Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

V naší ulici bydlí Čapkovi a Němcovi. Čapkovi mají dva syny, Karlíka a o dva roky staršího Pepíka. Němcovi mají dceru Bóžu. Narozeniny všech tří dětí slavívají obě rodiny společně, a to v den Karlíkových narozenin. Při letošní oslavě byla Bóža třikrát starší než Karlík. Za tři roky bude Karlíkovi a Pepíkovi dohromady stejně jako bude Bóže.

Kolik let bylo dětem při letošní oslavě? *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pankrác je o 3 roky mladší než Servác. Bonifác je čtyřikrát starší než Pankrác. Kolik let je všem třem klukům dohromady, když Pankrácovi je 1 rok? Kolik let jim bude dohromady za rok?

[Jak Servác, tak Bonifác mají 4 roky. Všem třem dohromady je 9 let. Příští rok jim dohromady bude 12 let.]

N2. Linda je o 8 let mladší než Hanka. Hanka je pětkrát starší než Linda. Kolik je každé z dívek let?

[Kdyby Linda měla 1 rok, Hanka by měla 9 let, což není pětkrát víc. Kdyby Linda měla 2 roky, Hanka by měla 10 let, a to je správné řešení.]

N3. Tři sourozenci Jarek, Ládík a Patrik se narodili na Hromnice v třech po sobě jdoucích letech. Za dva roky jim dohromady bude 30 let. Kolik bude nejstaršímu z nich příští rok?

[Letos je sourozencům dohromady $30 - 2 \cdot 3 = 24$ let. Jejich věky tedy jsou 7, 8 a 9 let. Nejstaršímu příští rok bude 10 let.]

N4. Letos na Vánoce je Silvě a Terce dohromady o devět let méně než Uršule. Za kolik let na Vánoce bude Silvě a Terce dohromady víc než Uršule?

[Každý rok přidá do součtu věků Silvy a Terky 2 roky, tedy 1 rok navíc oproti přibývajícím létům Uršuly. Musíme tedy počkat $9 + 1 = 10$ let.]

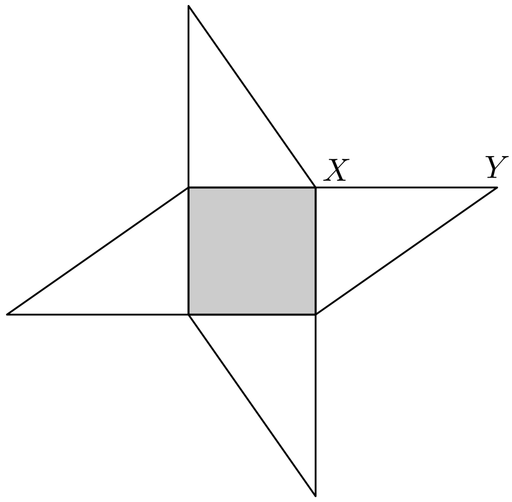
D1. Martin a Nina v pondělí ráno dostali každý svůj pytlík se stejným počtem bonbónů. Martin každý všední den snědl stejný počet bonbónů, až mu na víkend žádný nezbyl. Nina ujídala bonbóny celý týden, také každý den stejný počet, a v neděli byl i její pytlík prázdný. Kolik nejméně bonbónů mohlo být v každém pytlíku?

[Protože Martin jedl 5 dnů a Nina 7 dnů, musí být hledané číslo násobkem pěti i sedmi. V pytlíku bylo nejméně 35 bonbónů.]

Z5–I–2

Na obrázku je šedý čtverec se stranou délky 10 cm. Čtverec doplňují čtyři stejné pravoúhlé trojúhelníky do tvaru hvězdy. Součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce.

Určete délku strany XY. *(E. Semerádová)*



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Čtverec o straně 1 cm se nazývá *jednotkový*. Jednotkový čtverec má obsah 1 centimetr čtvereční, což se značí $1\,\mathrm{cm}^2$. Kolik centimetrů čtverečních má čtverec, který má středy stran ve vrcholech jednotkového čtverce?

[Čtverec obsahuje jeden jednotkový čtverec a z přečnívajících cípů lze složit druhý jednotkový čtverec. Obsah čtverce je $2\,\mathrm{cm}^2$.]

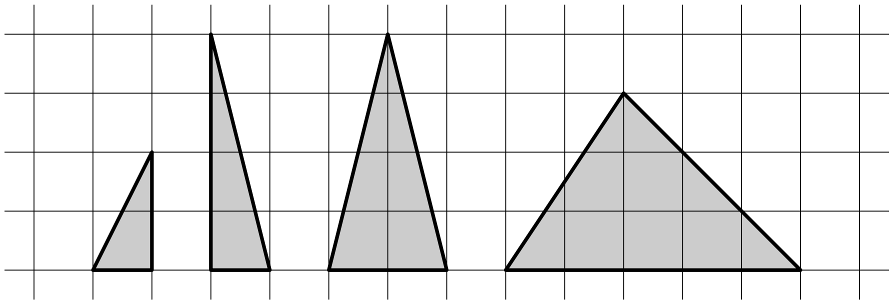
N2. Obdélník je třikrát delší než širší a jeho obsah je $75\,\mathrm{cm}^2$. Kolik centimetrů měří jeho kratší strana?

[Obdélník je tvořen třemi čtverci, jejichž strany se shodují s kratšími stranami obdélníku. Obsah každého ze čtverců je $25\,\mathrm{cm}^2$. Kratší strana obdélníku měří 5 cm.]

N3. Čtverec $ABCD$ má strany délky 6 cm. Střed strany AD označíme E a střed strany BC označíme F. Určete obsahy trojúhelníků ABE, BFE, EFD a FCD.

