Český úspěch na 13. Evropské dívčí matematické olympiádě

Třináctá Evropské dívčí matematická olympiáda (dále EGMO) se konala ve dnech 11. – 17. dubna 2024 v gruzínském Cchaltubo (anglická transkripce Tskaltubo, gruzínsky წყალტუბო) nedaleko druhého největšího gruzínského města Kutaisi. Do Gruzie se soutěž „vrátila“ po třech letech, desátý ročník 2021 se kvůli epidemii covidu19 konal pouze online. Aktuálního třináctého ročníku se zúčastnilo 212 dívek (147 z Evropy) reprezentujících 54 států (37 evropských).

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků krajského kola kategorie A 73. ročníku Matematické olympiády a následného výběrového soustředění. Místo v reprezentaci si vybojovaly: *Anastasia Bredichina*, Gymnaázium J. Keplera, Praha 6, *Tereza Černá* (8/8), Gymnázium Litoměřická, Praha 9, *Veronika Menšíková* (6/8), Arcibiskupské gymnázium Korunní, Praha 2 a *Lenka Poljaková* (8/8), Gymnázium J. Škody, Přerov. Vedoucím české delegace byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z PřF UP v Olomouci a pedagogickým vedoucím *Mgr. Pavel Šalom.*

V pátek 12. dubna proběhlo slavnostní zahájení, kdy všechny účastníky přivítali organizátoři, zástupci města a kraje a sponzoři. Ještě před ním zasedala Jury složená z vedoucích jednotlivých družstev. Z návrhů, které v prosinci poslaly jednotlivé účastnické státy, vybrala úlohová komise sadu 6 úloh. Tyto Jury po diskusi schválila a následně přeložila do národních jazyků. Mezitím dívky měly na programu seznámení s městem i ostatními účastnicemi a v centrálním lázeňském parku a jeho okolí hledaly poklady.

Samotné soutěži pak byly věnovány dva dny, sobota 13. a neděle 14. dubna, ve kterých soutěžící řešily v časovém limitu 4,5 hodiny po třech úlohách, za každou z nich mohly získat až sedm bodů. Následující dva dny se soutěžící seznamovaly s Gruzií, v pondělí navštívily přírodní rezervaci a jeskyni Sataplia, největší atrakce, park se zachovalými stopami dinosaurů, však v té době procházel rekonstrukcí. V úterý pak soutěžící společně s vedoucími družstev navštívily Prometheovu jeskyni. Mezitím si účastnice mohly vybrat z řady volno-časových aktivit od různých sportovních turnajů po seznámení s místním folklórem a výuky tanců. Vedoucí národních týmů spolu s mezinárodními koordinátory mezitím studovali a hodnotili řešení účastnic.

Na úterním slavnostním zakončení byly vyhlášeny konečné výsledky. Jako nejjednodušší se ukázaly první dvě úlohy prvního dne s průměrným bodovým ziskem 4,2 a 4,1 bodu, dále první a druhá úloha druhého dne s průměry 3,0 a 2,5 bodu, a tradičně nejtěžší byly třetí úlohy každého dne s průměry 1,7 a 0,3 bodu; přitom za každou úlohu mohly soutěžící získat až 7 bodů. Češky si s těmito úlohami poradily velmi dobře a každá z nich si odvezla (podruhé v historii) některou z medailí. *Tereza Černá* se ziskem 28 bodů získala stříbrnou medaili obsadila přitom 34. místo (19. mezi evropankami), zbývající účastnice si odvezly medaile bronzové. *Lenka Poljaková* se ziskem 18 bodů obsadila 76. (47.) místo, *Veronika Menšíková*, se 17 body obsadila 84. (50.) místo a *Anastasia Bredichina* se 16 body obsadila 92. (54.) pozici.

Nejlepší účastnicí byla *Hannah Foxová* ze Spojených států, která ze 42 možných bodů získala 41, jediný bod ztratila na šesté úloze. Přitom byla jedinou řešitelkou, která tuto úlohu skoro vyřešila, ostatní účastnice na ní získaly nejvýše 3 body. Nejlepší evropankou pak byla *Aino Aulanková* z Finska, která získala 38 bodů a celkově obsadila 2. pozici. Nejlepším družstvem se staly Spojené státy se ziskem 151 bodů, nejlepším evropským družstvem pak byla celkově čtvrtá Ukrajina. Češky se celkově umístily se 79 body na 21. místě, což byla 14. pozice mezi evropskými státy, zopakovaly tak své loňské velmi dobré umístění. S úplnými výsledky se může seznámit na stránkách soutěže.

