

## I. kolo kategorie Z6

## Z6–I–1

Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček.

Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda? (M. Petrová)

**Možné řešení.** Úlohu můžeme s výhodou řešit odzadu:

- Před druhým (posledním) kolem výměn měli Přemek a Robin o sedm kuliček méně, zatímco Jarda o 14 kuliček více. Tedy Přemek a Robin měli  $25 - 7 = 18$  kuliček, zatímco Jarda jich měl  $25 + 14 = 39$ .
- Před prvním kolem výměn měl Robin dvojnásobek kuliček (polovinu dal Jardovi, zbyla mu polovina) a Přemek tři poloviny kuliček (třetinu dal Jardovi, zbyly mu dvě třetiny). Tedy Robin měl  $2 \cdot 18 = 36$  kuliček a Přemek  $\frac{3}{2} \cdot 18 = 27$  kuliček.
- Během přerozdělování byl celkový počet kuliček stále stejný. Součet po druhém, resp. prvním kole výměn byl  $25 + 25 + 25 = 18 + 18 + 39 = 75$  kuliček. Před první výměnou (po hře) měl Robin 36 a Přemek 27 kuliček. Tedy po hře měl Jarda

$$75 - 36 - 27 = 12 \text{ kuliček.}$$

**Poznámka.** Znázornění předchozích úvah, příp. kontrola výsledků může vypadat takto:

stavy	Robin	Přemek	Jarda	výměny
po 2. kole výměn	25	25	25	
		↑ 7	↓ 7	Jarda Přemkovi
	↑ 7		↓ 7	Jarda Robinovi
po 1. kole výměn	18	18	39	
	↓ 18		↑ 18	Robin Jardovi
		↓ 9	↑ 9	Přemek Jardovi
po hře	36	27	12	

**Z6–I–2**

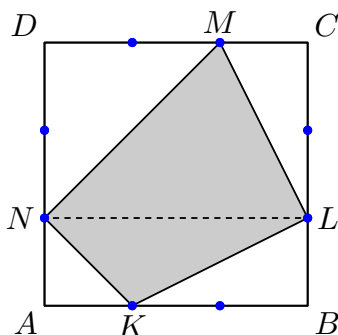
Karolína narýsovala čtverec o straně 6 cm. Na každé straně čtverce vyznačila modrou barvou dva body, kterými rozdělila příslušnou stranu na tři shodné části. Potom sestrojila čtyřúhelník, který měl všechny vrcholy modré a jehož žádné dva vrcholy neležely na stejné straně čtverce.

Jaké obsahy čtyřúhelníků mohla Karolína dostat? Uveďte všechny možnosti.

(L. Hozová)

**Možné řešení.** Čtyřúhelníky s různými obsahy lze rozlišit následovně:

a) Některá úhlopříčka čtyřúhelníku je rovnoběžná se stranou čtverce. Označme vrcholy čtverce a čtyřúhelníku tak, že úhlopříčka  $LN$  je rovnoběžná se stranami  $AB$  a  $CD$ :

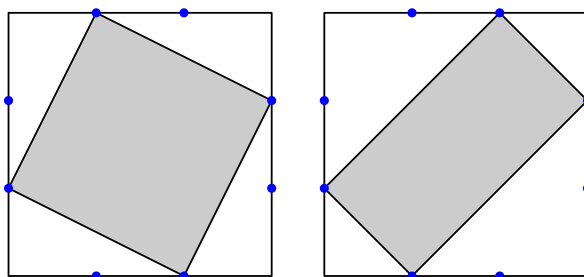


Obsah trojúhelníku  $LNK$  je polovinou obsahu obdélníku  $LNAB$ , obsah trojúhelníku  $LMN$  je polovinou obsahu obdélníku  $LNDC$ . Trojúhelníky  $LNK$  a  $LMN$  tvoří dohromady celý čtyřúhelník, obdélníky  $LNAB$  a  $LNDC$  tvoří dohromady daný čtverec. Obsah čtverce je  $6 \cdot 6 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$ , obsah čtyřúhelníku  $KLMN$  je poloviční:

$$36 : 2 = 18 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Není podstatné, zda rovnoběžné úsečky uvažujeme vodorovně nebo svisle. Také umístění bodů  $K$  a  $M$  na stranách čtverce nehraje v předchozí úvaze žádnou podstatnou roli.

b) Žádná úhlopříčka čtyřúhelníku není rovnoběžná se stranou čtverce. V tomto případě rozlišujeme dvě možnosti:



