I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zajíc běží závod na 2024 metrů. Při startu se odrazil levou nohou a po celou dobu závodu pravidelně střídá levou, pravou a obě nohy. Když se zajíc odrazí levou nohou, skočí 35 dm, když se odrazí pravou nohou, skočí 15 dm, a když se odrazí oběma nohama, skočí 61 dm.

Kolik skoků zajíc udělá, než dorazí do cíle? A kterou nohou se bude odrážet před cílovým skokem? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Vše budeme počítat v decimetrech. Závod je dlouhý 20 240 dm a popsaný zajícův trojskok měří $35 + 15 + 61 = 111$ dm. Dělením se zbytkem zjistíme, že

$$20\,240 = 182 \cdot 111 + 38.$$

Tedy po 182 trojskocích zbývá zajíci do cíle 38 dm.

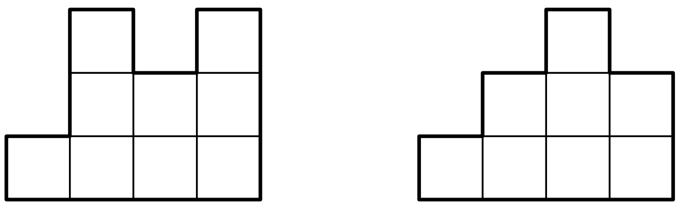
Další odraz vychází na levou nohu, skočí 35 dm a do cíle zbývají 3 dm. Další odraz vychází na pravou nohu a tímto skokem spolehlivě proskočí cílem.

Celkem zajíc udělá $182 \cdot 3 + 2 = 548$ skoků, před cílovým skokem se odrazí pravou nohou.

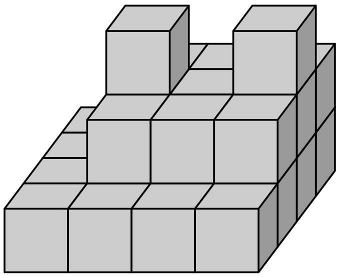
Z5–I–2

Zuzka postavila ze šestnácti stejně velkých kostek čtverec o rozměrech 4×4 kostky. S dalšími stejnými kostkami pokračovala ve stavění. Kostky na sebe stavěla tak, že každé dvě sousední kostky měly společnou celou stěnu. Výsledná stavba vypadala ze dvou různých stran jako na následujícím obrázku.

Zjistěte, kolik nejvíce a kolik nejméně kostek Zuzka na svou stavbu mohla použít. (*E. Novotná*)

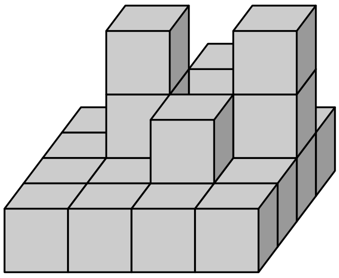


Možné řešení. V první vrstvě bylo 16 kostek. Z uvedených pohledů plyne, že ve třetí vrstvě byly 2 kostky. Počet kostek ve druhé vrstvě nelze jednoznačně určit, nejvíc jich však mohlo být $3 \cdot 3 = 9$. Tato možnost je znázorněna na následujícím obrázku, v níž dva zadané průměty odpovídají pohledu zpředu a zprava:



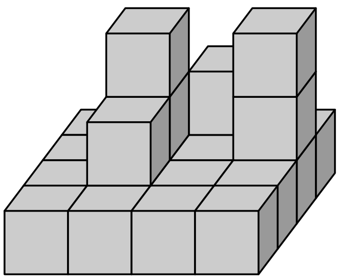
Skutečně nelze přidat jedinou kostku, aby se nezměnil některý z daných průmětů. Zuzka použila nejvíce $16 + 9 + 2 = 27$ kostek.