[Trojúhelníky jsou shodné a dohromady tvoří čtverec $ABCD$. Čtverec má obsah $36\,\mathrm{cm}^2$, obsah každého z trojúhelníků je čtvrtinový, tj. $9\,\mathrm{cm}^2$.]

N4. Trojúhelníky na obrázku mají vrcholy v uzlových bodech jednotkové čtvercové sítě. Určete jejich obsahy.



[Každý z trojúhelníků buď tvoří polovinu obdélníku, nebo jej lze na takové poloviny rozdělit. Poté je snadné spočítat obsažené čtverce sítě. Obsahy trojúhelníků jsou $1\,\mathrm{cm}^2$, $2\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ a $7{,}5\,\mathrm{cm}^2$.]

D1. Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny délek 1 cm a 2 cm. Jeho obsah je $1\,\mathrm{cm}^2$, tedy v centimetrech čtverečních je vyjádřen celým číslem. Vladan prodloužil obě odvěsny tohoto trojúhelníku o stejný celočíselný počet centimetrů. Je možné, aby obsah Vladanova trojúhelníku v cm^2 nebyl vyjádřen celým číslem?

[Délky odvěsen Vladanova trojúhelníku se liší o 1 cm, tedy jedna je vyjádřena sudým a druhá lichým číslem. Součin těchto čísel je sudý a po dělení dvěma dostaneme celé číslo. Obsah v cm^2 je vždy vyjádřen celým číslem.]

Z5–I–3

V následujícím příkladu je pětkrát použito znaménko + a výsledek je násobkem tří:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39.$$

Změňte dvě ze znamének + na znaménko − tak, aby výsledek nového příkladu byl opět násobkem tří. Najděte všechny možnosti. *(E. Semerádová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Která z následujících čísel lze beze zbytku dělit třemi?

$$30, \quad 45, \quad 777, \quad 9999.$$

[Všechna uvedená čísla dávají po dělení třemi zbytek 0.]

N2. Místo hvězdičky doplňte do $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit třemi. Najděte všechna řešení.

[Číslo 30 lze dělit třemi beze zbytku, tedy také doplněná čísla musí jít dělit třemi beze zbytku. Vyhovují čísla 3 a 6.]

N3. Místo hvězdičky doplňte do $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit čtyřmi. Najděte všechna řešení.

[Číslo 30 dává po dělení čtyřmi zbytek 2, tedy doplněná čísla musí po dělení čtyřmi dávat zbytek 2. Vyhovují čísla 2 a 6.]

N4. Místo hvězdičky doplňte do $32 + * $ a $32 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit pěti. Najděte všechna řešení.

[Číslo 32 dává po dělení pěti zbytek 2, tedy první číslo musí po dělení pěti dávat zbytek 3 a druhé 2. Pokud v obou výpočtech doplňujeme stejné číslo, pak úloha nemá řešení. Pokud připustíme různá čísla, pak v prvním výpočtu vyhovuje 3, ve druhém 2.]

D1. Kolik z následujících třiceti součtů lze beze zbytku dělit třemi?

$$1+2, \quad 2+3, \quad 3+4, \quad \dots, \quad 29+30, \quad 30+31.$$

[Sousední součty se liší o 2. Zbytky po dělení třemi jsou tvořeny trojicí 0, 2, 1, která se opakuje desetkrát. Deset z uvedených součtů je dělitelných třemi.]

Z5–I–4

Pinocchio tvrdí, že číslo dne v datu jeho narození lze beze zbytku dělit třemi, čtyřmi, pěti a šesti. Tři z těchto čtyř informací jsou pravdivé, jedna je nepravdivá.

Kolikátý den v měsíci může mít Pinocchio narozeniny? Určete všechny možnosti.

(E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pro následující dvojice čísel uvažte jejich společné násobky a napište pět nejmenších:

a) dva a tři,
b) tři a čtyři,
c) tři a šest.

[Pro každou dvojici začínáme s nejmenším společným násobkem: a) 6, 12, 18, 24, 30; b) 12, 24, 36, 48, 60; c) 6, 12, 18, 24, 30.]

N2. Jak bez dělení poznáme, že tisícimístné přirozené číslo lze beze zbytku dělit dvěma?

[Jedná se o sudé číslo. Končí číslicí 0, 2, 4, 6, nebo 8.]

N3. Kterými jednomístnými přirozenými čísly nelze číslo 84 dělit beze zbytku?

[Beze zbytku nelze dělit čísly 5, 8, 9. Viz též rozklad $84 = 4 \cdot 21 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.]

D1. Kolik čísel mezi 11 a 20 je násobkem právě čtyř přirozených čísel?

[Každé číslo je násobkem jedničky a sebe sama. Hledáme čísla, která jsou násobkem dvou dalších čísel. Mezi uvedenými čísly to jsou čísla 14 a 15.]

D2. Najděte tři nejmenší přirozená čísla, která lze beze zbytku dělit čtyřmi a šesti, ale nelze je beze zbytku dělit dvaceti čtyřmi.

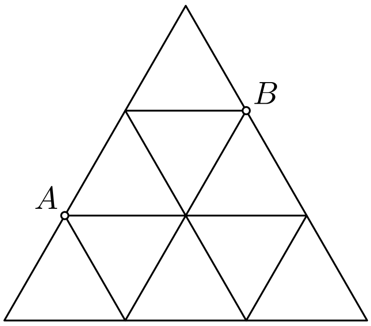
[Společné násobky čísel 4 a 6 řazené vzestupně jsou 12, 24, 36, 48, 60 atd. Tři nejmenší, které nejsou násobky 24, jsou 12, 36, 60.]

Z5–I–5

V síti stezek vyznačených na obrázku má každá stezka mezi sousedními křižovatkami délku 1 km.

Kolik cest dlouhých nanejvýš 3 km vede po stezkách z místa A do místa B?

