $15\,\mathrm{cm}^2$ a pro body $D$ a $E$ na jeho stranách platí $2|OD| = 3|DA|$ a $3|AE| = 2|BE|$. Určete obsah lichoběžníku $OBED$.




[Rozdělme lichoběžník $OBED$ úsečkou $EO$. Pro obsahy trojúhelníků platí $S_{ADE} : S_{DOE} = 2 : 3$, $S_{AEO} : S_{EBO} = 2 : 3$ a $S_{ADE} + S_{DOE} + S_{EBO} = 15\,\mathrm{cm}^2$. Odtud vyplývá, že $S_{ADE} = 2{,}4\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DOE} = 3{,}6\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EBO} = 9\,\mathrm{cm}^2$. Obsah lichoběžníku $OBED$ je $S_{DOE} + S_{EBO} = 12{,}6\,\mathrm{cm}^2$.]

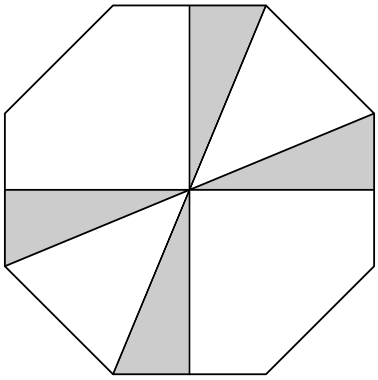
N3. Strana $AB$ trojúhelníku $ABC$ je rozdělena bodem $X$ na poloviny. Na úsečce $XB$ leží bod $Y$ a platí $|XY| = 2|YB|$. Jaký je obsah trojúhelníku $XYC$, jestliže obsah trojúhelníku $ABC$ je $18\,\mathrm{cm}^2$?

[Trojúhelníky $ABC$ a $XYC$ mají stejnou výšku z vrcholu $C$, základna $XY$ je třetinová vzhledem k $AB$. Obsah trojúhelníku $XYC$ je $6\,\mathrm{cm}^2$.]

N4. Standa z pravidelného šestiúhelníku ustřihl trojúhelník, jehož vrcholy byly sousedními vrcholy šestiúhelníku. Jak velká část šestiúhelníku zbyla?

[Pravidelný šestiúhelník je tvořen šesti shodnými rovnostrannými trojúhelníky, ustřižený kus má stejný obsah jako jeden z těchto trojúhelníků. Zbylo pět šestin šestiúhelníku.]

D1. Toník v pravidelném osmiúhelníku vybarvil čtyři trojúhelníky, jejichž vrcholy vybíral mezi vrcholy osmiúhelníku, středy stran a středem osmiúhelníku. Určete, jak velkou část osmiúhelníku Toník vybarvil.



[Vybarvené trojúhelníky jsou navzájem shodné. Toník vybarvil čtvrtinu osmiúhelníku.]

**Z8–I–6**

*Adam vepsal do tabulky* $3 \times 3$ *čísla od 1 po 9 jako na obrázku:*

| | | |
|---|---|---|
| *7* | *6* | *4* |
| *1* | *2* | *8* |
| *9* | *3* | *5* |

*Pro toto vyplnění platí, že součet čísel tří políček podél každé strany je stále stejný. Adam zjistil, že čísla do tabulky lze vyplnit i jinak, aniž by pokazil vlastnost se stejnými součty podél stran.*

*Jakou nejmenší hodnotu může mít tento součet? Uveďte příklad tabulky s nejmenším součtem podél stran a vysvětlete, proč menší být nemůže.* *(J. Tkadlec)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Anička umístila do vrcholů a středů stran rovnostranného trojúhelníku šest navzájem různých nezáporných jednomístných čísel. Na každé straně tak ležela tři čísla a jejich součet byl na všech stranách stejný. Jaký nejmenší mohl být tento součet?

[Nejmenší možný součet je 6 $(0 + 5 + 1,\ 1 + 3 + 2,\ 2 + 4 + 0)$.]