Na závěrečném zasedání Jury se schválily drobné změny organizačního řádu, byla po odstoupení dlouholeté prezidentky soutěže, Švýcarky *Viviane Kehl*, zvolena nová, *Pärsla Esmeralda Sietiņa* z Finska. Dále byl výbor soutěže rozšířen o jednoho reprezentanta neevropských zemí, kterého volí neevropští účastníci, zbývající čtyři (včetně prezidenta) jsou voleni evropskými zeměmi. Přes některé organizační zmatky se soutěž celkově vydařila a účastnice měly možnost navštívit a seznámit se s kandidátskou zemí Evropské unie, za což patří dík předsedkyni organizačního výboru *Marekhi Nikoladze*.

Na závěr uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh, v závorce je navrhující země. Jejich řešení hledejte opět na stránkách EGMO.

První soutěžní den

(13. 4. 2024)

1. Na tabuli jsou napsána dvě různá celá čísla u a v. Postupně vykonáme několik kroků. V každém vykonáme jednu z následujících dvou operací:

(i) Jestliže a a b jsou různá čísla napsaná na tabuli a číslo $a+b$ tam ještě napsané není, potom jej tam zapíšeme.

(ii) Jestliže a, b a c jsou tři různá čísla napsaná na tabuli a celé číslo x, které na tabuli ještě napsané není, splňuje rovnost $ax^2+bx+c=0$, potom na tabuli zapíšeme x.

Určete všechny počáteční dvojice (u,v) celých čísel takové, že pro libovolné celé číslo existuje konečná posloupnost kroků, po kterých bude toto číslo napsáno na tabuli.

(*Slovensko*)

2. Nechť ABC je trojúhelník splňující $|AC|>|AB|$, označme Ω kružnici jemu opsanou a I střed jeho kružnice vepsané. Kružnice vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť X a Y jsou po řadě dva body kratších oblouků $\widehat{DF}$ a $\widehat{DE}$ kružnice vepsané takové, že $|\sphericalangle BXD|=|\sphericalangle DYC|$. Přímka XY protíná přímku BC v bodě K. Dále nechť T je takový bod kružnice Ω, že přímka KT je tečnou Ω a bod T leží v téže polorovině vyťaté přímkou BC jako bod A. Dokažte, že přímky TD a AI se protínají na kružnici Ω. (*Spojené království*)

3. Kladné celé číslo n nazveme *svérázné*, jestliže pro jeho libovolný kladný dělitel d je číslo $n(n+1)$ dělitelné $d(d+1)$. Dokažte, že pro libovolná čtyři různá svérázná kladná celá čísla A, B, C a D platí

$$\mathrm{D}(A,B,C,D)=1.$$

Symbol $\mathrm{D}(A, B, C, D)$ *značí největší celé číslo, které dělí každé z čísel* A, B, C *a* D.
(*Nizozemsko*)

Druhý soutěžní den

(14. 4. 2024)

4. Pro posloupnost $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ celých čísel nazveme dvojici (a_i, a_j), kde $1 \leq i < j \leq n$, *zajímavou*, jestliže existuje taková dvojice (a_k, a_ℓ) celých čísel, kde $1 \leq k < \ell \leq n$, že

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pro každé $n \geq 3$ určete největší možný počet zajímavých dvojic v posloupnosti délky n.
(*Ukrajina*)

5. Označme $\mathbb{N}$ množinu všech kladných celých čísel. Určete všechny funkce $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolnou dvojici (x, y) kladných celých čísel platí

(i) x a $f(x)$ mají stejný počet kladných dělitelů.
(ii) Jestliže x není dělitelem y a y není dělitelem x, pak

$$\mathrm{D}(f(x), f(y)) > f(\mathrm{D}(x, y)).$$

Symbol $\mathrm{D}(m, n)$ *značí největší celé číslo, které dělí každé z čísel* m *a* n. (*Chorvatsko*)

6. Určete všechna kladná celá čísla d, pro která existuje polynom P stupně d s reálnými koeficienty takový, že mezi $P(0)$, $P(1)$, $P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ je nejvýše d různých hodnot.
(*Lucembursko & Belgie*)

Evropská dívčí matematická olympiáda se v roce 2025 bude konat v kosovské Prištině, následující pak ve francouzském Bordeaux.

Pavel Calábek