I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Ajka, Barborka, Cilka a Danek se dohadovali o počtu zrnek písku na jejich pískovišti. Danek sdělil kamarádkám svůj odhad a ty se jej rozhodly ověřit. Ajka napočítala 873 451 230, Barborka 873 451 227 a Cilka 873 451 213 zrnek. Součet (kladných) rozdílů těchto tří výsledků od Dankova odhadu byl 29.

Kolik zrnek písku mohl odhadovat Danek? Uveďte všechny možnosti. (*V. Bachratá*)

Možné řešení. Nejméně zrnek napočítala Cilka, nejvíce Ajka. Rozdíl výsledků Cilky a Barborky je 14, rozdíl výsledků Barborky a Ajky je 3, rozdíl výsledků Cilky a Ajky je 17. Pokud by Dankův odhad souhlasil s některým z těchto tří výsledků, potom by zmiňovaný součet rozdílů byl určen pouze dvěma sčítanci:

- Pokud by Dankův odhad souhlasil s výsledkem Cilky, potom by součet rozdílů od zbylých výsledků byl $14 + 17 = 31$.
- Pokud by Dankův odhad souhlasil s výsledkem Barborky, potom by součet rozdílů od zbylých výsledků byl $14 + 3 = 17$.
- Pokud by Dankův odhad souhlasil s výsledkem Ajky, potom by součet rozdílů od zbylých výsledků byl $17 + 3 = 20$.

Pro jiné hodnoty Dankova odhadu platí:

- Pokud by Dankův odhad byl menší než výsledek Cilky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl větší než 31.
- Pokud by Dankův odhad byl mezi výsledky Cilky a Barborky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl mezi 31 a 17.
- Pokud by Dankův odhad byl mezi výsledky Barborky a Ajky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl mezi 17 a 20.
- Pokud by Dankův odhad byl větší než výsledek Ajky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl větší než 20.

Tedy Dankův odhad mohl být mezi výsledky Cilky a Barborky, nebo být větší než výsledek Ajky. Postupným zkoušením v rámci těchto omezení odhalíme následující dvě možnosti:

- Pokud by Dankův odhad byl 873 451 215, potom by součet rozdílů od výsledků tří kamarádek byl $2 + 12 + 15 = 29$.
- Pokud by Dankův odhad byl 873 451 233, potom by součet rozdílů od výsledků tří kamarádek byl $20 + 6 + 3 = 29$.

Danek odhadoval počet zrnek v pískovišti buď na 873 451 215, nebo 873 451 233.

Poznámka. Pro úplnost doplňujeme několik dalších hodnot v rámci daných omezení (v Dankově odhadu píšeme jen poslední dvojčíslí):

Dankův odhad	< 13	*13*	14	15	16	17	...
součet rozdílů	> 31	*31*	30	29	28	27	...

...	26	*27*	28	29	*30*	31	32	33	> 33
...	18	*17*	18	19	*20*	23	26	29	> 29

Předchozí zkoušení lze nahradit několika výpočty. Např. za předpokladu, že Dankův odhad je mezi výsledky Cilky a Barborky, je součet rozdílů od výsledků tří kamarádek roven

$$(d - 13) + (27 - d) + (30 - d) = 44 - d,$$

kde d je poslední dvojčíslí Dankova odhadu. Tento součet je roven 29 právě tehdy, když $d = 15$, což odpovídá jedné z uvedených možností.

Z7–I–2

Pan Delfín a pan Žralok byli zdatní rybáři. Jednou dohromady ulovili 70 ryb. Pět devítin ryb, které ulovil pan Delfín, byli pstruzi. Dvě sedmnáctiny ryb, které ulovil pan Žralok, byli kapři.

Kolik ryb ulovil pan Delfín? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počet ryb, které ulovil pan Delfín, byl násobkem 9 a nepřesahoval 70. Pan Delfín tedy mohl ulovit

$$9, \quad 18, \quad 27, \quad 36, \quad 45, \quad 54, \quad 63$$

ryb. Počet ryb, které ulovil pan Žralok, byl násobkem 17 a nepřesahoval 70. Pan Žralok tedy mohl ulovit

$$17, \quad 34, \quad 51, \quad 68$$

ryb. Dohromady ulovili 70 ryb, což lze z uvedených čísel vyjádřit jedině jako

$$70 = 36 + 34.$$

Pan Delfín ulovil 36 ryb.