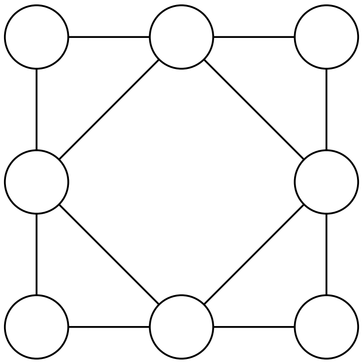
N2. Při táborové hře měl každý z devíti táborníků přiděleno přirozené číslo menší než 10, přičemž žádní dva táborníci neměli stejné číslo. Dostali za úkol rozdělit se do tří skupin tak, aby součet přidělených čísel v každé skupině byl sudý. Je takové rozdělení možné? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, uveďte důvod.

[Rozdělení není možné, mezi přidělenými čísly je lichý počet lichých čísel.]

N3. Přeskládejte čísla v tabulce ze soutěžní úlohy tak, aby součet ve všech řádcích, sloupcích i v obou úhlopříčkách byl 15.

[Jedno řešení čteno zleva doprava, shora dolů je 2, 7, 6; 9, 5, 1; 4, 3, 8. Další se liší otočením nebo souměrností.]

N4. Velký čtverec je rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky a jeden čtverec jako na obrázku. Do kroužků ve vrcholech vepište čísla od 1 do 8 tak, aby v každém kroužku bylo jiné číslo a aby součet v každém trojúhelníku i v malém čtverci byl roven dvanácti.



[Jedno řešení čteno zleva doprava, shora dolů je 8, 1, 5; 3, 6; 7, 2, 4. Další se liší otočením nebo souměrností.]

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

**Z9–I–1**

*Pat a Mat se vykoupali v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti.*

*Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce?* *(L. Hozová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Kulatý dort byl rozdělen na tři stejně velké výseče. První výseč z poloviny snědla Klára. Z druhé výseče snědl Tomáš čtvrtinu. Z třetí výseče snědl Honza polovinu toho, co Klára a Tomáš snědli dohromady. Jaká část dortu zbyla?

[Klára s Tomášem snědli dohromady čtvrtinu dortu ($\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$). Po Honzovi zbylo pět osmin dortu ($1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$).]

N2. Luboš šel na výlet. Po první hodině ušel tolik, že kdyby byl o polovinu této vzdálenosti dále, pak by mu do cíle chybělo ještě třikrát tolik. Jakou část výletu měl Luboš za sebou po první hodině?

[Kdyby byl o polovinu dále, byl by ve čtvrtině. Luboš měl za sebou šestinu výletu ($\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$).]

N3. Marta s Helenou měly vyrobit určitý počet čerpadel. Marta dopoledne vyrobila desetinu požadovaného počtu a odpoledne pětinu toho, co vyrobila dopoledne Helena. Helena dopoledne vyrobila pětinu požadovaného počtu a odpoledne desetinu toho, co vyrobila dopoledne Marta. Která z nich vyrobila více čerpadel?

[Helena vyrobila 21 % všech čerpadel ($\frac{1}{5} + \frac{1}{100} = \frac{21}{100}$), zatímco Marta jen 14 % ($\frac{1}{10} + \frac{1}{25} = \frac{14}{100}$).]

D1. Na číselné ose jsou znázorněny tři navzájem různé zlomky $\frac{k}{l}$, $\frac{l}{k}$ a $-\frac{k}{l}$. Vzdálenost $\frac{k}{l}$ a $-\frac{k}{l}$ na této ose je 24 cm. Jaká je vzdálenost $\frac{k}{l}$ a $\frac{l}{k}$?

[Vzdálenost 0 a $\frac{k}{l}$ je 12 cm, vzdálenost 0 a $\frac{l}{k}$ je $\frac{1}{12}$ cm, tedy vzdálenost $\frac{k}{l}$ a $\frac{l}{k}$ je $\frac{143}{12}$ cm.]

