I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

V loňském roce bylo v našem skautském oddíle o 30 chlapců více než děvčat. Letos se počet dětí v oddíle zvětšil o 10 %, přičemž počet chlapců se zvětšil o 5 % a počet děvčat se zvětšil o 20 %.

Kolik dětí máme letos v oddíle? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Jak počty dětí, tak jejich letošní přírůstky jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Vzhledem k tomu, že $10\,\% = 10/100 = 1/10$, musel být původní počet všech dětí násobkem 10. Podobně platí, že původní počet chlapců byl násobkem 20, neboť $5\,\% = 5/100 = 1/20$, a původní počet děvčat byl násobkem 5, neboť $20\,\% = 20/100 = 1/5$.

Protože chlapců bylo o 30 více než děvčat, nejmenší možné původní počty byly následující (ch, resp. d značí původní počet chlapců, resp. děvčat):

ch	40	60	80	100	120	...
d	10	30	50	70	90	...
$ch + d$	50	90	130	170	210	...

Po započítání letošních přírůstků dostáváme následující přehled:

$1{,}05ch$	42	63	84	105	126	...
$1{,}2d$	12	36	60	84	108	...
$1{,}05ch + 1{,}2d$	54	99	144	189	234	...
$1{,}1(ch + d)$	55	99	143	187	231	...

Součet nových počtů chlapců a dívek je roven původnímu součtu zvětšenému o 10 % právě ve druhém případě; se zvětšujícími se čísly se rozdíl mezi těmito dvěma hodnotami jenom zvětšuje. Letos je ve skautském oddíle 99 dětí.

Poznámka. Problém lze zapsat pomocí rovnice

$$1{,}05ch + 1{,}2d = 1{,}1(ch + d),$$

kde $ch = d + 30$. Po dosazení a úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 2{,}25d + 31{,}5 &= 2{,}2d + 33,\\ 0{,}05d &= 1{,}5,\\ d &= 30, \end{aligned}$$

což odpovídá druhému z výše uvedených případů.

Z8–I–2

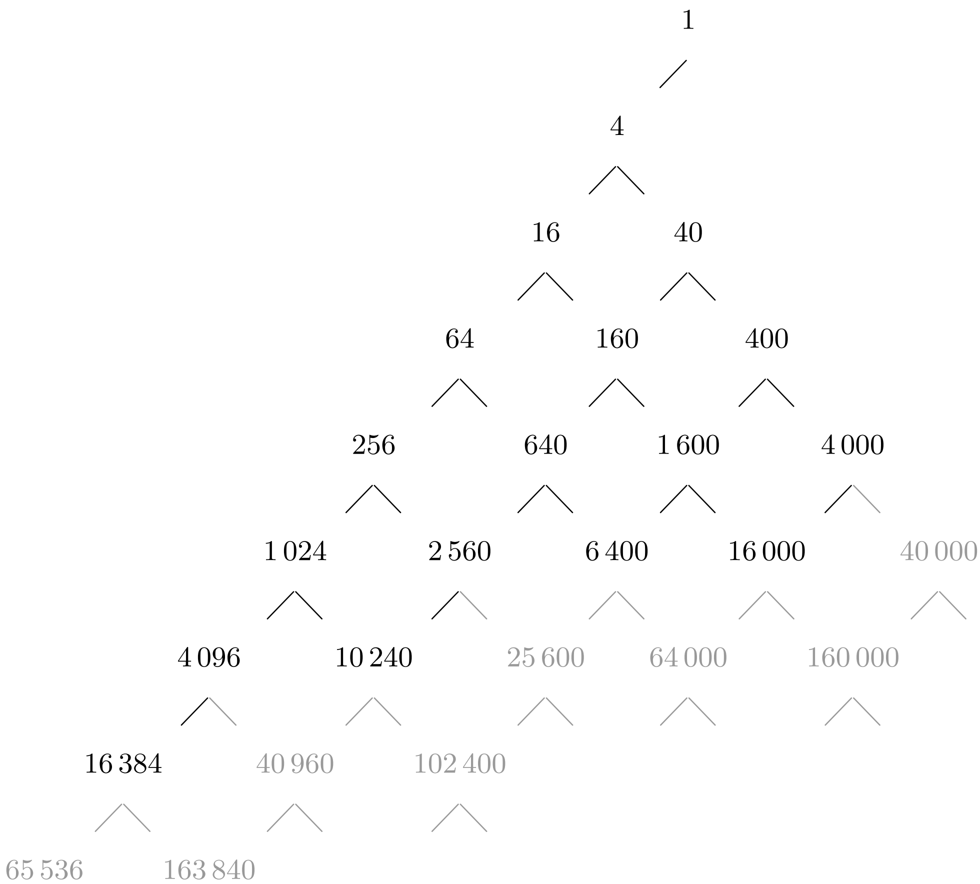
Adam měl papír, který byl natolik veliký, že by z něj šlo natrhat několik desítek tisíc kousků. Nejprve papír roztrhal na čtyři kousky. Každý z těchto kousků vzal a roztrhal buď na čtyři, nebo na deset kousků. Stejným způsobem pokračoval dál: každý nově vzniklý kousek roztrhal buď na čtyři, nebo na deset menších kousků.