Poznámka. K předchozímu výsledku není nutno zkoušet všechny možné součty (kterých je $7 \cdot 4 = 28$). Stačí probrat čtyři možné počty ryb pana Žraloka, zjistit, kolik ryb by odpovídalo panu Delfínovi (rozdíl od 70) a ověřit, zda je tento počet dělitelný 9:

$ž$	17	34	51	68
$d = 70 - ž$	53	36	19	2
$9 \mid d$?	ne	ano	ne	ne

Z7–I–3

Myslím si tři čísla. Když je sečtu, dostanu 15. Když od součtu prvních dvou čísel odečtu třetí, dostanu 10. Když od součtu prvního a třetího čísla odečtu druhé, dostanu 8.

Která čísla si myslím? (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Uvažme součet prvních dvou čísel. Pokud k tomuto součtu přičte Eva (autorka úlohy) třetí číslo, dostane 15, pokud totéž číslo odečte, dostane 10. Rozdíl $15 - 10 = 5$ tedy odpovídá dvojnásobku třetího čísla. Tedy třetí číslo je $5 : 2 = 2{,}5$.

Uvažme součet prvního a třetího čísla. Pokud k tomuto součtu Eva přičte druhé číslo, dostane 15, pokud totéž číslo odečte, dostane 8. Rozdíl $15 - 8 = 7$ tedy odpovídá dvojnásobku druhého čísla. Tedy druhé číslo je $7 : 2 = 3{,}5$.

Součet všech tří čísel je 15. Tedy první číslo je $15 - 2{,}5 - 3{,}5 = 9$.

Eva si myslí čísla 9, 3,5 a 2,5.

Poznámka. Úlohu lze vyjádřit pomocí soustavy rovnic

$$a + b + c = 15, \quad a + b - c = 10, \quad a - b + c = 8,$$

kde a, b a c značí po řadě první, druhé a třetí číslo. Předchozí úvahy lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} 2c &= (a + b + c) - (a + b - c) = 15 - 10 = 5, \quad \text{tedy} \quad c = 2{,}5,\\ 2b &= (a + b + c) - (a - b + c) = 15 - 8 = 7, \quad \text{tedy} \quad b = 3{,}5,\\ a &= (a + b + c) - b - c = 15 - 2{,}5 - 3{,}5 = 9. \end{aligned}$$

Z7–I–4

Anetčin strýc má narozeniny ve stejný den v roce jako Anetčina teta. Strýc je starší než teta, ne však o víc než o deset let, a oba jsou plnoletí. Na poslední oslavě jejich narozenin si Anetka uvědomila, že když vynásobí jejich oslavované věky a výsledný součin ještě vynásobí počtem psů, kteří se na oslavě sešli, dostane číslo 2024.

Kolik psů mohlo být na této oslavě? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Číslo 2024 potřebujeme vyjádřit jako součin tří přirozených čísel, z nichž dvě jsou větší nebo rovna 18 a liší se nejvýše o 10. Vyhovující možnosti probereme na základě prvočíselného rozkladu čísla 2024, který vypadá následovně:

$$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23.$$

Prvočísla 11 a 23 patří k věkům tety a strýce, navíc každé někomu jinému; pokud by tomu tak nebylo, pak by z daných prvočísel nebylo možné vytvořit dva činitele větší než 18. Navíc žádný z věků nemůže být větší než $2 \cdot 23 = 46$ let; nejbližší vyšší možný věk je $2 \cdot 2 \cdot 23 = 92$ let a v takovém případě by z daných prvočísel nebylo možné vytvořit činitele, který by se od 92 lišil nejvýše o 10. Tedy stačí probrat následující možnosti:

- Pokud by tetě nebo strýci bylo 23 let, potom by druhému muselo být mezi 18 a 33 lety. Z možných činitelů tomuto omezení vyhovuje pouze $2 \cdot 11 = 22$. Tedy tetě mohlo být 22 a strýci 23 let. V tomto případě by na oslavě byli $2 \cdot 2 = 4$ psi.