**Z9–I–2**

*Sestrojte kosočtverec $ABCD$, ve kterém platí $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AS| = 7\,\mathrm{cm}$, kde $S$ je středem strany $CD$.* *(K. Pazourek)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Které z následujících vlastností platí v každém kosočtverci?

a) Všechny strany jsou stejně dlouhé.

b) Obě úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

c) Úhlopříčky se navzájem dělí v poměru 2 : 1.
d) Spojnice každého vrcholu se středem libovolné strany, na níž daný vrchol neleží, jsou stejně dlouhé.
e) Obsah je roven polovině součinu délek úhlopříček.
f) Lze mu opsat kružnice.
g) Lze mu vepsat kružnice.

[V každém kosočtverci platí vlastnosti (a), (e) a (g).]

N2. Sestrojte trojúhelník $ABC$, jsou-li známy některé strany a těžnice:

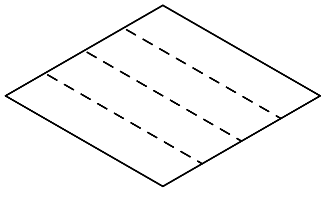
a) $c$, $t_a$, $t_b$,
b) $a$, $b$, $t_a$,
c) $a$, $b$, $t_c$.

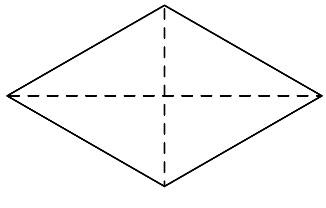
[a) Lze začít s trojúhelníkem $ABT$ (kde $T$ je těžiště $ABC$), poté doplnit středy stran $AC$ a $BC$, poté vrchol $C$. b) Lze začít s trojúhelníkem $ASC$ (kde $S$ je střed strany $BC$), poté vrchol $B$. c) Lze začít s trojúhelníkem $ACD$, kde $|AD| = a$ a $|AC| = 2t_c$, poté střed strany $CD$, který je i středem strany $AB$, poté vrchol $B$ (bod $D$ doplňuje trojúhelník $ABC$ do rovnoběžníku).]

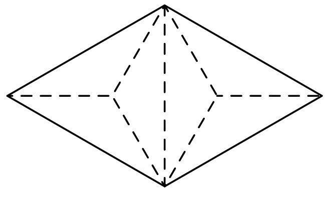
D1. Je dán kosočtverec, jehož vnitřní úhly jsou v poměru 1 : 2 : 1 : 2. Rozdělte jej na:

a) 2 shodné díly,
b) 4 shodné díly,
c) 6 shodných dílů,
d) 7 shodných dílů.

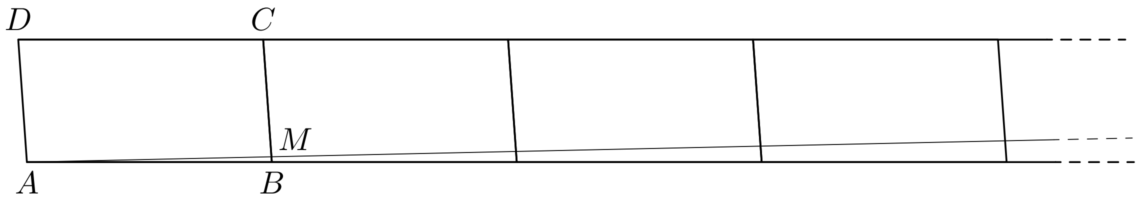
[Libovolný rovnoběžník lze rozdělit na libovolný počet shodných dílů pomocí rovnoběžek s některou z jeho stran. Libovolný rovnoběžník je také úhlopříčkou rozdělen na dva shodné trojúhelníky. Libovolný kosočtverec je úhlopříčkami rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky. Kosočtverec v zadání je složen ze dvou shodných rovnostranných trojúhelníků, tedy v případě c) můžeme být nápaditější, viz poslední obrázek.]







D2. Na obrázku je nekonečný pás složený z kosodélníků shodných s kosodélníkem $ABCD$. Přitom $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DAB| > 90^\circ$ a šířka pásu je $1{,}2\,\mathrm{cm}$. Bod $M$ dělí úsečku $BC$ v poměru 1 : 2023. V jaké vzdálenosti od bodu $D$ protíná přímka $AM$ přímku $CD$? A jak daleko leží tento průsečík od bodu $A$?