(E. Semerádová)



Návodné a doplňující úlohy

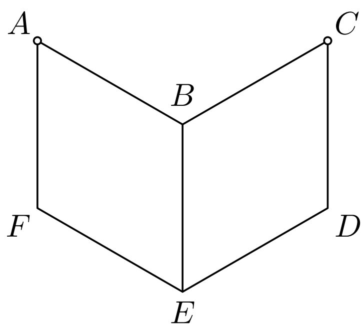
N1. Kolik cest v zadání soutěžní úlohy z bodu A do bodu B má délku a) 1 km; b) 2 km? Vymyslete zápis, který jednoznačně každou z možných cest popíše.

[a) Taková cesta neexistuje. b) Dvě cesty: V–SV a SV–V (směry popisujeme přibližně podle světových stran).]

N2. Bob se chystá na výlet. Z parkoviště k vodopádu vedou 3 cesty. Od vodopádu k rozhledně vedou 4 cesty. Kolika způsoby může Bob dojít po cestách z parkoviště kolem vodopádu k rozhledně? (Bob se nevrací ani na parkoviště, ani k vodopádu.)

[Libovolnou cestu od parkoviště k vodopádu lze kombinovat s libovolnou cestou od vodopádu k rozhledně. Z parkoviště k vodopádu může jít $3 \cdot 4 = 12$ způsoby.]

N3. Znázorněné úsečky mají ve skutečnosti délku 1 m. Z bodu A do bodu C máme po úsečkách ujít trasu dlouhou přesně 4 m. Kolika způsoby to lze provést, aniž by některá úsečka byla použita dvakrát?



[Možné trasy jsou tři: A–B–E–D–C, A–F–E–D–C a A–F–E–B–C.]

D1. Šnek Neposeda leze po obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC. Začíná z vrcholu A, směr lezení mění pouze ve vrcholech trojúhelníku a končí opět ve vrcholu A. Kolika způsoby může v součtu ulézt délku a) čtyř; b) pěti stran trojúhelníku?

[a) Čtyřmi způsoby: A–B–A–B–A, A–B–C–B–A, A–C–A–C–A, A–C–B–C–A. b) Deseti způsoby: A–B–A–B–C–A, A–B–A–C–B–A, A–B–C–B–C–A, A–B–C–A–C–A, A–B–C–A–B–A a dalších pět cest s prohozenými vrcholy B a C.]

D2. Poník běhá po obvodu čtverce $ABCD$ se stranou délky 100 m. Vždy vyběhne z vrcholu A a tam se i vrátí. Jenom v tomto bodě může také měnit směr obíhání čtverce. Kolik metrů měří sedmý nejkratší poníkův běh podle těchto pravidel?

[Délka každého běhu je násobkem obvodu čtverce, nezávisle na tom, zda poník mění směr či nikoli. Sedmý nejkratší běh měří $7 \cdot 4 \cdot 100 = 2\,800$ metrů.]

Z5–I–6

Andělka navléká na nit bez mezer za sebe korálky tří různých tvarů A, B, C. Postupuje tak, že tvary střídá ve stále stejném pořadí a postupně zvyšuje počty tvarů ve skupinách:

$$ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC\ldots$$

Korálek tvaru A zabírá 5 mm nitě, korálek tvaru B zabírá 4 mm, korálek tvaru C zabírá 3 mm.

Kolik korálků potřebuje Andělka k výrobě náhrdelníku dlouhého alespoň 50 cm?

(L. Dedková)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Maruška měla jednu korunu, dvě dvoukoruny, pět pětikorun, deset desetikorun a dvacet dvacetikorun. Jakou částku v mincích měla?

[Měla $1 + 4 + 25 + 100 + 400 = 530$ korun.]

N2. Toník měl koruny, dvoukoruny, pětikoruny a desetikoruny, od každého druhu alespoň jeden kus. V korunách měl stejnou částku jako v desetikorunách a ve dvoukorunách měl stejnou částku jako v pětikorunách. Kolik nejméně měl Toník mincí?

[Nejméně měl 10 korun, 1 desetikorunu, 5 dvoukorun a 2 pětikoruny, tj. 18 mincí.]

N3. Miloš měl několik korun, pět dvoukorun, několik pětikorun a sedm desetikorun v celkové hodnotě 93 Kč. Kolik nejméně měl Miloš mincí?

[Koruny a pětikoruny měly celkovou hodnotu $93 - 10 - 70 = 13$ Kč. Tedy měl nejméně 3 koruny a 2 pětikoruny, celkem nejméně $3 + 5 + 2 + 7 = 17$ mincí.]

D1. Dana měla 2 jablka, 3 hrušky a 4 nektarinky. Ema měla od každého z těchto druhů ovoce dvakrát tolik, co Dana. Fína měla hrušek o jednu víc než jablek a o jednu méně než nektarinek. Celkem děvčata měla 20 nektarinek. Kolik měla dohromady jablek?

[Ema měla 4 jablka, 6 hrušek a 8 nektarinek. Fína měla $20-4-8 = 8$ nektarinek, a tedy $8 - 1 - 1 = 6$ jablek. Dohromady měla děvčata $2 + 4 + 6 = 12$ jablek.]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y$ je 16. *(P. Bak)*

Návodné a doplňující úlohy

V řešeních lze s výhodou použít následující charakterizaci dělitelnosti přirozených čísel: Číslo d dělí číslo a, právě když pro nějaké přirozené číslo k platí $a = k \cdot d$.

N1. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, d platí:

a) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také součet $a + b$ a rozdíl $a - b$.
b) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také číslo $11a + 13b$.

[Ve všech případech lze dělitele d z uvedených vyjádření vytknout, tedy d tato čísla dělí: Podle předpokladu platí $a = k \cdot d$ a $b = l \cdot d$ pro nějaká čísla k a l, tedy $a + b = (k + l) \cdot d$, $a - b = (k - l) \cdot d$ a $11a + 13b = (11k + 13l) \cdot d$.]