K nejmenšímu možnému počtu kostek lze dospět tak, že se ze druhé vrstvy postupně odebírá co nejvíce kostek, aniž by se změnil některý z daných průmětů. Jedna taková možnost vypadá takto:

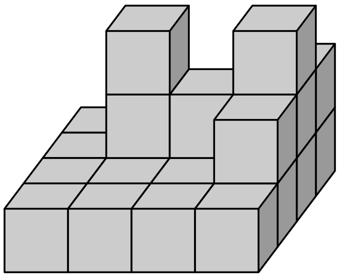


Méně než čtyři kostky ve druhé vrstvě být nemohou. Dvě kostky, na kterých stojí kostky z vrstvy třetí, jsou při pohledu zprava v zákrytu. Proto musí být použity další dvě kostky, aby tento průmět souhlasil se zadáním. Zuzka použila nejméně $16 + 4 + 2 = 22$ kostek.

Poznámka. U možnosti s nejmenším počtem kostek mohou být kostky ve druhé vrstvě rozmístěny různě, avšak nikoli libovolně. Jiné možné rozmístění je toto:



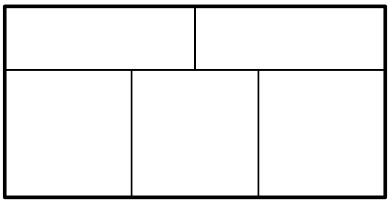
Úpravami ve druhé vrstvě lze mít stavbu s jakýmkoli počtem kostek v rozmezí od 22 do 27 kostek. Zde je jedna možnost postavená z 23 kostek:



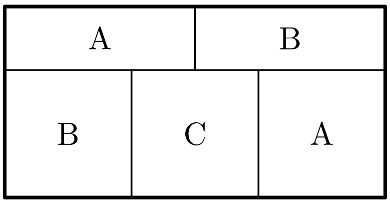
Z5–I–3

Katka měla na zahrádce pět záhonů rozmístěných jako na obrázku. Záhony chtěla osadit česnekem, mrkví a ředkvičkou tak, aby na každém záhonu byl jen jeden druh zeleniny a aby žádné dva záhony se stejnou zeleninou nesousedily.

Kolika způsoby mohla Katka záhony osázet? (*L. Hozová*)



Možné řešení. Záhony se stejnou zeleninou označíme stejným písmenem, záhony s různými zeleninami různými písmeny. Aby záhony se stejnou zeleninou nesousedily, musí být osázeny takto:



Záhony A může Katka osadit libovolnou ze tří plodin, záhony B libovolnou ze zbývajících dvou plodin a záhon C poslední zbylou plodinou. Katka tedy může záhony osázet $3 \cdot 2 = 6$ způsoby.

Poznámka. Všechna možná přiřazení plodin záhonům jsou vypsána zde:

česnek	A	A	C	C	B	B
mrkev	B	C	A	B	C	A
ředkvička	C	B	B	A	A	C

Pokud je česnek na záhonu A, potom mrkev může být buď na záhonu B, nebo C, a ředkvička na zbývajícím záhonu. Takto je postupně vyčerpáno všech $3 \cdot 2 = 6$ možností. Každé dva sousední sloupce v tabulce se liší prohozením dvou písmen a žádný sloupec se neopakuje.

Z5–I–4

V zahrádkářské osadě měl pan Jahoda ve svém sudu 16 litrů vody. Soused pan Malina měl ve svém sudu třikrát více vody než pan Jahoda. Začalo pršet a do obou sudů napršelo stejné množství vody. Po dešti pan Malina zjistil, že má v sudu dvakrát více vody než pan Jahoda.

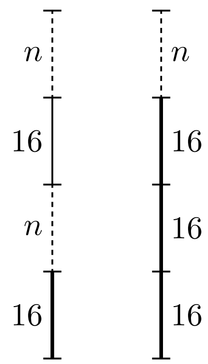
Kolik litrů vody napršelo do každého sudu? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Před deštěm měl pan Malina ve svém sudu $3 \cdot 16 = 48$ litrů vody, což je o 32 litrů více než v sudu pana Jahody.

Do obou sudů napršelo stejně, tedy rozdíl množství vody v sudech po dešti byl opět 32 litrů jako před deštěm. Po dešti bylo v sudu pana Maliny dvakrát více vody než v sudu pana Jahody, tedy v Jahodově sudu bylo 32 a Malinově sudu 64 litrů vody.