[Průsečík přímek $AM$ a $CD$ označíme $R$. Poměr $BM : BC$ je $1 : 2024$, bod $R$ je v pravém horním vrcholu 2024. kosodélníku, tedy vzdálenost $|DR|$ je $2024 \cdot 3 = 6072$ cm. Úsečka $AR$ je přeponou v trojúhelníku $APR$, kde $P$ je pata kolmice z $A$ na $DR$. Pomocí Pythagorovy věty lze vyjádřit vzdálenost $|DP|$, odtud $|PR| = |DR| - |DP|$ a opět pomocí Pythagorovy věty vzdálenost $|AR|$. Zaokrouhleno na milimetry vychází $|AR| \doteq 6071{,}1$ cm.]

**Z9–I–3**

*V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6.*

*Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo.* *(M. Petrová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Neznámé číslo jsme zaokrouhlili na desetiny, výsledek vynásobili třemi a dostali číslo 20,4. Jaké mohlo být původní neznámé číslo?

[Číslo, které po vynásobení třemi dává 20,4, je 6,8. Původní číslo bylo větší nebo rovno 6,75 a ostře menší než 6,85.]

N2. Pro neznámé číslo $x$ platí: když každé z čísel $x$ a $x + 0{,}5$ zaokrouhlíme na desetiny a výsledky sečteme, dostaneme číslo 7,9. Určete možné hodnoty čísla $x$.

[Číslo vyhovující podmínce $x + x + 0{,}5 = 7{,}9$ je $x = 3{,}7$. Možné hodnoty čísla $x$ jsou vymezeny nerovnostmi $3{,}65 \leqq x < 3{,}75$.]

N3. Mějme číslo $x$. Jako $y$ označme číslo vzniklé zaokrouhlením $x$ na setiny a jako $z$ číslo vzniklé zaokrouhlením $x$ na desetiny. Určete $x$, jestliže:

a) $x + y + z = 11{,}198$,
b) $x + y + z = 11{,}398$.

[Z možných vztahů mezi $x$ a zaokrouhlenými čísly lze odvodit interval pro $x$. Ze zápisu součtů lze postupně odvodit informace o číslicích na jednotlivých místech (od tisícin). Číslo $x$ je a) 3,748, b) 3,798.]

N4. Jaký největší může být rozdíl mezi aritmetickým průměrem dvou čísel a aritmetickým průměrem těchto čísel zaokrouhlených na desetiny? Jak se změní odpověď, jestliže místo dvou čísel použijeme $n$ čísel?

[Rozdíl mezi číslem a číslem zaokrouhleným na desetiny může být nejvýše 0,5. Totéž platí i pro diskutované průměry čísel, a to bez ohledu na počet čísel.]

**Z9–I–4**

*Kája měl vynásobit dvě dvojmístná čísla. Z nepozornosti zaměnil pořadí číslic v jednom z činitelů a dostal součin, který byl o 4 248 menší než správný výsledek.*

*Kolik mělo Kájovi správně vyjít?* *(L. Hozová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Jaký největší výsledek můžeme dostat, pokud od dvojmístného čísla odečteme dvojmístné číslo zapsané stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí?

[Nejvíce můžeme dostat $91 - 19 = 72$.]

N2. Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel, která jsou rovna desetinásobku svého ciferného součtu?

[Jedná se o všechny dvojciferné násobky desíti, a těch je devět: 10, 20, ..., 90.]

N3. Uvažme čtyřciferná přirozená čísla s navzájem různými číslicemi, která jsou dělitelná pěti a zároveň devíti. Zapište největší takové číslo v rozvinutém tvaru.

[Největší takové číslo je $9\,810 = 9 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 0$.]

N4. Je dáno dvojmístné číslo, jehož obě číslice jsou menší než 5. K tomuto číslu přičtěte číslo, které je o 11 větší. Zapište výsledný součet v rozvinutém tvaru, jestliže rozvinutý zápis daného čísla je $10a + b$.

[Výsledný součet je $2(10a + b) + 11 = (2a + 1) \cdot 10 + (2b + 1)$.]