N2. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:
Pokud a a $2a + 3b$ jsou čísla dělitelná pěti, pak také číslo b je dělitelné pěti.

[Pokud 5 dělí čísla a a $2a + 3b$, pak 5 dělí také číslo $3b$: Podle předpokladu platí $a = 5k$ a $2a + 3b = 5l$ pro nějaká čísla k a l, tedy $3b = 5l - 2a = 5(l - 2k)$. Protože 3 a 5 jsou nesoudělná čísla, musí být b dělitelné pěti. Uvedené tvrzení platí.]

N3. Najděte všechna prvočísla p, pro která platí, že $\frac{p}{2} + 2p$ je prvočíslo.

[Jak p, tak $\frac{p}{2} + 2p$ musí být především celá čísla, tedy i $\frac{p}{2}$ musí být celé. Jediné sudé prvočíslo je 2, tedy $p = 2$ a $\frac{p}{2} + 2p = 5$, což je také prvočíslo. Úloha má jediné řešení $p = 2$.]

D1. Při dělení čísla a číslem 53 dostaneme zbytek 3 a při dělení čísla b číslem 53 dostaneme zbytek 2. Jaký zbytek dostaneme po dělení čísla $4a + 5b$ číslem 53?

[Podle předpokladu platí $a = 53k + 3$ a $b = 53l + 2$ pro nějaká čísla k a l. Odtud dostáváme $4a + 5b = 4(53k + 3) + 5(53l + 2) = 53(4k + 5l) + 22$. Hledaný zbytek je 22.]

D2. Pro obecné přirozené číslo k uvažte součet po sobě jdoucích čísel

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5).$$

Rozhodněte, pro která k je tento součet dělitelný dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, resp. šesti.

[Zápis S navádí k rozdělení do skupin po šesti sčítancích, každou skupinu sečteme a dále upravíme:

$$\begin{aligned} S &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (6k + (6k + 1) + (6k + 2) + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5)) = \\ &= 15 + (36 + 15) + \cdots + (36k + 15) = 15(k + 1) + 36(1 + \cdots + k). \end{aligned}$$

Z posledního vyjádření vyvozujeme, že S je dělitelné 3 pro libovolné k; S je dělitelné 2, právě když $k+1$ je dělitelné 2, tzn. k je liché; S je dělitelné 6, právě když k je liché; S je dělitelné 4, právě když $k+1$ je dělitelné 4, tzn. k dává po dělení 4 zbytek 3 ($k = 3, 7, 11, \ldots$). Dále S je dělitelné 5, právě když $1 + \cdots + k$ je dělitelné 5, což nastává pro k dělitelné 5 nebo pro k, která po dělení 5 dávají zbytek 4 ($k = 4, 5, 9, 10, \ldots$).

Součet prvních k přirozených čísel lze vyjádřit jako $1 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, což může pomoct při kontrole dělitelnosti 5. Stejné pravidlo použité na součet ze zadání dává $S = \frac{1}{2}(6k+5)(6k+5+1) = 3(6k+5)(k+1)$, což může zkrátit mnohé z předchozích úvah.]

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem 864 cm^3 a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. *(V. Dedek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu dlouhou $a = 3\,\mathrm{cm}$ a výšku $v = 5\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte objem hranolu a obsah jeho pláště.

[Objem hranolu je $a^2v = 45\,\mathrm{cm}^3$, obsah pláště je $4av = 60\,\mathrm{cm}^2$.]

N2. Určete velikost úhlopříčky obdélníku se stranami délek 4 cm a 9 cm.

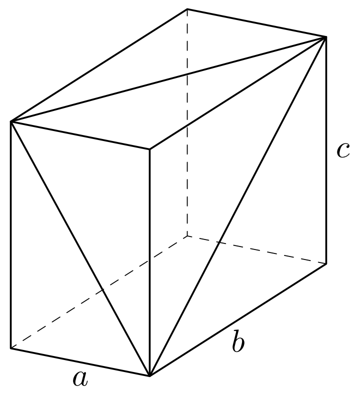
[Podle Pythagorovy věty je délka úhlopříčky $\sqrt{4^2+9^2} = \sqrt{97} \doteq 9{,}85\,\mathrm{cm}$.]

N3. Pravidelný čtyřboký hranol má tělesovou úhlopříčku délky $\sqrt{86}\,\mathrm{cm}$ a výšku 6 cm. Určete objem hranolu.

[Tělesová úhlopříčka, výška a podstavná úhlopříčka tvoří pravoúhlý trojúhelník a stejně tak podstavná úhlopříčka s podstavnými hranami. Dvojím užitím Pythagorovy věty dostáváme $2a^2 = 86 - 6^2$, kde a značí velikost podstavné hrany. Odtud $a = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{cm}$ a objem hranolu je $5^2 \cdot 6 = 150\,\mathrm{cm}^3$.]

D1. Je dán kvádr s hranami délek a, b, c a trojúhelník určený jeho stěnovými úhlopříčkami. Pomocí a, b, c vyjádřete velikosti stran trojúhelníku a výpočtem ukažte, že trojúhelník není pravoúhlý.

[Všechny takové trojúhelníky jsou navzájem shodné, každý má strany délek $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$. Pokud by trojúhelník byl pravoúhlý a např. poslední strana byla přeponou, pak by mělo platit $(a^2+b^2)+(a^2+c^2) = (b^2+c^2)$ neboli $2a^2 = 0$. To však není možné, protože $a > 0$. Obdobně vyloučíme ostatní dva případy.]



D2. Kolik stěnových a kolik tělesových úhlopříček má pravidelný n-boký hranol?