Do každého sudu napršelo 16 litrů vody $(48 - 32 = 64 - 48 = 16)$.

Poznámka. Úlohu lze znázornit pomocí úseček



či zapsat rovnicí

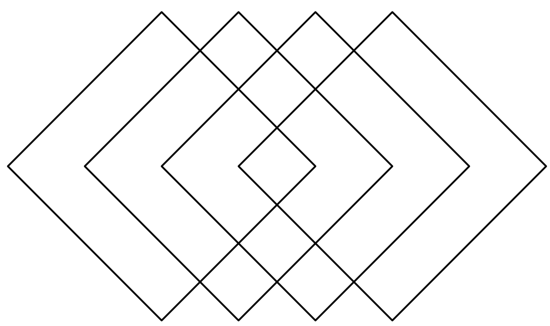
$$2 \cdot 16 + 2n = 3 \cdot 16 + n,$$

kde n značí množství napršené vody.

Z5–I–5

Ze čtyř shodných čtverců byl vytvořen ornament jako na obrázku. Strany čtverců jsou dlouhé 4 cm, jsou navzájem rovnoběžné či kolmé a protínají se buď ve svých čtvrtinách, nebo polovinách. Libor chtěl ornament vybarvit a zjistil, že barva na $1\,\mathrm{cm}^2$ každého souvislého pole ho bude stát tolik korun, kolika čtvercům je toto pole společné.

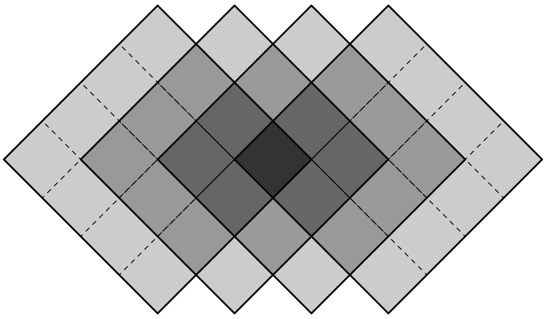
Kolik korun bude stát barva na vybarvení ornamentu? (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Cena barvy v každé části odpovídá počtu čtverců, kterým je tato část společná. To je stejné, jako by všechny čtverce byly samostatně vybarveny barvou stejné ceny.

Každý čtverec má obsah $4 \cdot 4 = 16\,\mathrm{cm}^2$, čtverce jsou čtyři a $1\,\mathrm{cm}^2$ barvy stojí 1 korunu. Tedy barva na vybarvení ornamentu bude stát $16 \cdot 4 = 64$ korun.

Jiné řešení. Různými odstíny šedi rozlišíme, kolika čtvercům jsou jednotlivé části ornamentu společné. Ornament rozdělíme na čtverečky o straně 1 cm:



Všem čtyřem čtvercům je společný 1 čtvereček, třem čtvercům přísluší 6 čtverečků, dvěma čtvercům 12 čtverečků a jednomu čtverci 18. Tedy barva na vybarvení ornamentu bude stát

$$1 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 1 = 64 \text{ korun.}$$

Z5–I–6

Lucka napsala na lístek číslo 12345 a dvakrát jej mezi číslicemi rozstřihla. Získala tak tři menší kartičky se třemi čísly. Tyto kartičky přeskládala dvěma způsoby, čímž dostala dvě různá pětimístná čísla. Rozdíl těchto dvou čísel byl 28 926.

