

Česko-Rakousko-Polsko-Slovenské střetnutí 2024

ISTA, Rakousko

(Den první – 1. červenec 2024)

1. Rozhodněte, zda existuje 2024 různých kladných celých čísel splňujících následující podmínku: uvážíme-li všechny možné podíly dvou různých z nich (zahrneme vždy a/b i b/a), obdržíme čísla s konečnými desetinnými rozvoji (po desetinné čárce) navzájem různých délek.

Příklad: Číslo 3,14159 má desetinný rozvoj ,14159 délky 5.

2. Pro kladné celé číslo n rozumíme n -konfigurací sadu množin $\langle A_{i,j} \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$. Nazvěme n -konfiguraci *sladkou*, pokud pro každou dvojici indexů (i, j) s $1 \leq i \leq n-1$ resp. $1 \leq j \leq n-1$ platí $A_{i,j} \subseteq A_{i+1,j}$ resp. $A_{i,j} \subseteq A_{i,j+1}$. Necht $f(n, k)$ značí počet sladkých n -konfigurací splňujících $A_{n,n} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$. Rozhodněte, které z následujících čísel je větší: $f(2024, 2024^2)$, nebo $f(2024^2, 2024)$?

3. Na straně BC trojúhelníku ABC leží bod D . Body E, F leží po řadě na polopřímkách opačných k BA, CA tak, že $|BE| = |BD|$ a $|CF| = |CD|$. Budiž P bod takový, že D je středem kružnice vepsané trojúhelníku PEF . Dokažte, že P leží uvnitř kružnice opsané Ω trojúhelníku ABC nebo na ní.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.

Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech

Česko-Rakousko-Polsko-Slovenské střetnutí 2024

ISTA, Rakousko

(Den druhý – 2. červenec 2024)

4. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník takový, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Body X, Y leží po řadě na polopřímkách CA, BD tak, že $|BX| = |CY|$. Označme středy úseček BX, CY, XD, YA po řadě jako P, Q, R, S . Dokažte, že body P, Q, R, S leží na jedné kružnici.

5. Buď $\alpha \neq 0$ reálné číslo. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, aby pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platilo

$$f(x^2 + y^2) = f(x - y)f(x + y) + \alpha yf(y).$$

6. Rozhodněte, zda existuje nekonečně mnoho trojic kladných celých čísel (a, b, c) takových, že pro každé prvočíslo p je $\lfloor (a + b\sqrt{2024})^p \rfloor - c$ násobkem p .

Poznámka: $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo nepřevyšující x .

Čas: 4 hodiny a 30 minut.

Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech