Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

V naší ulici bydlí Čapkovi a Němcovi. Čapkovi mají dva syny, Karlíka a o dva roky staršího Pepíka. Němcovi mají dceru Bóžu. Narozeniny všech tří dětí slavívají obě rodiny společně, a to v den Karlíkových narozenin. Při letošní oslavě byla Bóža třikrát starší než Karlík. Za tři roky bude Karlíkovi a Pepíkovi dohromady stejně jako bude Bóže.

Kolik let bylo dětem při letošní oslavě? *(M. Petrová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Pankrác je o 3 roky mladší než Servác. Bonifác je čtyřikrát starší než Pankrác. Kolik let je všem třem klukům dohromady, když Pankrácovi je 1 rok? Kolik let jim bude dohromady za rok?

[Jak Servác, tak Bonifác mají 4 roky. Všem třem dohromady je 9 let. Příští rok jim dohromady bude 12 let.]

N2. Linda je o 8 let mladší než Hanka. Hanka je pětkrát starší než Linda. Kolik je každé z dívek let?

[Kdyby Linda měla 1 rok, Hanka by měla 9 let, což není pětkrát víc. Kdyby Linda měla 2 roky, Hanka by měla 10 let, a to je správné řešení.]

N3. Tři sourozenci Jarek, Ládík a Patrik se narodili na Hromnice v třech po sobě jdoucích letech. Za dva roky jim dohromady bude 30 let. Kolik bude nejstaršímu z nich příští rok?

[Letos je sourozencům dohromady $30 - 2 \cdot 3 = 24$ let. Jejich věky tedy jsou 7, 8 a 9 let. Nejstaršímu příští rok bude 10 let.]

N4. Letos na Vánoce je Silvě a Terce dohromady o devět let méně než Uršule. Za kolik let na Vánoce bude Silvě a Terce dohromady víc než Uršule?

[Každý rok přidá do součtu věků Silvy a Terky 2 roky, tedy 1 rok navíc oproti přibývajícím létům Uršuly. Musíme tedy počkat $9 + 1 = 10$ let.]

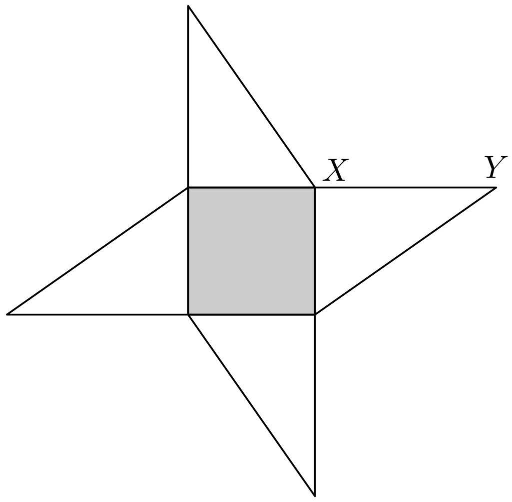
D1. Martin a Nina v pondělí ráno dostali každý svůj pytlík se stejným počtem bonbónů. Martin každý všední den snědl stejný počet bonbónů, až mu na víkend žádný nezbyl. Nina ujídala bonbóny celý týden, také každý den stejný počet, a v neděli byl i její pytlík prázdný. Kolik nejméně bonbónů mohlo být v každém pytlíku?

[Protože Martin jedl 5 dnů a Nina 7 dnů, musí být hledané číslo násobkem pěti i sedmi. V pytlíku bylo nejméně 35 bonbónů.]

Z5–I–2

Na obrázku je šedý čtverec se stranou délky 10 cm. Čtverec doplňují čtyři stejné pravoúhlé trojúhelníky do tvaru hvězdy. Součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce.

Určete délku strany XY. *(E. Semerádová)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Čtverec o straně 1 cm se nazývá *jednotkový*. Jednotkový čtverec má obsah 1 centimetr čtvereční, což se značí $1\,\mathrm{cm}^2$. Kolik centimetrů čtverečních má čtverec, který má středy stran ve vrcholech jednotkového čtverce?