Rozhodněte a vysvětlete, zda může Adam tímto způsobem natrhat přesně 20 000 kousků. *(I. Jančigová)*

Možné řešení. Když Adam roztrhá nějaký kousek na 4 menší kousky, celkový počet kousků se zvětší o 3. Když Adam roztrhá nějaký kousek na 10 menších kousků, celkový počet kousků se zvětší o 9. Zejména platí, že počet kousků po každém trhání dává stejný zbytek po dělení třemi. Na začátku měl Adam jeden kus papíru, tedy po každém trhání byl zbytek po dělení aktuálního počtu kousků třemi roven 1.

Avšak zbytek po dělení 20 000 : 3 je roven 2 (nejbližší číslo dělitelné 3 je 20 001). Tedy Adam nemohl natrhat 20 000 kousků.

Poznámka. Za předpokladu, že by Adam v každém kroku trhal všechny stávající kousky papíru stejným způsobem, by bylo možné počty kousků na konci každého kroku snadno sledovat:



Adam začal s jedním kusem papíru, po prvním trhání měl 4 kousky. Po druhém trhání by měl buď 16 ($= 4 \cdot 4$), nebo 40 ($= 4 \cdot 10$) kousků. Po třetím trhání by měl buď 64 ($= 16 \cdot 4$), nebo 160 ($= 16 \cdot 10 = 40 \cdot 4$), nebo 400 ($= 40 \cdot 10$) kousků atd. Čísla nalevo od svého předchůdce vznikla násobením 4, čísla napravo násobením 10. Čísla větší než 20 000 jsou napsána šedě. Mezi zbylými možnostmi se číslo 20 000 nevyskytuje, tedy Adam by takto daný počet nenatrhal.

V prvočíselném rozkladu každého z takto vzniklých čísel jsou pouze čísla 2 a 5, přičemž 2 je obsažena alespoň dvakrát (z prvního trhání) a ke každé 5 přísluší jedna 2 (z trhání na 10 kousků). Zejména rozdíl počtu 5 a počtu 2 je sudé číslo (jež je dvojnásobkem počtu trhání na 4 kousky). Prvočíselný rozklad čísla 20 000 vypadá následovně:

$$20\,000 = 2 \cdot 10\,000 = 2 \cdot 10^4 = 2^5 \cdot 5^4.$$

V rozkladu je počet 2 o jednu větší než počet 5, což potvrzuje předchozí závěr bez uvedeného vypisování.

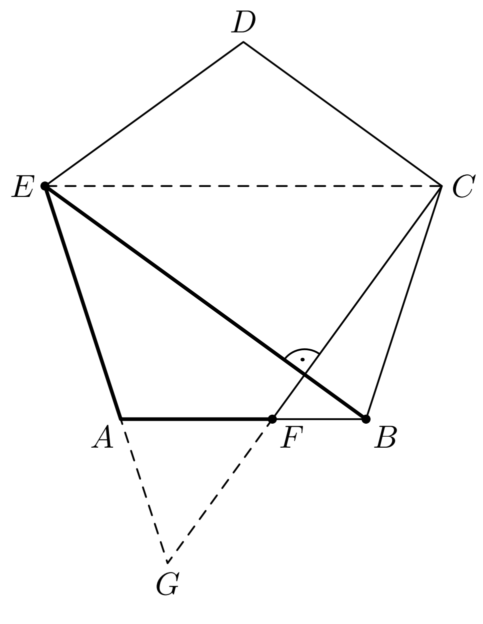
Řešení úlohy založená na tomto či podobném předpokladu sice nejsou úplná, ale lze je posuzovat alespoň jako částečně správná.