D1. Mějme dvě čtyřmístná čísla, v jejichž zápise jsou na prvních dvou místech trojky a na zbylých dvou místech jsou stejné číslice, jen v opačném pořadí. Dokažte, že součet těchto dvou čísel je násobkem jedenácti.

[Součet čísel $\overline{33ab}$ a $\overline{33ba}$ je $6600 + 11a + 11b = 11(600 + a + b)$.]

**Z9–I–5**

*Trojúhelník $ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $C$. Body $A'$, $B'$, $C'$ jsou obrazy bodů $A$, $B$, $C$ postupně ve středových souměrnostech se středy $C$, $A$, $B$. Dokažte, že platí*

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$

*(J. Zhouf)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

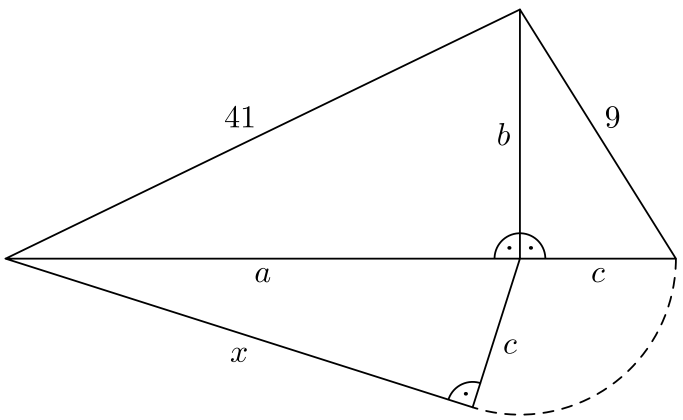
N1. V kartézské souřadné soustavě jsou dány body $K = [3, 0]$, $L = [7, -1]$, $M = [6, 2]$. Určete obvod trojúhelníku $KLM$.

[Trojím užitím Pythagorovy věty (resp. vyjádřením velikostí vektorů $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LM}$ a $\overrightarrow{KM}$) dostáváme obvod trojúhelníku $\sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{13} \doteq 10{,}9$.]

N2. V pravoúhlém trojúhelníku je součet, resp. rozdíl délek přepony a jedné odvěsny $10x$, resp. $\frac{10}{x}$, kde $x$ je kladné číslo. Určete délku zbývající strany.

[Podle Pythagorovy věty platí $a^2 = c^2 - b^2$, kde $a$ a $b$ značí velikosti odvěsen a $c$ velikost přepony. Současně platí $c^2 - b^2 = (c + b) \cdot (c - b)$. Velikost zbývající strany je 10.]

N3. Vyjádřete délku strany $x$ z následujícího obrázku:




[Několikerým užitím Pythagorovy věty dostáváme $a^2 + b^2 = 41^2$, $b^2 + c^2 = 9^2$ a $x^2 = a^2 - c^2$. Současně platí $a^2 - c^2 = (a^2 + b^2) - (b^2 + c^2)$. Hledaná délka strany je $x = 40$.]

N4. Je dán pravoúhlý trojúhelník $ASB$ s přeponou $AB$, kde $|AB| = 13\,\mathrm{cm}$ a $|BS| = 4\,\mathrm{cm}$. Body $C$ a $D$ jsou postupně obrazy bodů $A$ a $B$ ve středové souměrnosti se středem $S$. Určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

[Čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec, jeho obsah je roven polovině součinu délek úhlopříček. Jedna úhlopříčka měří 8 cm, druhá $\sqrt{13^2 - 4^2} = \sqrt{153}\,\mathrm{cm}$. Obsah kosočtverce je $24\sqrt{17}\,\mathrm{cm}^2$.]