[Z každého z n vrcholů jedné podstavy vede tělesová úhlopříčka do každého z $n-3$ vrcholů druhé podstavy, se kterými neleží ve stejné stěně. Tedy tělesových úhlopříček je $n(n-3) = n^2 - 3n$. Při pohledu shora tělesové úhlopříčky splývají s úhlopříčkami podstav, přičemž za každým průmětem jsou dvě tělesové a dvě podstavné úhlopříčky. Podstavných úhlopříček je proto stejně jako tělesových. V každé z n bočních stěn jsou dvě úhlopříčky, tedy stěnových úhlopříček je celkem $n^2 - 3n + 2n = n^2 - n$.]

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ *sestávající z prvních* n *přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.*

Najděte největší možné n*, pro které to je možné.* *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

Množinou se myslí skupina neopakujících se objektů (čísel, lidí, věcí atd.), kterým se říká *prvky*. Množina je charakterizována právě svými prvky, není podstatné jejich uspořádání či jiná struktura. *Podmnožinou* množiny je libovolná množina obsahující některé (nebo i všechny) prvky dané množiny, ale žádné jiné. *Neprázdná* množina obsahuje alespoň jeden prvek, množina neobsahující žádný prvek se nazývá *prázdná*.

N1. Devítiprvková množina byla rozdělena do šesti neprázdných podmnožin. Kolik nejvíce prvků může mít největší z těchto podmnožin?

[Pět neprázdných podmnožin obsahuje nejméně pět prvků, na šestou množinu zbývají nejvýše čtyři prvky.]

N2. Vypište všechny dvouprvkové množiny tvořené nesoudělnými děliteli čísla 24.

[Dělitelé čísla 24 jsou 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24. Nesoudělné dvojice jsou $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 6\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 12\}$, $\{1, 24\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 8\}$.]

N3. Kolik nejméně množin je potřeba k rozdělení všech dělitelů čísla 100 tak, aby čísla v každé množině byla po dvou nesoudělná?

[Číslo 100 má šest sudých dělitelů a tři liché. Méně než šest množin nestačí, avšak šest stačí: $\{1, 2, 5\}$, $\{4, 25\}$, $\{10\}$, $\{20\}$, $\{50\}$, $\{100\}$.]

N4. Která přirozená čísla mají pouze nesoudělné dvojice dělitelů?

[Pokud má číslo vlastního dělitele různého od 1, pak tento dělitel spolu s daným číslem tvoří dvojici soudělných dělitelů. Čísla s uvedenou vlastností jsou pouze prvočísla.]

D1. Zdůvodněte: Jestliže dané číslo má nějakého sudého dělitele, pak alespoň polovina všech jeho dělitelů je sudých.

[Čísla se sudým dělitelem jsou nutně sudá (neboli lichá čísla mají pouze liché dělitele). Jestliže sudé číslo má lichého dělitele d, pak také číslo $2d$ je jeho dělitelem. Tedy sudých dělitelů je alespoň tolik, co lichých.]

Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Jaký může být nejmenší a jaký největší ciferný součet přirozeného čísla, které má a) 2 číslice; b) 3 číslice; c) n číslic?

[Nejmenší ciferný součet je ve všech případech 1 (pro čísla s první číslicí 1 a ostatními 0). Největší ciferný součet je a) 18; b) 27; c) $9n$ (pro čísla tvořená samými 9).]

N2. Přičtěte k číslu 74 jednomístné číslo tak, aby ciferný součet výsledného čísla byl:

a) menší než ciferný součet čísla 74,
b) stejný jako ciferný součet čísla 74?

Najděte všechny možnosti.

[Pokud přičtením nedojde k přechodu přes desítku, ciferný součet se zvětší. Vyhovující možnosti jsou a) 6, 7 nebo 8; b) 9.]

N3. Popište všechna trojmístná čísla, jejichž ciferný součet se po přičtení 1 zmenší. Určete možné rozdíly ciferných součtů.

[Ciferný součet se zmenší pro čísla končící devítkou. Pro čísla tvaru $**9$ (kde $*$ značí číslice různé od 9) se ciferný součet zmenší o 8, pro čísla tvaru $*99$ se ciferný součet zmenší o 17, pro číslo 999 se ciferný součet zmenší o 26.]

D1. Odhalte pravidlo v zápise následujícího příkladu a určete ciferný součet výsledného čísla:

$$(989 + 111) + (98789 + 11211) + (9876789 + 1123211) + \cdots$$
$$\cdots + (98765432101234567890 + 11234567898765432111).$$

[Součty v závorkách jsou obecně tvaru 1100, 110000, 11000000 atd. (např. třetí závorku můžeme vyjádřit jako $9876789 + 1000000 + 123210 + 1 = 1000000 + 999999 + 1 = 11000000$). Součet prvních dvou závorek je 110000, prvních tří závorek 11111100 atd., tedy jedničky se kumulují a nové číslice se neobjevují. Ve vyjádření součtu prvních n závorek je $2n$ jedniček a dvě nuly. Závorek je celkem 9, tedy ciferný součet výsledného čísla je 18.]

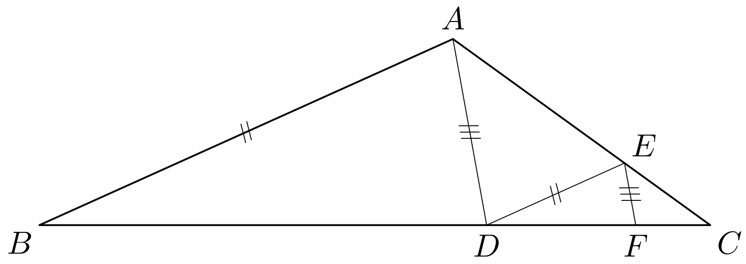
D2. Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1. Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti.