Z8–I–3

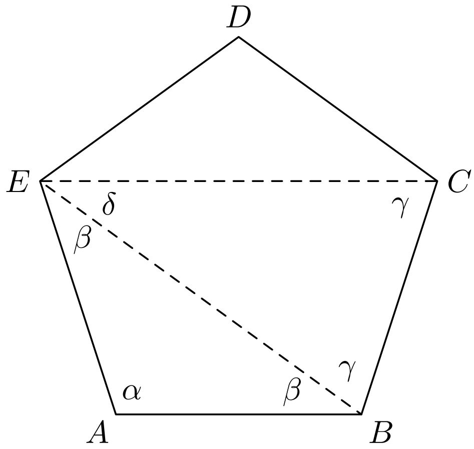
Ve sportovním areálu tvořila stanoviště A, B, C, D, E vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Tato stanoviště byla pospojována přímými cestami. Navíc na cestě z A do B byla fontána F, kterou se stanovištěm C spojovala cesta kolmá k cestě z B do E. Pat a Mat se sešli na stanovišti E a rozhodli se zamést některé cesty. Pat zametl cestu z E do B. Mat zametl cestu z E do A a ještě z A do F.

Určete rozdíl úseků zametených Patem a Matem. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Doplníme průsečík přímek CF a AE, který označíme G:



V pravidelném pětiúhelníku jsou všechny strany navzájem shodné a stejně tak všechny úhlopříčky. Tedy Patova cesta EB je shodná s úhlopříčkou EC. Postupně ukážeme, že úsečka EC je shodná s EG a že úsečka AF je shodná s AG. K těmto tvrzením se dopracujeme porovnáním několika úhlů, které si označíme podle následujícího obrázku. V tomto značení zohledňujeme, že trojúhelníky BAE a BEC jsou rovnoramenné, tedy že úhly u jejich základen jsou shodné:



Pětiúhelník sestává ze tří trojúhelníků, tedy součet velikostí vnitřních úhlů pětiúhelníku je $3 \cdot 180° = 540°$. Pravidelný pětiúhelník má všechny vnitřní úhly shodné, tedy velikost vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku je $540° : 5 = 108°$. V našem značení tak dostáváme

$$\alpha = \beta + \gamma = 108°.$$

Součet úhlů v trojúhelníku BAE je $\alpha + 2\beta = 180°$, tedy

$$\beta = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Odtud a z předchozího vyjádření dostáváme

$$\gamma = 108° - 36° = 72°.$$

Součet úhlů v trojúhelníku BEC je $2\gamma + \delta = 180°$, tedy

$$\delta = 180° - 2 \cdot 72° = 36°.$$

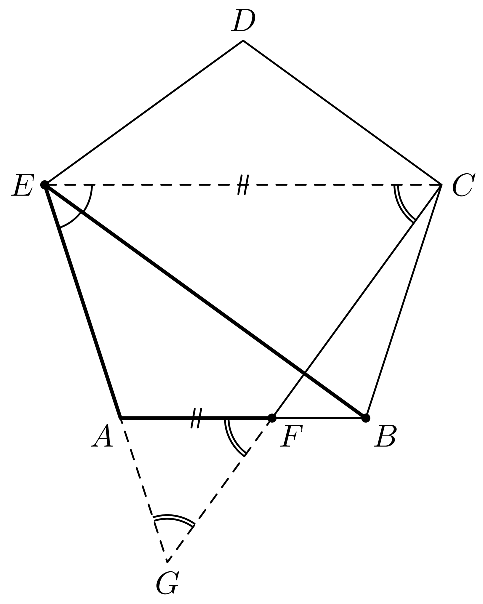
Z uvedeného zejména vyplývá, že úhly BEC a BEG jsou shodné. Navíc úsečky CG a EB jsou podle zadání kolmé, tedy trojúhelník CEG je rovnoramenný s hlavním vrcholem E. Odtud vyplývá, že úsečky EC a EG jsou shodné a stejně tak úhly u základny CG.