[Čtverec obsahuje jeden jednotkový čtverec a z přečnívajících cípů lze složit druhý jednotkový čtverec. Obsah čtverce je $2\,\mathrm{cm}^2$.]

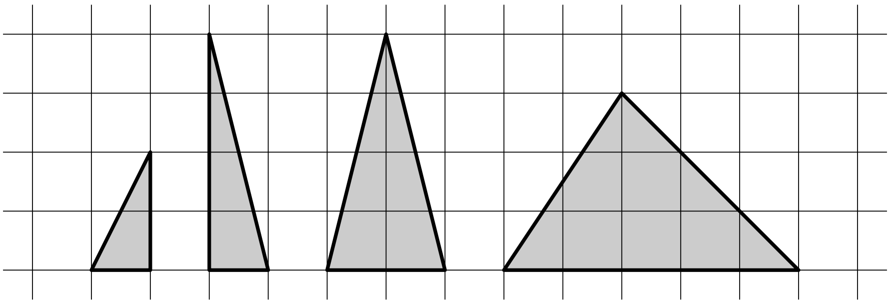
N2. Obdélník je třikrát delší než širší a jeho obsah je $75\,\mathrm{cm}^2$. Kolik centimetrů měří jeho kratší strana?

[Obdélník je tvořen třemi čtverci, jejichž strany se shodují s kratšími stranami obdélníku. Obsah každého ze čtverců je $25\,\mathrm{cm}^2$. Kratší strana obdélníku měří 5 cm.]

N3. Čtverec $ABCD$ má strany délky 6 cm. Střed strany AD označíme E a střed strany BC označíme F. Určete obsahy trojúhelníků ABE, BFE, EFD a FCD.

[Trojúhelníky jsou shodné a dohromady tvoří čtverec $ABCD$. Čtverec má obsah $36\,\mathrm{cm}^2$, obsah každého z trojúhelníků je čtvrtinový, tj. $9\,\mathrm{cm}^2$.]

N4. Trojúhelníky na obrázku mají vrcholy v uzlových bodech jednotkové čtvercové sítě. Určete jejich obsahy.



[Každý z trojúhelníků buď tvoří polovinu obdélníku, nebo jej lze na takové poloviny rozdělit. Poté je snadné spočítat obsažené čtverce sítě. Obsahy trojúhelníků jsou $1\,\mathrm{cm}^2$, $2\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ a $7{,}5\,\mathrm{cm}^2$.]

D1. Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny délek 1 cm a 2 cm. Jeho obsah je $1\,\mathrm{cm}^2$, tedy v centimetrech čtverečních je vyjádřen celým číslem. Vladan prodloužil obě odvěsny tohoto trojúhelníku o stejný celočíselný počet centimetrů. Je možné, aby obsah Vladanova trojúhelníku v cm^2 nebyl vyjádřen celým číslem?

[Délky odvěsen Vladanova trojúhelníku se liší o 1 cm, tedy jedna je vyjádřena sudým a druhá lichým číslem. Součin těchto čísel je sudý a po dělení dvěma dostaneme celé číslo. Obsah v cm^2 je vždy vyjádřen celým číslem.]

Z5–I–3

V následujícím příkladu je pětkrát použito znaménko + a výsledek je násobkem tří:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39.$$

Změňte dvě ze znamének + na znaménko − tak, aby výsledek nového příkladu byl opět násobkem tří. Najděte všechny možnosti. *(E. Semerádová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Která z následujících čísel lze beze zbytku dělit třemi?

$$30, \quad 45, \quad 777, \quad 9999.$$

[Všechna uvedená čísla dávají po dělení třemi zbytek 0.]

N2. Místo hvězdičky doplňte do $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit třemi. Najděte všechna řešení.

[Číslo 30 lze dělit třemi beze zbytku, tedy také doplněná čísla musí jít dělit třemi beze zbytku. Vyhovují čísla 3 a 6.]

N3. Místo hvězdičky doplňte do $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit čtyřmi. Najděte všechna řešení.

[Číslo 30 dává po dělení čtyřmi zbytek 2, tedy doplněná čísla musí po dělení čtyřmi dávat zbytek 2. Vyhovují čísla 2 a 6.]