[Největší číslo, které mohla pošeptat Jana Petrovi, bylo $2022 \cdot 9 = 18198$ (pro 2022místné číslo tvořené samými 9). Největší číslo, které mohl pošeptat Petr Zuzce, bylo 36 (pro číslo 9999). Zuzka Adamovi pošeptala dvojmístné číslo s ciferným součtem 1, tj. jedině číslo 10. Petr Zuzce tedy pošeptal číslo menší nebo rovno 36 s ciferným součtem 10, tj. buď 19, nebo 28.[?]]

Z9–I–5

V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F.

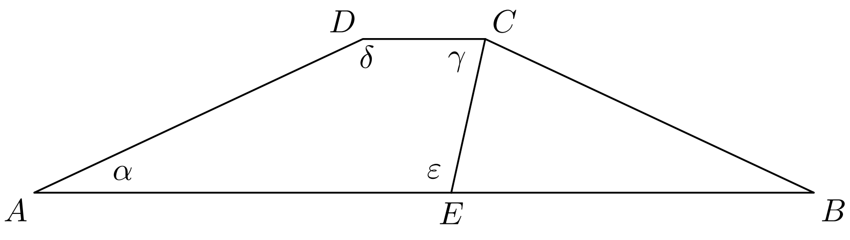
Určete poměr úseček AD a EF. *(M. Dományová)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Bod E je průsečíkem strany AB s osou úhlu BCD. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je 25°. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $AECD$.

[Vnitřní úhly u vrcholů čtyřúhelníku $AECD$ označíme odpovídajícími písmeny řecké abecedy. Ze zadání známe $\alpha = 25°$. Z rovnoběžnosti $AB \| CD$ plyne $\delta = 180° - 25° = 155°$. To je také velikost úhlu BCD, tedy $\gamma = 155°/2 = 77{,}5°$. Ze součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku dostáváme $\varepsilon = 360° - \alpha - \delta - \gamma = 102{,}5°$.]

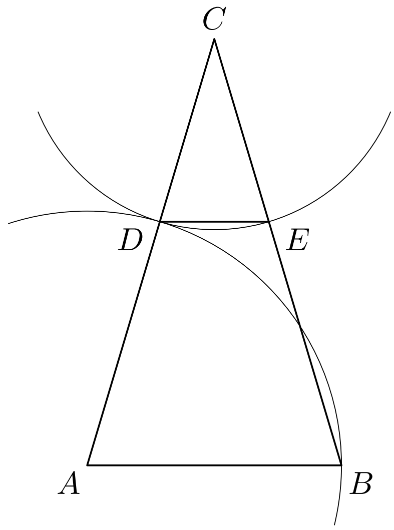


N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, kde $|AB| = 4\,\text{cm}$ a $|AC| = 7\,\text{cm}$. Kružnice se středem A procházející bodem B protíná stranu AC v bodě D.

[?] Převzato ze 71. ročníku MO, úloha **Z9–I–2**.

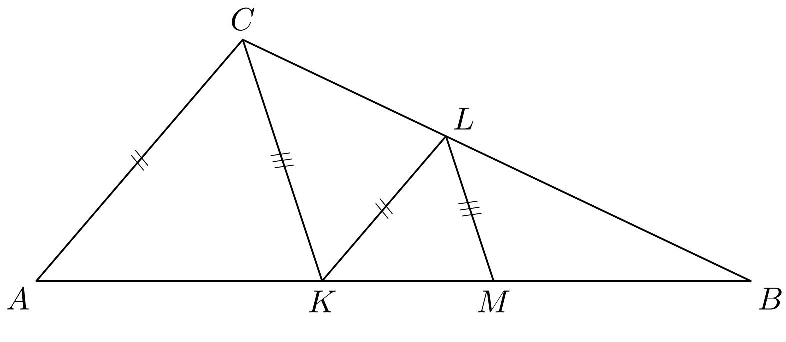
Kružnice se středem C procházející bodem D protíná stranu BC v bodě E. Určete obvod trojúhelníku DEC.

[Body D a E leží na kružnici se středem C, tedy trojúhelník DEC je rovnoramenný se základnou DE. Trojúhelníky DEC a ABC jsou podobné (přesněji stejnolehlé se středem C) a koeficient této podobnosti je $|DC| : |AC| = 3 : 7$ (zde využíváme $|DC| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| = 7 - 4$). Ve stejném poměru jsou také obvody trojúhelníků DEC a ABC. Obvod trojúhelníku ABC je $4 + 2 \cdot 7 = 18\,\text{cm}$, obvod trojúhelníku DEC je $\frac{3}{7} \cdot 18 \doteq 7{,}71\,\text{cm}$.]

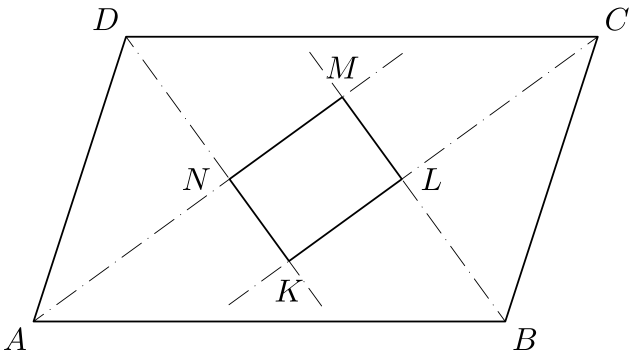


N3. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB body K, M, na straně BC je bod L a platí: $AC \| KL$, $CK \| LM$, $|AC| = 5\,\text{cm}$, $|CK| = 4\,\text{cm}$, $|KL| = 3\,\text{cm}$. Určete délku úsečky LM.