Pravidelný pětiúhelník je souměrný (mimo jiné) podle osy úsečky AB, tedy úsečky AB a EC jsou rovnoběžné. Souhlasné úhly ECG a AFG jsou shodné, proto také trojúhelník FAG je rovnoramenný s hlavním vrcholem A. Odtud vyplývá, že úsečky AF a AG jsou shodné.

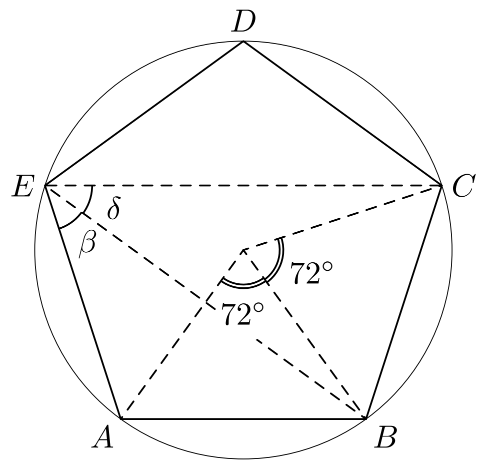
Dohromady dostáváme

$$|EA| + |AF| = |EA| + |AG| = |EG| = |EC| = |EB|,$$

tedy Mat a Pat zametli stejně dlouhé úseky.



Poznámka. Pravidelnému pětiúhelníku lze vždy opsat kružnici. Vzhledem k této kružnici jsou úhly BEC a BEA obvodovými úhly, které přísluší navzájem shodným tětivám BC a BA, a proto jsou shodné. Tento (nesamozřejmý) poznatek může významně zkrátit argumentaci v předchozím řešení. Navíc obvodový úhel je polovinou úhlu středového, který je v našem případě roven $360° : 5 = 72°$. Vzhledem k předchozímu značení tedy vskutku platí $\beta = \delta = 72° : 2 = 36°$.



Z8–I–4

Hynek napsal následující příklad s pěti záhadnými sčítanci:

$$@ + \#\# + *** + \&\&\&\& + \$\$\$\$\$ = ?$$

Prozradil, že znaky @, #, $*$, &, \$ představují navzájem různé číslice 1, 2, 3, 4, 5 a že výsledný součet je dělitelný jedenácti.

Které nejmenší a které největší číslo může být výsledkem Hynkova příkladu?

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Hynkův příklad můžeme přepsat jako

$$@ + 11 \cdot \# + 111 \cdot * + 1\,111 \cdot \& + 11\,111 \cdot \$ = ?$$

Druhý a čtvrtý sčítanec je dělitelný 11. Koeficient 111 u třetího sčítance a 11 111 u pátého sčítance dává po dělení 11 zbytek 1. Tedy původní součet je dělitelný 11, právě když součet $@ + * + \$$ je dělitelný 11.

Z dostupných čísel lze číslo 11 (či jeho násobek) vyjádřit jedině jako $2 + 4 + 5$. Tedy znaky @, $*$, \$ představují čísla 2, 4, 5 v nějakém pořadí. Na znaky # a & zbývají čísla 1 a 3 v nějakém pořadí.

Nejmenší součet dostaneme, pokud znakům \$, &, $*$, #, @ po řadě přiřadíme nejmenší možná čísla v rámci předchozích omezení:

$$5 + 33 + 444 + 1\,111 + 22\,222 = 23\,815. \tag{1}$$

Největší součet dostaneme, pokud znakům \$, &, $*$, #, @ po řadě přiřadíme největší možná čísla v rámci předchozích omezení:

$$2 + 11 + 444 + 3\,333 + 55\,555 = 59\,345. \tag{2}$$

Výsledkem Hynkova příkladu může být nejméně 23 815 a nejvýše 59 345.