- Pokud by tetě nebo strýci bylo $2 \cdot 23 = 46$ let, potom by druhému muselo být mezi 36 a 56 lety. Z možných činitelů tomuto omezení vyhovuje pouze $2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$. Tedy tetě mohlo být 44 a strýci 46 let. V tomto případě by na oslavě byl 1 pes.

  Na oslavě byl buď jeden pes, nebo čtyři psi.

Poznámka. Součin věků tety a strýce byl větší než $18 \cdot 18 = 324$. Tedy počet psů na oslavě byl roven nanejvýš celé části podílu $2024 : 324$, což je 6. Z daných prvočísel je možné sestavit pouze čísla 1, 2 a 4. Rozbor možností lze založit na těchto třech případech:

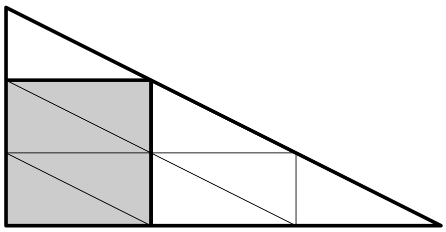
- Případy s 1 nebo se 4 psy možné jsou, viz předchozí řešení.
- Případ se 2 psy možný není. Součin věků tety a strýce by byl $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, což lze jako součin dvou činitelů větších než 18 vyjádřit buď $22 \cdot 46$, nebo $44 \cdot 23$. V obou rozkladech však je rozdíl činitelů větší než 10.

Z7–I–5

Pravoúhlý trojúhelník má obsah $36\,\mathrm{m}^2$. V něm je umístěn čtverec tak, že dvě strany čtverce jsou částmi dvou stran trojúhelníku a jeden vrchol čtverce je ve třetině nejdelší strany.

Určete obsah tohoto čtverce. (*E. Novotná*)

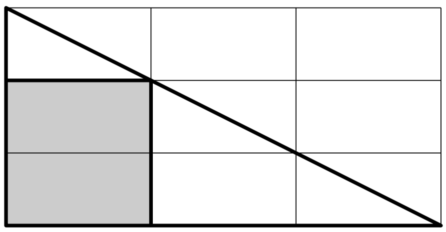
Možné řešení. Jediné možné umístění čtverce v rámci trojúhelníku je jako na následujícím obrázku. Dodatečné dělení stran na třetiny a spojení odpovídajících bodů příčkami rozdělí daný trojúhelník na 9 shodných trojúhelníčků:



Čtverec sestává ze čtyř trojúhelníčků, tedy poměr obsahu čtverce a daného trojúhelníku je $4 : 9$. Trojúhelník má obsah $36\,\mathrm{cm}^2$, tedy obsah čtverce je

$$\frac{4}{9} \cdot 36 = 4 \cdot 4 = 16\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámky. Obsah pravoúhlého trojúhelníku je polovinou obsahu doplněného obdélníku. Předchozí myšlenku s třetinovým dělením lze rozvíjet také podle následujícího obrázku:



Z uvedeného mj. vyplývá, že odvěsny daného trojúhelníku jsou v poměru 1 : 2.

V rámci daného trojúhelníku lze objevit několik navzájem podobných trojúhelníků. Také tento postřeh lze využít k řešení úlohy.

Z7–I–6

Trpaslíci počítají svoje věky ve dnech, takže každý den slaví narozeniny. U trpaslíka Nosíka se sešlo sedm trpaslíků s věky 105, 120, 140, 168, 210, 280 a 420 dnů. Během oslavy se všem osmi trpaslíkům podařilo rozdělit do dvou skupin se stejnými součty věků.

Kolik nejméně a kolik nejvíce dnů mohlo být trpaslíkovi Nosíkovi? (*E. Novotná*)

Možné řešení. Součet věků sedmi trpaslíků, kteří přišli Nosíka navštívit, je 1443 dnů. Pokud by trpaslíci byli rozděleni tak, že v jedné skupině je sám Nosík a ve druhé skupině všichni ostatní, pak by Nosíkovi bylo 1443 dnů. Víc dnů Nosíkovi být nemůže.