Skutečně platí, že záměna kteréhokoli vrcholu v kterémkoli z těchto čtyřúhelníků dává čtyřúhelník, jehož úhlopříčka je rovnoběžná se stranou čtverce (tedy případ diskutovaný výše). Uvedené čtyřúhelníky mají navzájem různé obsahy, a ty vyjádříme jako rozdíl obsahu

celého čtverce a obsahů čtyř trojúhelníkových rožků. Obsah čtverce je  $6 \cdot 6 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$ . Rožky jsou trojího typu a jejich obsahy jsou

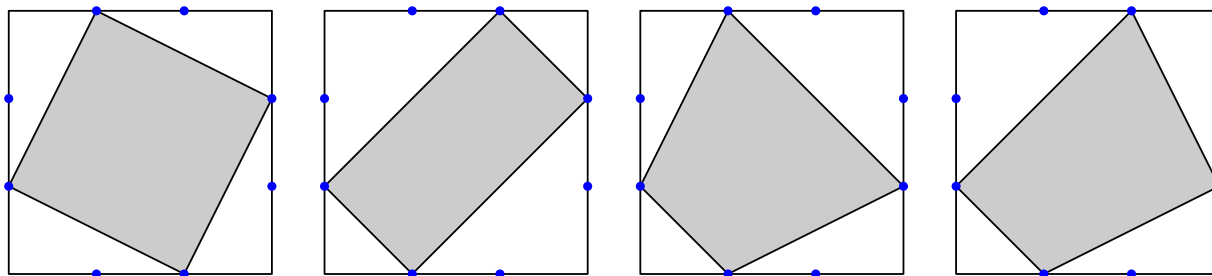
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (cm}^2\text{)}, \quad \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}, \quad \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Obsahy prvního a druhého čtyřúhelníku jsou

$$36 - 4 \cdot 4 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}, \quad 36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 8 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Karolína mohla dostat čtyřúhelníky s obsahy 16, 18 a 20 (cm<sup>2</sup>).

**Jiné řešení.** Na každé straně čtverce Karolína vybírala jeden ze dvou modrých bodů jako vrchol čtyřúhelníku. Takto mohla sestavit celkem  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  čtyřúhelníků. Mnohé z nich jsou však navzájem shodné, tedy mají stejné obsahy. Navzájem neshodné čtyřúhelníky, které mohla Karolína sestavit, jsou čtyři:



Skutečně platí, že záměna kteréhokoli vrcholu v kterémkoli čtyřúhelníku dává čtyřúhelník, který je shodný s jiným z těchto čtyřúhelníků.

Obsah každého čtyřúhelníku lze vyjádřit jako rozdíl obsahu celého čtverce a obsahů čtyř trojúhelníkových rožků. U třetího a čtvrtého čtyřúhelníku odečítáme stejné rožky (pouze jiným způsobem), proto jsou obsahy těchto čtyřúhelníků stejné. Stačí tedy prověřit první tři čtyřúhelníky. Jejich obsahy jsou vypočteny v předchozím řešení.

Karolína mohla dostat čtyřúhelníky s obsahy 16, 18 a 20 (cm<sup>2</sup>).

**Poznámky.** Případné shodnosti v předchozí úvaze patří mezi souměrnosti čtverce, tj. zobrazení, které zachovávají daný čtverec. Ty zahrnují osové souměrnosti, středovou souměrnost a otáčení o 90°. Čtverec má celkem osm souměrností.

### Z6–I–3

V osmimístném čísle je každá jeho číslice (kromě poslední) větší než číslice následující. Kolik je všech takových čísel? (I. Jančígová)

**Možné řešení.** Popsaná čísla lze sestavit tak, že z deseti dostupných číslic se odstraní dvě a zbylých osm se uspořádá sestupně. To je stejné, jako by se z desetimístného čísla 9876543210 odstranily dvě číslice:

- Pokud bychom z tohoto čísla jako první číslici odstranili 9, potom zbývá devět možností, kterou číslici odstranit jako druhou.

- Pokud bychom jako první číslici odstranili 8, potom zbývá osm možností, kterou číslici odstranit jako druhou (odstranění dvojice 8 a 9 je zahrnuto v předchozím případě).
- Pokud bychom jako první číslici odstranili 7, potom zbývá sedm možností, kterou číslici odstranit jako druhou (odstranění dvojic 7, 8 a 7, 9 je zahrnuto v předchozích případech).
- V podobném duchu uvažujeme až do konce...
- Pokud bychom jako první číslici odstranili 1, potom zbývá jediná možnost, kterou číslici odstranit jako druhou, a to 0.