N4. Místo hvězdičky doplňte do $32 + *$ a $32 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby výsledky obou výpočtů bylo možné beze zbytku dělit pěti. Najděte všechna řešení.

[Číslo 32 dává po dělení pěti zbytek 2, tedy první číslo musí po dělení pěti dávat zbytek 3 a druhé 2. Pokud v obou výpočtech doplňujeme stejné číslo, pak úloha nemá řešení. Pokud připustíme různá čísla, pak v prvním výpočtu vyhovuje 3, ve druhém 2.]

D1. Kolik z následujících třiceti součtů lze beze zbytku dělit třemi?

$$1 + 2, \quad 2 + 3, \quad 3 + 4, \quad \dots, \quad 29 + 30, \quad 30 + 31.$$

[Sousední součty se liší o 2. Zbytky po dělení třemi jsou tvořeny trojicí 0, 2, 1, která se opakuje desetkrát. Deset z uvedených součtů je dělitelných třemi.]

Z5–I–4

Pinocchio tvrdí, že číslo dne v datu jeho narození lze beze zbytku dělit třemi, čtyřmi, pěti a šesti. Tři z těchto čtyř informací jsou pravdivé, jedna je nepravdivá.

Kolikátý den v měsíci může mít Pinocchio narozeniny? Určete všechny možnosti.

(E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pro následující dvojice čísel uvažte jejich společné násobky a napište pět nejmenších:

a) dva a tři,
b) tři a čtyři,
c) tři a šest.

[Pro každou dvojici začínáme s nejmenším společným násobkem: a) 6, 12, 18, 24, 30; b) 12, 24, 36, 48, 60; c) 6, 12, 18, 24, 30.]

N2. Jak bez dělení poznáme, že tisícimístné přirozené číslo lze beze zbytku dělit dvěma?

[Jedná se o sudé číslo. Končí číslicí 0, 2, 4, 6, nebo 8.]

N3. Kterými jednomístnými přirozenými čísly nelze číslo 84 dělit beze zbytku?

[Beze zbytku nelze dělit čísly 5, 8, 9. Viz též rozklad $84 = 4 \cdot 21 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.]

D1. Kolik čísel mezi 11 a 20 je násobkem právě čtyř přirozených čísel?

[Každé číslo je násobkem jedničky a sebe sama. Hledáme čísla, která jsou násobkem dvou dalších čísel. Mezi uvedenými čísly to jsou čísla 14 a 15.]

D2. Najděte tři nejmenší přirozená čísla, která lze beze zbytku dělit čtyřmi a šesti, ale nelze je beze zbytku dělit dvaceti čtyřmi.

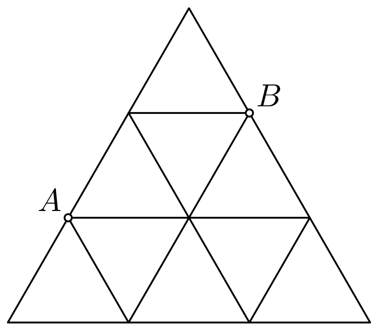
[Společné násobky čísel 4 a 6 řazené vzestupně jsou 12, 24, 36, 48, 60 atd. Tři nejmenší, které nejsou násobky 24, jsou 12, 36, 60.]

Z5–I–5

V síti stezek vyznačených na obrázku má každá stezka mezi sousedními křižovatkami délku 1 km.

Kolik cest dlouhých nanejvýš 3 km vede po stezkách z místa A do místa B?

(E. Semerádová)



Návodné a doplňující úlohy

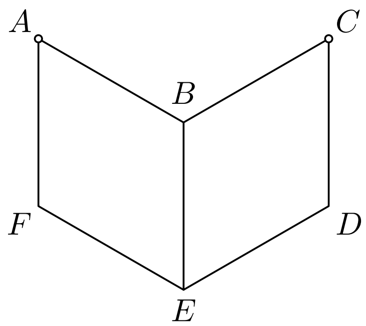
N1. Kolik cest v zadání soutěžní úlohy z bodu A do bodu B má délku a) 1 km; b) 2 km? Vymyslete zápis, který jednoznačně každou z možných cest popíše.