Součet věků sedmi trpaslíků, kteří přišli Nosíka navštívit, tvoří lichý počet dnů. Aby součet věků všech osmi trpaslíků byl dělitelný dvěma, musel být Nosíkův počet dnů také lichý. Aby bylo možné rozdělit trpaslíky do dvou skupin se stejnými věky, musí jít ze sedmi známých věků vyjádřit jak polovinu součtu všech, tak polovinu tohoto součtu bez věku Nosíka. Postupně vzestupně probereme možnosti, dokud nenajdeme vyhovující. V následující tabulce značí N věk Nosíka a S součet věků všech osmi trpaslíků. Rozhodování na posledním řádku je vysvětleno níže:

N	1	3	5	7	9	11	13	...
S	1444	1446	1448	1450	1452	1454	1456	...
$\frac{1}{2}S$	722	723	724	725	726	727	728	...
$\frac{1}{2}S - N$	721	720	719	718	717	716	715	...
?	č	s	č	s	č	č	OK	...

Kromě dvou trpaslíků, kteří přišli Nosíka navštívit, jsou věky všech ostatních dělitelné 10. Tyto dva výjimečné věky končí číslicemi 5 a 8. Ze sedmi známých věků trpaslíků tedy lze vyjádřit pouze součty končící číslicemi 0, 5, 8 a 3 (podle toho, zda je zahrnuto žádné, jedno či obě zmiňovaná čísla). Tento postřeh vylučuje možnosti odpovídající $N = 1$, 5, 9, 11 (a mnohé další). Probereme ostatní možnosti:

- V případě $N = 3$ by v součtu $\frac{1}{2}S = 723$ musela být zahrnuta obě čísla 105 a 168:

$$723 = 105 + 168 + 450.$$

  Sčítanec 450 by musel jít vyjádřit pomocí čísel 120, 140, 210, 280 a 420. Postupným zkoušením (např. od největšího z dostupných čísel) zjišťujeme, že to není možné.
- V případě $N = 7$ by v součtu $\frac{1}{2}S - N = 718$ muselo být zahrnuto číslo 168:

$$718 = 168 + 550.$$

Sčítanec 550 by musel jít vyjádřit pomocí čísel 120, 140, 210, 280 a 420. Postupným zkoušením (např. od největšího z dostupných čísel) zjišťujeme, že to není možné.

- V případě $N = 13$ by v součtu $\frac{1}{2}S = 728$ muselo být zahrnuto číslo 168:

$$728 = 168 + 560.$$

Sčítanec 560 by musel jít vyjádřit pomocí čísel 120, 140, 210, 280 a 420. Zkoušením zjišťujeme $560 = 140 + 420$, tedy jsme našli nejmenší vyhovující řešení.

Nosík mohl mít nejméně 13 a nejvíce 1443 dnů.

Poznámky. Rozdělení do skupin s 13denním Nosíkem (tj. rozdělení odpovídající součtu $\frac{1}{2}S = 728$) vypadalo takto:

$$140 + 168 + 420 = 13 + 105 + 120 + 210 + 280.$$

V případech $N = 3$, resp. 7 je možné se zaměřit na druhý z diskutovaných součtů (tedy 720, resp. 725), který taktéž z dostupných čísel vyjádřit nelze.

Ve vylučování možností lze použít další vlastnosti daných čísel. Např. nemožnost vyjádření čísla 450 v případě $N = 3$ lze zdůvodnit následovně. Číslo 450 je dělitelné 10, ale není dělitelné 20. Z dostupných čísel má stejnou vlastnost pouze číslo 210, tedy ve vyjádření 450 musí být zahrnuto:

$$450 = 210 + 240.$$

Sčítanec 240 by musel jít vyjádřit pomocí zbylých čísel 120, 140, 280 a 420. Protože čísla 280 a 420 jsou větší než 240, připadá v úvahu pouze součet $120 + 140$. Ten je však také vetší než 240, takže vyjádření 450 není možné.