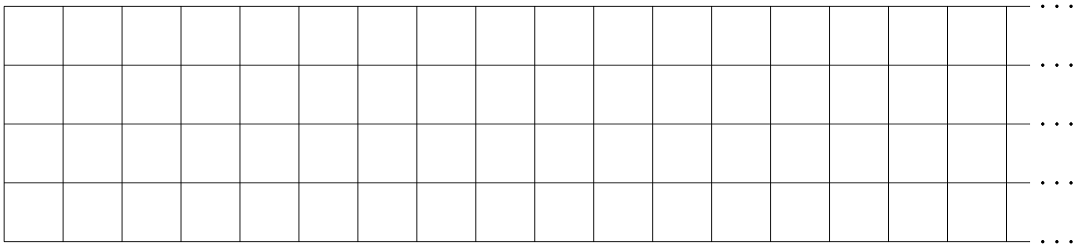
D1. Je dán rovnostranný trojúhelník $ABC$ se stranou délky 4 cm. Označme body $D$, $E$, $F$ postupně jako obrazy bodů $A$, $B$, $C$ ve středových souměrnostech se středy $B$, $C$, $A$. Určete obvod trojúhelníku $DEF$.

[Trojúhelník $DEF$ je rovnostranný. Strana $DE$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku $DAE$, jehož odvěsny jsou $|DA| = 8\,\mathrm{cm}$ (dvojnásobek strany trojúhelníku $ABC$) a $|AE| = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ (dvojnásobek výšky trojúhelníku $ABC$). Podle Pythagorovy věty je $|DE| = 4\sqrt{7}\,\mathrm{cm}$. Obvod trojúhelníku $DEF$ je $12\sqrt{7}\,\mathrm{cm}$.]

## Z9–I–6

*Níže je naznačena část čtvercové sítě sestávající ze 4 řádků a 2023 sloupců. Určete počet čtverců, jejichž všechny vrcholy jsou uzlovými body čtvercové sítě.*

*(K. Pazourek)*



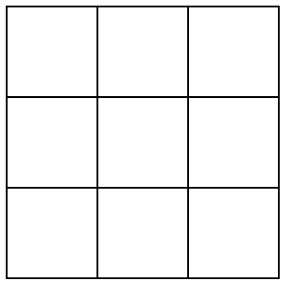
## Návodné a doplňující úlohy

N1. Která z následujících čísel udávají délku strany některého ze čtverců diskutovaných v soutěžní úloze? (Vztaženo k základnímu jednotkovému čtverci sítě.)

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{9},\ \sqrt{10}.$$

[Možné strany čtverců jsou (vzestupně): $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $2 = \sqrt{4}$, $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $3 = \sqrt{9}$, $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$. Z uvedených čísel jsou to všechny kromě $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ a $\sqrt{7}$.]

N2. Kolik je čtverců, které mají vrcholy v uzlových bodech následující čtvercové sítě?



[Takových čtverců je (počítáno od nejmenších po největší) $9+4+4+2+1 = 20$.]

N3. Na přímce je vyznačeno 30 červených bodů. Kolik existuje úseček, které mají oba krajní body a právě $k$ vnitřních bodů červených? Úlohu řešte nejprve pro $k = 1$ a 2, poté obecně.

[Pro $k = 1$ existuje 28 úseček, pro $k = 2$ jich je 27. Pro obecné $k < 29$ existuje $29 - k$ úseček (což zahrnuje také případ $k = 0$), pro $k \geqq 29$ neexistuje žádná úsečka.]

D1. Jsou dány dvě rovnoběžky $a$ a $b$. Na přímce $a$ je vyznačeno 50 červených bodů, na přímce $b$ je 30 červených bodů. Kolik existuje trojúhelníků, které mají na obvodu právě $\ell$ červených bodů, z toho tři ve vrcholech? Úlohu řešte nejprve pro $\ell = 3$ a 4, poté obecně.

[Pro $\ell = 3$ existuje 2920 trojúhelníků, pro $\ell = 4$ jich je 2840. Pro $\ell$ splňující $3 \leqq \ell < 32$ existuje $3160 - 80\ell$ trojúhelníků, pro $\ell$ splňující $32 \leqq \ell < 52$ jich je $1560 - 30\ell$, pro $\ell \geqq 52$ neexistuje žádný trojúhelník. Jednotlivé mezivýsledky jsou v duchu předchozího příkladu počítány takto: $2920 = 49 \cdot 30 + 29 \cdot 50$, $2840 = 48 \cdot 30 + 28 \cdot 50$, $3160 = 52 \cdot 30 + 32 \cdot 50$, $1560 = 52 \cdot 30$.]