Celkový počet možností, tedy počet všech čísel vyhovujících zadání, je

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45.$$

**Jiné řešení.** Počet možností, jak odstranit dvě číslice z desíti, lze určit následovně:

První číslici z desíti lze vybrat deseti způsoby. Druhou číslici ze zbylých devíti číslic lze vybrat devíti způsoby. To dává celkově  $10 \cdot 9 = 90$  možností, jak vybrat dvě číslice z desíti s ohledem na pořadí výběru. Toto pořadí nás však nezajímá — není podstatné, v jakém pořadí číslice vybíráme, ale které vybereme. Tedy celkový počet možností je poloviční:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45.$$

**Poznámka.** Předchozí dvojí vyjádření téhož výsledku lze zobecnit takto:

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1).$$

Toto číslo vyjadřuje počet všech dvojic, které lze utvořit z  $n$  prvků (bez ohledu na pořadí výběru).

#### Z6–I–4

V následujícím písemném násobení dvou trojmístných čísel jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:

$$\begin{array}{r}
 * * * \\
 \times * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 3 1 7 5 \\
 * * * \\
 \hline
 * * 6 * *
 \end{array}$$

(L. Hozová)

**Možné řešení.** Podle známého postupu je druhý mezivýsledek 3175 součinem prvního činitele a druhé číslice druhého činitele. Jako součin trojmístného a jednomístného čísla lze

číslo 3175 vyjádřit jediným způsobem, a to  $635 \cdot 5$  (prvočíselný rozklad je  $3175 = 5 \cdot 5 \cdot 127$ ). Tedy můžeme doplnit:

$$\begin{array}{r}
 635 \\
 \times *5* \\
 \hline
 *** * \\
 3175 \\
 *** \\
 \hline
 **6**
 \end{array}$$

Třetí mezivýsledek je trojmístné číslo, které je součinem 635 a první číslice druhého činitele. Jediným trojmístným násobkem čísla 635 je samo toto číslo. Tedy můžeme doplnit:

$$\begin{array}{r}
 635 \\
 \times 15* \\
 \hline
 *** * \\
 3175 \\
 635 \\
 \hline
 **6**
 \end{array}$$

První mezivýsledek je čtyřmístné číslo, které je součinem 635 a třetí číslice druhého činitele. Čtyřmístné násobky čísla 635 jsou tyto:

$$\begin{array}{l}
 635 \cdot 2 = 1270, \quad 635 \cdot 3 = 1905, \quad 635 \cdot 4 = 2540, \quad 635 \cdot 5 = 3175, \\
 635 \cdot 6 = 3810, \quad 635 \cdot 7 = 4445, \quad 635 \cdot 8 = 5080, \quad 635 \cdot 9 = 5715.
 \end{array}$$

Aby třetí číslice ve výsledném součinu byla 6, musí být druhá číslice prvního mezivýsledku buď 3, nebo 4 (podle toho, zda došlo k přechodu přes desítku či nikoli). Mezi výše uvedení kandidáty splňuje tuto podmínku pouze číslo 4445. Tedy můžeme doplnit a dopočítat výsledek:

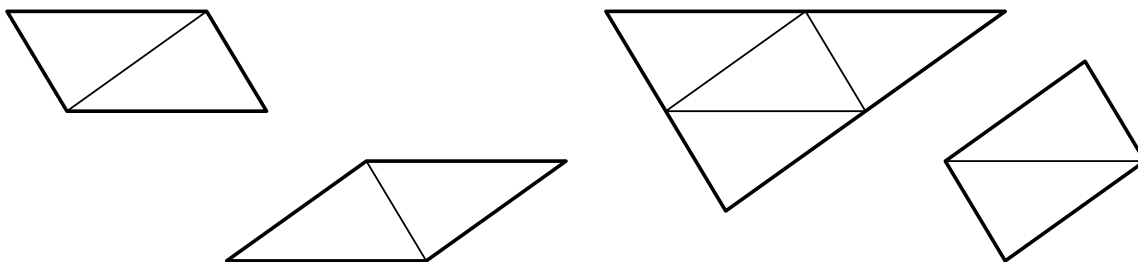
$$\begin{array}{r}
 635 \\
 \times 157 \\
 \hline
 4445 \\
 3175 \\
 635 \\
 \hline
 99695
 \end{array}$$

### Z6–I–5

Péťa složil z navzájem shodných trojúhelníků několik rovinných útvarů, viz obrázek. Obvody prvních tří jsou postupně 8 cm, 11,4 cm a 14,7 cm.

Určete obvod čtvrtého útvaru.

