73. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY (2023/24)

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

V základní škole U Tří lip, kam chodí i Lukáš, pořádají vědomostní soutěž s předem seřazenými úkoly. Každý správně vyřešený úkol je hodnocen tolika body, jaké je jeho pořadí. Každý neřešený či ne zcela správně vyřešený úkol není hodnocen vůbec. Lukáš správně vyřešil prvních 12 úkolů. Pokud by správně vyřešil posledních 12 úkolů, získal by o 708 bodů více.

Kolik bylo soutěžních úkolů? (*M. Petrová*)

Možné řešení. K vyřešení úlohy není nutné součty vyčíslovat, stačí rozpoznat vztahy mezi nimi. Součet prvních dvanácti čísel označme s, tj.

$$1 + 2 + \cdots + 11 + 12 = s.$$

Součet 2. až 13. čísla je o 12 větší než s, neboť každý ze sčítanců je o 1 větší než v předchozím případě:

$$2 + 3 + \cdots + 12 + 13 = s + 12.$$

Součet 3. až 14. čísla je opět o 12 větší než předchozí součet, tedy o $2 \cdot 12$ větší než s:

$$3 + 4 + \cdots + 13 + 14 = (s + 12) + 12 = s + 2 \cdot 12.$$

Součet dvanácti po sobě jdoucích čísel počínaje k je $s + (k - 1) \cdot 12$. Odtud vyplývá, že pokud součet dvanácti po sobě jdoucích čísel je $s + 12n$, potom poslední z těchto čísel je $12 + n$.

Lukáš mohl získat 708 bodů navíc, přičemž $708 = 12 \cdot 59$. Poslední ze sčítaných čísel by tedy muselo být $12 + 59 = 71$. Soutěžních úkolů bylo 71.

Jiné řešení. Součet prvních dvanácti čísel je

$$1 + 2 + \cdots + 11 + 12 = 13 \cdot 6 = 78. \tag{1}$$

Součet dvanácti po sobě jdoucích čísel počínaje k je

$$k + (k + 1) + \cdots + (k + 10) + (k + 11) = (2k + 11) \cdot 6. \tag{2}$$

Lukáš mohl získat navíc 708 bodů, celkem tedy mohl mít $78 + 708 = 786$ bodů. Úpravami rovnosti $(2k + 11) \cdot 6 = 786$ dostáváme $k = 60$. Poslední ze sčítaných čísel na levé straně rovnosti (2) by muselo být $60 + 11 = 71$. Soutěžních úkolů bylo 71.

Poznámka. V úpravách (1) a (2) využíváme toho, že součet prvního a posledního čísla je stejný jako součet druhého a předposledního atd. a že takových dvojic je 6. Bez tohoto postřehu lze součet (2) vyjádřit pomocí (1) jako $12k + 78 - 12 = 12k + 66$.

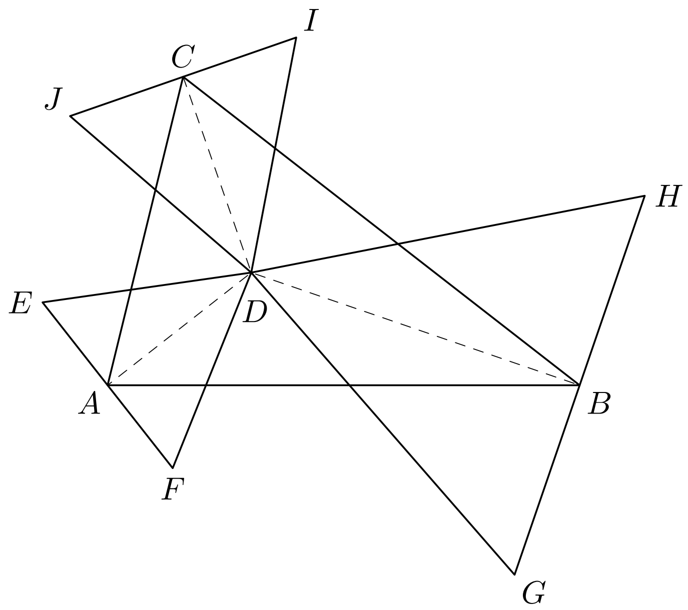
Hodnocení. 2 body za dílčí postřehy týkající se součtu dvanácti po sobě jdoucích čísel; 2 body za formulaci problému pomocí neznámé ($12n = 708$ u prvního řešení, resp. $(2k + 11) \cdot 6 = 786$ u druhého); 2 body za dořešení a kvalitu komentáře.