[Díky rovnoběžnostem $AC \| KL$ a $CK \| LM$ mají trojúhelníky AKC a KML shodné vnitřní úhly, tedy jsou podobné. Odpovídající si poměry stran jsou stejné, tedy např. platí $|AC| : |CK| = |KL| : |LM|$. Po dosazení a úpravě dostáváme $|LM| = \frac{12}{5} = 2{,}4\,\text{cm}$.]



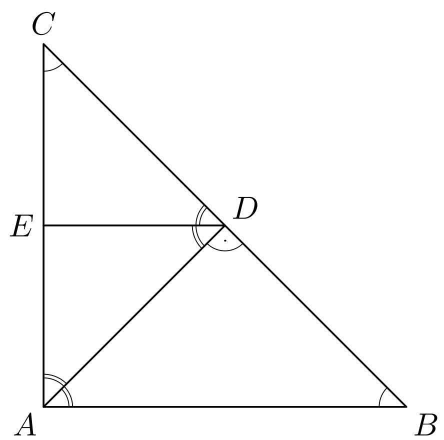
D1. Osy vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ omezují čtyřúhelník $KLMN$. Pomocí vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ vyjádřete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $KLMN$.



[Vnitřní úhly u vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$ označíme odpovídajícími písmeny řecké abecedy. Protože $ABCD$ je kosodélník, platí např. $\alpha + \beta = 180^\circ$. Protože osy úhlů tyto úhly půlí, platí např. $|\sphericalangle MAB| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle MBA| = \beta/2$. Protože součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABM je 180°, platí $|\sphericalangle AMB| = 180^\circ - \alpha/2 - \beta/2 = 180^\circ - (\alpha+\beta)/2 = 90^\circ$. Protože $KLMN$ je rovnoběžník a jeden jeho vnitřní úhel je pravý, jsou pravé všechny. Jedná se tedy o pravoúhelník, tj. obdélník či čtverec.]

D2. V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě D a osa úhlu ADC protíná stranu AC v bodě E. Dále platí, že trojúhelníky ABD a DCE jsou podobné a strana AB měří 10 cm. Určete obvod trojúhelníku ABC.

[Z podobnosti trojúhelníků ABD a DCE plyne shodnost úhlů ABD a DCE, tedy trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC. Proto je osa AD kolmá k BC neboli úhel CDA je pravý. Z téže podobnosti dále plyne shodnost úhlů BAD a CDE, tedy i jejich dvojnásobků BAC a CDA. Proto je také úhel BAC pravý neboli trojúhelník ABC je pravoúhlý. Velikosti jeho stran jsou $|AC| = |AB| = 10\,\mathrm{cm}$ a (podle Pythagorovy věty) $|BC| = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Hledaný obvod je $10(2+\sqrt{2}) \doteq 34{,}14\,\mathrm{cm}$.]



Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka. Určete a znázorněte délky skoků všech králíků a jejich výsledné pořadí.

[Vzhledem ke skoku Řízka se snadno určí a na přímce znázorní délky skoků ostatních: Pečínka skočila $2730 - 1100 = 1630$ mm, Fašírka skočila $1630 - 150 = 1480$ mm, Guláš skočil $1480 + 200 = 1680$ mm. Výsledné pořadí bylo: 1. Řízek, 2. Guláš, 3. Pečínka, 4. Fašírka.[?]]

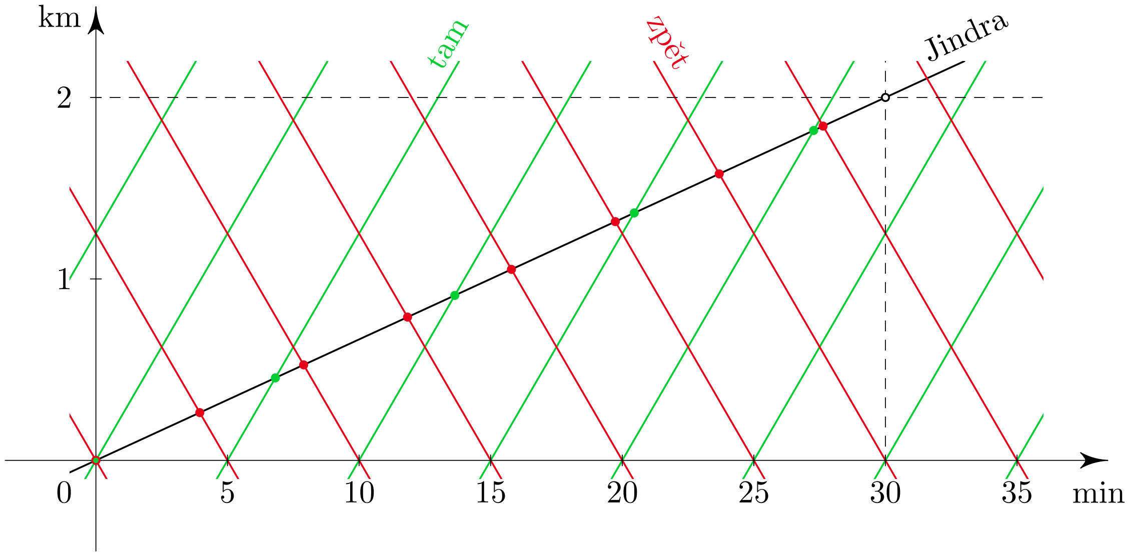
N2. Mohl být bazén ze soutěžní úlohy dlouhý 13 metrů?

[Předpokládejme, že bazén má 13 m a označme t čas prvního míjení plavců. V čase t byli 5 m od Pulcovy startovní strany, přičemž Pulec uplaval 5 m a Pstruh 8 m. V čase $2t$ uplaval Pulec dalších 5 m a Pstruh dalších 8 m, tedy od Pulcovy strany byl Pulec 10 m a Pstruh po obrátce 3 m. V čase $3t$ přidal každý zase svoji vzdálenost a míjeli se 11 m od Pulcovy strany. Podruhé se však měli míjet 5 m od Pulcovy strany, tedy bazén nemohl měřit 13 m.]