(E. Semerádová)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

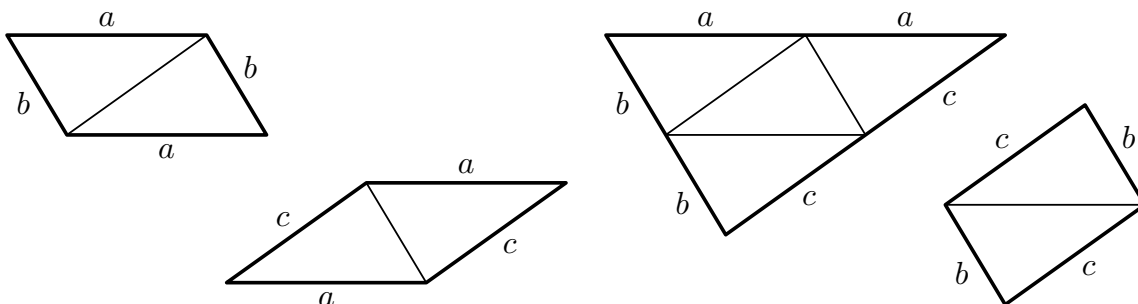
**Možné řešení.** V obvodech prvního, druhého a čtvrtého útvaru jsou započteny vždy dvě ze tří stran základního trojúhelníku, a to tak, že každá ze dvou stran je započtena dvakrát a v obvodech různých útvarů jsou zahrnuty různé dvojice stran.

V obvodu třetího útvaru jsou započteny všechny strany základního trojúhelníku, a to opět každá dvakrát.

Tedy součet obvodů prvního, druhého a čtvrtého útvaru je roven dvojnásobku obvodu třetího útvaru. To znamená, že neznámý obvod čtvrtého útvaru je roven rozdílu obvodů prvního a druhého útvaru od dvojnásobku obvodu třetího:

$$2 \cdot 14,7 - 8 - 11,4 = 29,4 - 19,4 = 10 \text{ (cm)}.$$

**Poznámky.** Ze zadání lze odvodit velikosti stran základního trojúhelníku, které pro tento účel označíme  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :



Rozdíl obvodů třetího a prvního útvaru je roven dvojnásobku  $c$ , tedy

$$c = \frac{1}{2}(14,7 - 8) = 3,35 \text{ (cm)}.$$

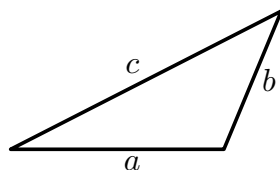
Rozdíl obvodů třetího a druhého útvaru je roven dvojnásobku  $b$ , tedy

$$b = \frac{1}{2}(14,7 - 11,4) = 1,65 \text{ (cm)}.$$

Odtud a ze známých obvodů prvních tří útvarů lze vyjádřit velikost poslední strany základního trojúhelníku:

$$a = \frac{8}{2} - 1,65 = \frac{11,4}{2} - 3,35 = \frac{14,7}{2} - 1,65 - 3,35 = 2,35 \text{ (cm)}.$$

Hodnoty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  splňují trojúhelníkové nerovnosti ( $1,65 + 2,35 > 3,35$  atd.), tedy trojúhelník se stranami těchto délek skutečně existuje a (až na měřítko) vypadá takto:



Z uvedeného můžeme pro kontrolu odvodit obvod čtvrtého útvaru:

$$2(b + c) = 2(1,65 + 3,35) = 10 \text{ (cm)}.$$

### Z6–I–6

Aleš, Bára, Cyril, Dana, Eva, František a Gábina se stali na svých školách vítězi ve stolním fotbálku a sešli se na dvoudenním turnaji o celkového vítěze. Každé z těchto sedmi dětí mělo během turnaje sehrát jednu hru s každým jiným. První den turnaje odehrál Aleš jednu hru, Bára dvě hry, Cyril tři, Dana čtyři, Eva pět her a František šest.

Kolik her odehrála první den Gábina? (L. Hozová)

**Možné řešení.** Děti bylo sedm, tedy každé mohlo odehrát nejvýše šest her. František odehrál šest her, takže hrál s každým z přítomných dětí.

Aleš odehrál jednu hru, takže nehrál s nikým jiným než s Františkem. Eva odehrála pět her, takže hrála se všemi kromě Aleše.

Bára odehrála dvě hry, takže nehrála s nikým jiným než s Františkem a Evou. Dana odehrála čtyři hry, takže hrála se všemi kromě Aleše a Báry.

Cyril odehrál tři hry, a to s Františkem, Evou a Danou.

S Gábinou hráli František, Eva a Dana, tedy Gábina odehrála tři hry.

**Poznámka.** Předchozí závěry jsou přehledně vidět v tabulce:

	A	B	C	D	E	F	G
A	–					*	
B		–			*	*	
C			–	*	*	*	
D			*	–	*	*	*
E		*	*	*	–	*	*
F	*	*	*	*	*	–	*
G				*	*	*	–