Z9–III–2

Útvar na obrázku sestává z trojúhelníku ABC a tří rovnostranných trojúhelníků DEF, DGH a DIJ. Bod D je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, vrcholy A, B, C jsou po řadě středy stran EF, GH, IJ. Velikost úhlu EDJ je $51°$, velikost úhlu HDI je $66°$.

Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

(*K. Pazourek*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Vnitřní úhly trojúhelníku ABC označíme obvyklým způsobem, tj. α, β, γ. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou osami souměrností těchto úhlů, tedy platí $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2}$ atd. Trojúhelníky DEF, DGH, DIJ jsou rovnostranné a body A, B, C jsou středy stran protilehlých společnému vrcholu D. Přímky DA, DB, DC jsou tedy osami souměrností těchto trojúhelníků a platí $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADF = 30°$ atd. (viz obrázek na další straně).

Velikost úhlu ADC je $30°+51°+30° = 111°$ a pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ADC platí

$$\frac{\alpha}{2} + 111° + \frac{\gamma}{2} = 180°, \tag{1}$$

což po úpravě dává $\alpha + \gamma = 138°$. Současně pro vnitřní úhly trojúhelníku ABC platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \tag{2}$$

neboli $\alpha + \gamma = 180° - \beta$. Z dvojího vyjádření $\alpha + \gamma$ dostáváme $138° = 180° - \beta$, tedy

$$\beta = 42°.$$

Obdobně vyjádříme velikost úhlu BDC jako $30° + 66° + 30° = 126°$ a ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku BDC,

$$\frac{\beta}{2} + 126° + \frac{\gamma}{2} = 180°, \tag{3}$$

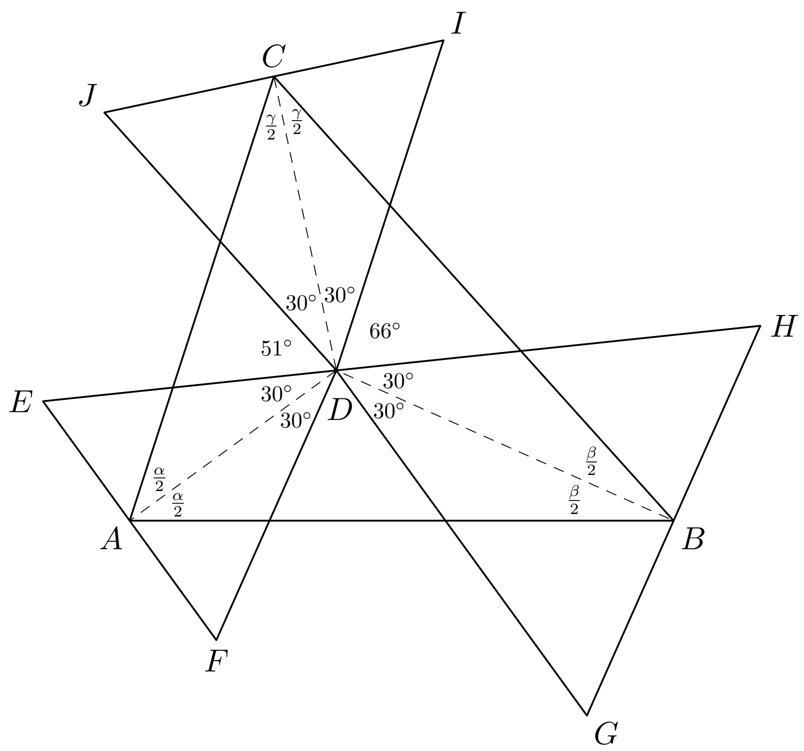
určíme $\beta + \gamma = 108°$. Současně z (2) plyne $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Celkem dostáváme $108° = 180° - \alpha$, tedy

$$\alpha = 72°.$$

Dosazením α či β do některé z předchozích rovností vyjádříme zbylý úhel γ. Např. dosazením do (2) dostáváme $72° + 42° + \gamma = 180°$, a tedy

$$\gamma = 66°.$$

Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou 72°, 42°a 66°.