Poznámka. Počet možností, jak pěti znakům přiřadit pět číslic, je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. I bez úvodních postřehů lze určit nejmenší a největší součet, aniž by se musely probírat všechny možnosti. Např. největší možný součet, který lze z daných číslic obdržet bez nároku na dělitelnost 11, odpovídá přiřazení $\$ = 5$, $\& = 4$, $* = 3$, $\# = 2$, $@ = 1$, což zkráceně zapíšeme jako $(5, 4, 3, 2, 1)$. Možné součty sestupně odpovídají přiřazením

$$(5,4,3,2,1),\quad (5,4,3,1,2),\quad (5,4,2,3,1),\quad (5,4,2,1,3),\quad (5,4,1,3,2),\quad (5,4,1,2,3),$$
$$(5,3,4,2,1),\quad (5,3,4,1,2),\quad (5,3,2,4,1),\quad (5,3,2,1,4),\quad \ldots$$

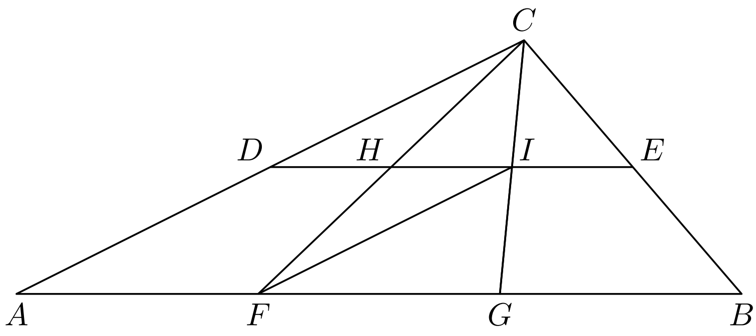
Postupným výpočtem odpovídajících součtů a ověřením jejich dělitelnosti 11 lze odhalit největší vyhovující možnost. Řešení (2) odpovídá 8. možnosti v této posloupnosti.

Při hledání nejmenšího možného Hynkova součtu lze postupovat obdobně, počínaje přiřazením $(1, 2, 3, 4, 5)$. Řešení (1) odpovídá 27. možnosti v příslušné posloupnosti.

Z8–I–5

Trojúhelník ABC je rozdělen úsečkami jako na obrázku. Úsečky DE a AB jsou rovnoběžné. Trojúhelníky CDH, CHI, CIE, FIH mají stejný obsah, a to $8\,\mathrm{dm}^2$.

Určete obsah čtyřúhelníku $AFHD$. (*E. Semerádová*)



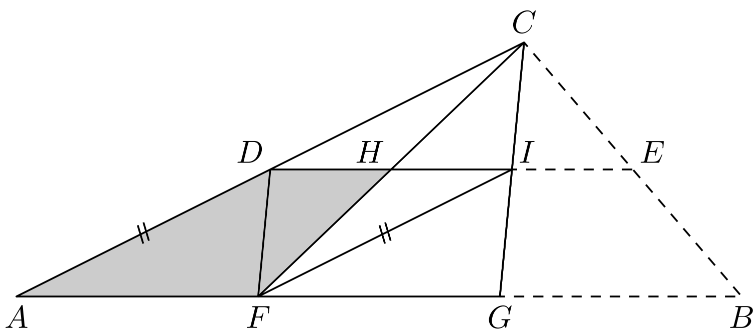
Možné řešení. Trojúhelníky CDH a CHI mají společnou stranu CH, tedy mají stejnou výšku ze společného vrcholu C. Tyto trojúhelníky mají stejný obsah, tedy úsečky DH a HI jsou shodné. Trojúhelníky CHI a FIH mají společnou stranu HI, tedy mají stejnou výšku ze společného vrcholu I. Tyto trojúhelníky mají stejný obsah, tedy úsečky CH a HF jsou shodné.

Předchozí závěry znamenají, že H je středem úseček DI a CF, což jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $CDFI$. Tento čtyřúhelník je tedy rovnoběžníkem, který je úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky se stejným obsahem. Obsah rovnoběžníku $CDFI$ je tedy roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku CDH.

Zejména platí, že přímky AC a FI jsou rovnoběžné, tedy také čtyřúhelník $AFID$ je rovnoběžníkem. Tento rovnoběžník má s rovnoběžníkem $CDFI$ společný trojúhelník DFI, který tvoří polovinu jak prvního, tak druhého rovnoběžníku. Obsah rovnoběžníku $AFID$ je tedy stejný jako obsah rovnoběžníku $CDFI$.