Mezi kterými číslicemi Lucka lístek rozstřihla? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pro názornost si úlohu napíšeme jako písemné odčítání, jehož výsledek je 28 926 a kde hvězdičky na každém řádku zastupují číslice od 1 do 5:

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ - * * * * * \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

Číslici na místě jednotek lze dostat jedině takto (s přechodem přes desítku):

$$\begin{array}{r} * * * * 1 \\ - * * * * 5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

Se zbylými použitelnými číslicemi lze číslici na místě desítek dostat jedině některým z následujících způsobů:

$$\begin{array}{r} * * * 4\,1 \\ - * * * 1\,5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * 5\,1 \\ - * * * 2\,5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

a) V prvním případě by lístek musel být rozstřižen takto 1|234|5 a kartičky přeskládány 5|234|1 a 234|1|5. V tomto případě rozdíl vyhovuje zadání:

$$\begin{array}{r} 5\,2\,3\,4\,1 \\ -\,2\,3\,4\,1\,5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

b) Ve druhém případě by lístek musel být rozstřižen takto 1|2|34|5, což jsou tři (a nikoli dva) střihy. Tento případ nevyhovuje zadání.

Lucka lístek rozstřihla mezi číslicemi 1 a 2 a mezi číslicemi 4 a 5.

Poznámka. Nutnost střihu mezi číslicemi 1 a 2 plyne již z prvního postřehu. Nutnost střihu mezi číslicemi 4 a 5 (a následného přeskládání) plyne z této úvahy: pokud by číslici 5 předcházela 4, potom bychom museli umět doplnit

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,*\,1 \\ -\,*\,*\,*\,4\,5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

V takovém případě by v menšenci na místě desítek musela být číslice 7, kterou však nemáme k dispozici.

Jiné řešení. Lístek lze nadvakrát rozstřihnout šesti způsoby:

$$1|2|345, \quad 1|23|45, \quad 1|234|5, \quad 12|3|45, \quad 12|34|5, \quad 123|4|5.$$

Vzniklé tři kartičky lze přeskládat šesti způsoby, což schematicky (vzestupně) zapíšeme takto:

$$A|B|C, \quad A|C|B, \quad B|A|C, \quad B|C|A, \quad C|A|B, \quad C|B|A.$$

Probráním všech možností lze najít rozstříhání a přeskládání, jež vyhovují zadání.

Místo zkoumání možných rozdílů (kterých je pro každé rozstříhání 15) lze postupovat tak, že k příslušné šestici čísel přičteme požadovaný rozdíl 28926 a ověříme, zda je mezi výsledky některé číslo z dané šestice. Největší číslo, které lze z číslic od 1 do 5 vytvořit, je 54321. Tedy největší číslo, ke kterému má smysl požadovaný rozdíl přičítat, je 25395. Tím se zkoušení podstatně omezuje a vypadá následovně (opakující se či předem zamítnuté možnosti píšeme do závorek):

a) Po rozstříhání 1|2|345 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 13452, \quad 21345, \quad 23451, \quad 34512, \quad 34521$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$41271, \quad 42378, \quad 50271, \quad 52377, \quad (> 54321, \quad \ldots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

b) Po rozstříhání 1|23|45 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 14523, \quad 23145, \quad 23451, \quad 45123, \quad 45231$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 43449, \quad 52071, \quad (52377, \quad > 54321, \quad \dots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

c) Po rozstříhání 1|234|5 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 15234, \quad 23415, \quad 23451, \quad 51234, \quad 52341$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 44160, \quad 52341, \quad (52377, \quad > 54321, \quad \dots)$$

Vyhovuje možnost $23451 + 28926 = 52341$.

d) Po rozstříhání 12|3|45 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 12453, \quad 31245, \quad 34512, \quad 45123, \quad 45312$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 41379, \quad (> 54321, \quad \dots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

e) Po rozstříhání 12|34|5 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 12534, \quad 34125, \quad 34512, \quad 51234, \quad 53412$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 41460, \quad (> 54321, \quad \dots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

f) Po rozstříhání 123|4|5 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 12354, \quad 41235, \quad 45123, \quad 51234, \quad 54123$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 41280, \quad (> 54321, \quad \dots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

Jediná vyhovující možnost vychází v případě c): Lucka lístek rozstřihla mezi číslicemi 1 a 2 a mezi číslicemi 4 a 5.

Poznámka. V případě a) je rozdíl největšího a nejmenšího čísla z dané šestice 22176. Všechny ostatní rozdíly jsou menší, proto požadovaný rozdíl 28926 dostat nelze a nebylo nutné cokoli dál zkoušet.