Poznámky. Kromě podmínek (1) a (3) lze použít také obdobnou podmínku vzhledem k trojúhelníku ADB. Pro tento účel je třeba vyjádřit úhel FDG jakožto doplňkový úhel do plného úhlu s vrcholem D, jehož velikost je $360° - 3 \cdot 60° - 51° - 66° = 63°$. Potom velikost úhlu ADB je $30° + 63° + 30° = 123°$ a pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ADB platí

$$\frac{\alpha}{2} + 123° + \frac{\beta}{2} = 180°. \tag{4}$$

Kterékoli tři ze čtyř rovnic (1) až (4) určují jednoznačně řešení a takto lze úlohu také řešit. Např. soustava rovnic (1), (3), (4) je ekvivalentní soustavě

$$\alpha + \gamma = 138°, \quad \beta + \gamma = 108°, \quad \alpha + \beta = 114°.$$

Odečtením třetí rovnice od první dostáváme $\gamma - \beta = 24°$. Odečtením této rovnice od druhé dostáváme $2\beta = 84°$, tedy $\beta = 42°$. Po dosazení tohoto výsledku do druhé, resp. třetí rovnice určíme $\gamma = 66°$, resp. $\alpha = 72°$.

Hodnocení. 2 body za úvodní pozorování související s osami úhlů; 2 body za určení pomocných úhlů a sestavení rovnic; 2 body za dořešení a kvalitu komentáře.

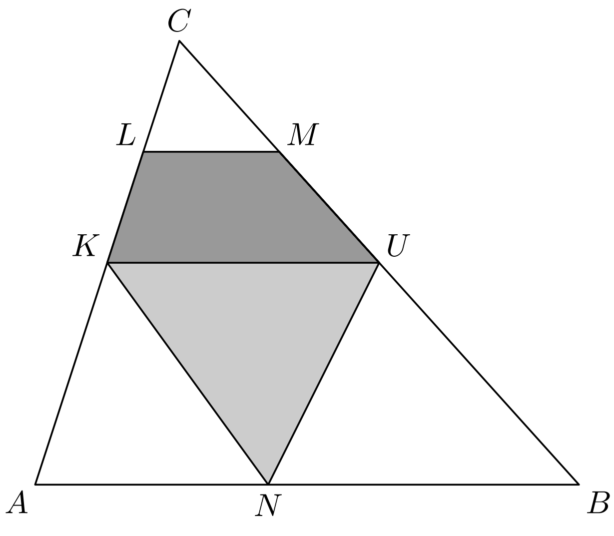
Z9–III–3

Na stranách obecného trojúhelníku ABC jsou dány body K, L, M, N, U:

- bod K je středem strany AC,
- bod U je středem strany BC,
- body L a M leží po řadě na úsečkách CK a CU tak, že $LM \| KU$,
- bod N leží na úsečce AB tak, že $|AN| : |AB| = 3 : 7$,
- poměr obsahů mnohoúhelníků $UMLK$ a $MLKNU$ je 3 : 7.

Určete poměr velikostí úseček LM a KU. (*P. Bak*)

Možné řešení. Situaci ze zadání si znázorníme na obrázku:

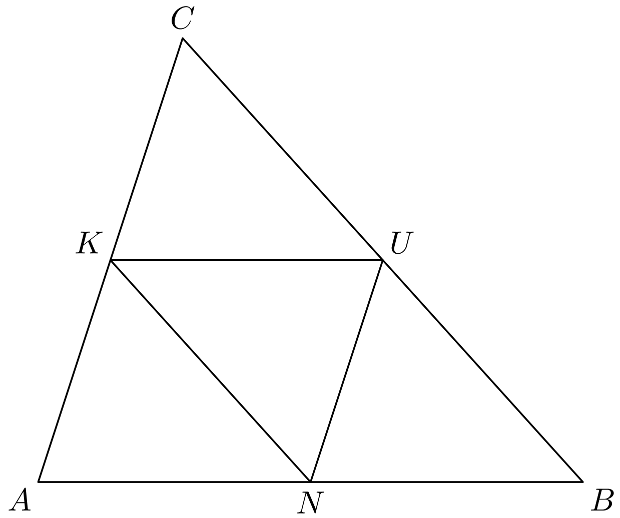


Úsečka KU je střední příčkou trojúhelníku ABC. Trojúhelníky KNU a KUC mají společnou stranu KU a shodné výšky na tuto stranu, tedy trojúhelníky KNU a KUC mají stejný obsah (a to nezávisle na poloze bodu N na úsečce AB).