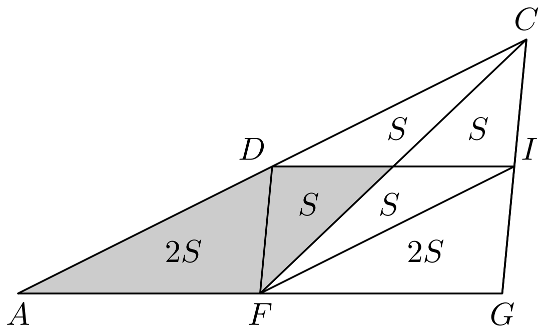
Obsah čtyřúhelníku $AFHD$ můžeme vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AFHD} &= S_{AFID} - S_{FIH} = \\ &= S_{CDFI} - S_{CDH} = \\ &= 4 \cdot S_{CDH} - S_{CDH} = 3 \cdot 8 = 24\,(\mathrm{dm}^2). \end{aligned}$$



Poznámky. Čtyřúhelník $AFHD$ je vlastně lichoběžníkem. Body B a E nehrají při řešení úlohy žádnou roli. Z úvodních postřehů vyplývá několik dalších skutečností, které lze použít při řešení úlohy:

Úsečky DI, IF a FD jsou středními příčkami trojúhelníku AGC, a ty rozdělují tento trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Obsah každého z těchto trojúhelníků je roven dvojnásobku obsahu referenčního trojúhelníku CDH (na obrázku vyznačeno jako S). Tedy $S_{AFHD} = 3 \cdot S_{CDH}$.



Trojúhelníky CDH a CAF jsou podobné s koeficientem 2. Obsah trojúhelníku CAF je proto čtyřnásobkem obsahu trojúhelníku CDH. Tedy $S_{AFHD} = S_{CAF} - S_{CDH} = 3 \cdot S_{CDH}$.

Z8–I–6

Adam vepsal do tabulky 3×3 čísla od 1 po 9 jako na obrázku:

7	6	4
1	2	8
9	3	5

Pro toto vyplnění platí, že součet čísel tří políček podél každé strany je stále stejný. Adam zjistil, že čísla do tabulky lze vyplnit i jinak, aniž by pokazil vlastnost se stejnými součty podél stran.

Jakou nejmenší hodnotu může mít tento součet? Uveďte příklad tabulky s nejmenším součtem podél stran a vysvětlete, proč menší být nemůže. (*J. Tkadlec*)

Možné řešení. Vzhledem k tomu, že každé rohové políčko vystupuje ve dvou součtech, snažíme se do těchto políček umístit nejmenší možná čísla a nějak doplnit zbytek. Po chvíli zkoušení lze odhalit např. následující vyplnění, v němž je součet čísel podél každé strany roven 12:

1	9	2
8	7	6
3	5	4

Vyplnění s menšími součty se najít nedaří, a to proto, že to není možné. Nejmenší možný součet podél strany se sčítancem 9 je $1 + 2 + 9 = 12$. Tedy číslo 9 by muselo být uprostřed tabulky a zbylá čísla podél stran. Nejmenší možný součet podél strany se sčítancem 8 je $1 + 2 + 8 = 11$. Tedy menšího součtu dosáhnout nelze a přemýšlíme nad doplněním tabulky, podél jejíž jedné strany jsou čísla 1, 2 a 8. Podél protilehlé strany by byla tři ze zbývajících pěti čísel. Nejmenší možná čísla jsou 3, 4 a 5, jejichž součet je však $3 + 4 + 5 = 12$ a nikoli 11.

Nejmenší možná hodnota součtu v Adamově tabulce je 12.

Poznámka. Každé ze čtyř rohových políček přispívá do dvou součtů, každé ze zbylých čtyř políček podél stran přispívá do jednoho součtu. Tedy součet všech čtyř součtů podél stran je alespoň

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + 8) = 46.$$

Požadavek rovnosti součtů podél stran znamená, že předchozí součet by musel být dělitelný čtyřmi. Nejbližší větší číslo dělitelné čtyřmi je 48. Tedy nejmenší možná hodnota součtu v Adamově tabulce je $48 : 4 = 12$. Výše uvedená tabulka ukazuje, že takové vyplnění je možné.