N3. Mezi dvěma zastávkami vzdálenými 2 km jezdí trolejbusy každých 5 minut, a to v obou směrech rychlostí 15 km za hodinu. Jindra šel podél trasy trolejbusu rychlostí 4 km za hodinu. Když vycházel od první zastávky, zrovna se zde míjely dva protijedoucí trolejbusy. Kolik trolejbusů Jindra cestou k druhé zastávce potkal?

[Trolejbusy ujedou trasu mezi zastávkami za $\frac{2}{15}$ h $= 8$ min, Jindra ji ujde za $\frac{2}{4}$ h $=$ $= 30$ min. Ve směru svého pohybu Jindra potkal všechny trolejbusy, které z první zastávky vyjely nejpozději 22. minutu jeho pohybu na trase, a těch bylo 5 (vyjely v minutách 0, 5, 10, 15, 20). Proti směru svého pohybu potkal všechny trolejbusy, které do první zastávky dojely nejpozději 38. minutu jeho pohybu na trase, a těch bylo 8 (dojely v minutách 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35). Jindra potkal celkem 13 trolejbusů. Názorně je vše zachyceno v následujícím grafu.]

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z6–I–1**.



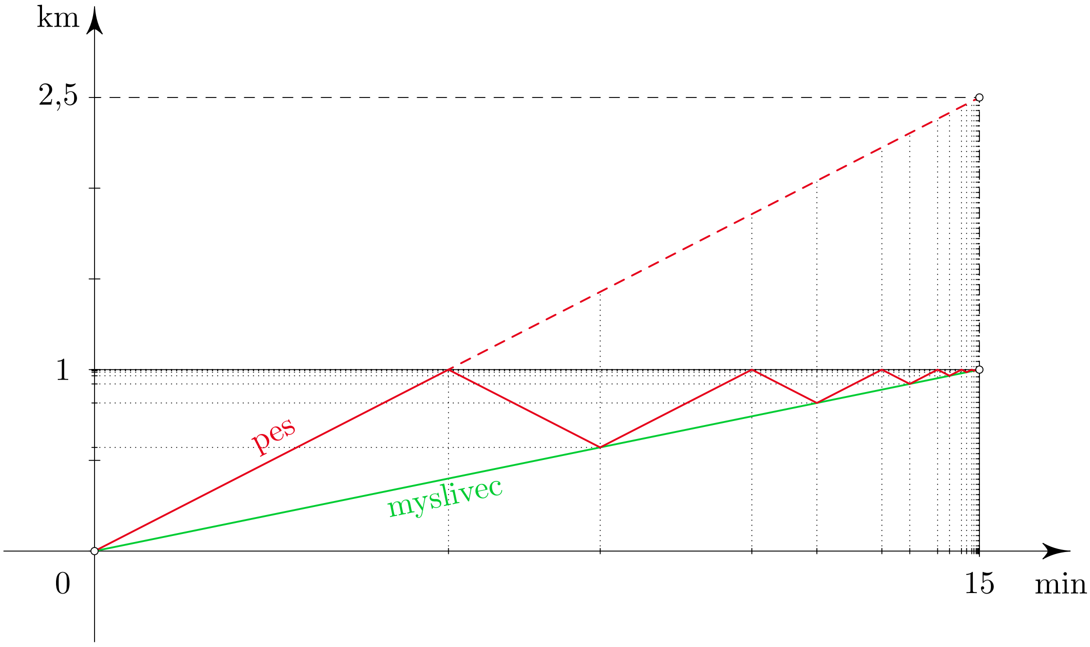
D1. Z města A do města B vyráží současně dodávka a kamion, ve stejnou chvíli proti nim z B do A vyjíždí motorka. Rychlosti dodávky, kamionu a motorky jsou po řadě 90 km/h, 40 km/h a 100 km/h. Vzdálenost měst A a B je 300 km. Za jak dlouho bude dodávka stejně vzdálena od kamionu i motorky?

[Za čas t měřený v hodinách se vozidla nachází ve vzdálenostech $90t$, $40t$, resp. $300 - 100t$ km od města A. Situace ze zadání nastane dvakrát. Poprvé než se potká motorka s dodávkou: rovnost vzdáleností dodávky od kamionu a dodávky od motorky je $90t - 40t = (300 - 100t) - 90t$, odkud vypočteme $t = \frac{5}{4}\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,15\,\mathrm{min}$. Podruhé nastane, když se motorka míjí s kamionem: rovnost vzdáleností kamionu a motorky od města A je $40t = 300 - 100t$, odkud vypočteme $t = \frac{15}{7}\,\mathrm{h} \doteq 2\,\mathrm{h}\,9\,\mathrm{min}$.]

D2. Myslivec jde rychlostí 4 km/h. Když je vzdálený 1 km od myslivny, pustí psa, který běhá rychlostí 10 km/h. Pes plný radosti běží k myslivně, u myslivny se hbitě otočí a běží zpět k myslivci. U něj se opět otočí a běží k myslivně, od ní zase k myslivci a tak pořád dokola. Kolik kilometrů pes naběhá, než oba dorazí do myslivny?

[Stačí se zaměřit na čas: Myslivec ujde 1 km k myslivně za $\frac{1}{4}$ h. Stejnou dobu běhal i pes, který tak uběhl $10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ km. Postupné sčítání vzdáleností uběhnutých psem mezi jednotlivými otočkami by vedlo ke geometrické řadě, viz následující schéma.[?]]

[?] Klasická úloha upravená podle publikace M. Volfová, *Metody řešení matematických úloh*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2000.


km
2,5
1
pes
myslivec
0
15
min