Čtyřúhelník $UMLK$ je částí pětiúhelníku $MLKNU$ a poměr jejich obsahů je 3 : 7. Tedy poměr obsahů čtyřúhelníku $UMLK$ a trojúhelníku KNU, resp. čtyřúhelníku $UMLK$ a trojúhelníku KUC je 3 : 4. Čtyřúhelník $UMLK$ je částí trojúhelníku KUC, tedy poměr obsahů trojúhelníků LMC a KUC je 1 : 4.

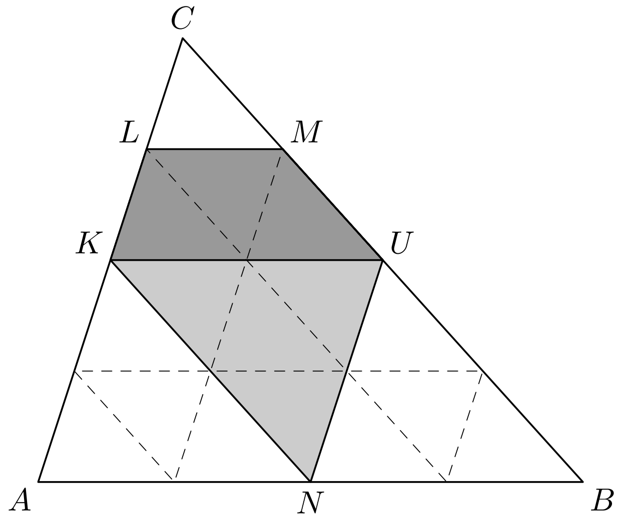
Úsečky LM a KU jsou rovnoběžné, tedy trojúhelníky LMC a KUC jsou podobné. Poměr velikostí odpovídajících si dvojic úseček je proto $1 : 2$. Zejména poměr velikostí úseček LM a KU je $1 : 2$.

Poznámka. Pozorování z prvního odstavce předchozího řešení lze využít také tak, že bod N umístíme do středu úsečky AB:



Trojúhelník ABC je tak středními příčkami KN, NU, UK rozdělen na čtyři navzájem shodné trojúhelníky. Zejména platí, že poměr obsahů čtyřúhelníku $BUKA$ a trojúhelníku ABC je $3 : 4$. Naopak, pokud je $KU \| AB$ a poměr obsahů $BUKA$ a ABC je $3 : 4$, potom KU je střední příčkou trojúhelníku ABC. Obdobnou úvahou vzhledem ke čtyřúhelníku $UMLK$ a trojúhelníku KUC lze odvodit, že LM je střední příčkou trojúhelníku KUC.

Přikládáme ilustraci, v níž jsou všechny výše zmiňované poměry dobře patrné:



Hodnocení. 1 bod za pozorování, že trojúhelníky KNU a KUC mají stejný obsah; 3 body za další dílčí závěry týkající se poměrů obsahů; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.

Z9–III–4

Najděte všechny trojice trojmístných přirozených čísel a, b, c, pro která platí

$$b^2 = a \cdot c, \quad b = a + 34.$$

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Pro jakékoli číslo a lze z druhé podmínky vyjádřit b a následně z první podmínky c. Pro jakékoli přirozené číslo a je $b = a + 34$ také přirozeným číslem, avšak pro $c = \frac{b^2}{a}$ tomu tak být nemusí. Po úpravě

$$c = \frac{(a+34)^2}{a} = \frac{a^2 + 68a + 34^2}{a} = a + 68 + \frac{34^2}{a} \tag{1}$$

zjišťujeme, že c je přirozeným číslem právě tehdy, když a je dělitelem čísla 34^2.

Trojmístní dělitelé čísla $34^2 = 2^2 \cdot 17^2$ jsou dva, a to $17^2 = 289$ a $2 \cdot 17^2 = 578$. To jsou tedy jediné možné hodnoty a. Pro tyto možnosti vyjádříme b a c a ověříme, zda dostaneme trojmístná čísla:

- Pro $a = 289$ je $b = a + 34 = 323$ a $c = a + 68 + \frac{34^2}{a} = a + 72 = 361$.
- Pro $a = 578$ je $b = a + 34 = 612$ a $c = a + 68 + \frac{34^2}{a} = a + 70 = 648$.

V obou případech jsou všechna čísla trojmístná. Trojice čísel a, b, c vyhovující podmínkám ze zadání jsou 289, 323, 361 a 578, 612, 648.

Hodnocení. 2 body za vyjádření (1) či analogickou úpravu; 2 body za trojmístné dělitele čísla 34^2 a odpovídající rozbor možností; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.