[a) Taková cesta neexistuje. b) Dvě cesty: V–SV a SV–V (směry popisujeme přibližně podle světových stran).]

N2. Bob se chystá na výlet. Z parkoviště k vodopádu vedou 3 cesty. Od vodopádu k rozhledně vedou 4 cesty. Kolika způsoby může Bob dojít po cestách z parkoviště kolem vodopádu k rozhledně? (Bob se nevrací ani na parkoviště, ani k vodopádu.)

[Libovolnou cestu od parkoviště k vodopádu lze kombinovat s libovolnou cestou od vodopádu k rozhledně. Z parkoviště k vodopádu může jít $3 \cdot 4 = 12$ způsoby.]

N3. Znázorněné úsečky mají ve skutečnosti délku 1 m. Z bodu A do bodu C máme po úsečkách ujít trasu dlouhou přesně 4 m. Kolika způsoby to lze provést, aniž by některá úsečka byla použita dvakrát?



[Možné trasy jsou tři: A–B–E–D–C, A–F–E–D–C a A–F–E–B–C.]

D1. Šnek Neposeda leze po obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC. Začíná z vrcholu A, směr lezení mění pouze ve vrcholech trojúhelníku a končí opět ve vrcholu A. Kolika způsoby může v součtu ulézt délku a) čtyř; b) pěti stran trojúhelníku?

[a) Čtyřmi způsoby: A–B–A–B–A, A–B–C–B–A, A–C–A–C–A, A–C–B–C–A. b) Deseti způsoby: A–B–A–B–C–A, A–B–A–C–B–A, A–B–C–B–C–A, A–B–C–A–C–A, A–B–C–A–B–A a dalších pět cest s prohozenými vrcholy B a C.]

D2. Poník běhá po obvodu čtverce $ABCD$ se stranou délky 100 m. Vždy vyběhne z vrcholu A a tam se i vrátí. Jenom v tomto bodě může také měnit směr obíhání čtverce. Kolik metrů měří sedmý nejkratší poníkův běh podle těchto pravidel?

[Délka každého běhu je násobkem obvodu čtverce, nezávisle na tom, zda poník mění směr či nikoli. Sedmý nejkratší běh měří $7 \cdot 4 \cdot 100 = 2\,800$ metrů.]

Z5–I–6

Andělka navléká na nit bez mezer za sebe korálky tří různých tvarů A, B, C. Postupuje tak, že tvary střídá ve stále stejném pořadí a postupně zvyšuje počty tvarů ve skupinách:

$$ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC\dots$$

Korálek tvaru A zabírá 5 mm nitě, korálek tvaru B zabírá 4 mm, korálek tvaru C zabírá 3 mm.

Kolik korálků potřebuje Andělka k výrobě náhrdelníku dlouhého alespoň 50 cm?

(L. Dedková)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Maruška měla jednu korunu, dvě dvoukoruny, pět pětikorun, deset desetikorun a dvacet dvacetikorun. Jakou částku v mincích měla?

[Měla $1 + 4 + 25 + 100 + 400 = 530$ korun.]

N2. Toník měl koruny, dvoukoruny, pětikoruny a desetikoruny, od každého druhu alespoň jeden kus. V korunách měl stejnou částku jako v desetikorunách a ve dvoukorunách měl stejnou částku jako v pětikorunách. Kolik nejméně měl Toník mincí?

[Nejméně měl 10 korun, 1 desetikorunu, 5 dvoukorun a 2 pětikoruny, tj. 18 mincí.]

N3. Miloš měl několik korun, pět dvoukorun, několik pětikorun a sedm desetikorun v celkové hodnotě 93 Kč. Kolik nejméně měl Miloš mincí?

[Koruny a pětikoruny měly celkovou hodnotu $93 - 10 - 70 = 13$ Kč. Tedy měl nejméně 3 koruny a 2 pětikoruny, celkem nejméně $3 + 5 + 2 + 7 = 17$ mincí.]

D1. Dana měla 2 jablka, 3 hrušky a 4 nektarinky. Ema měla od každého z těchto druhů ovoce dvakrát tolik, co Dana. Fína měla hrušek o jednu víc než jablek a o jednu méně než nektarinek. Celkem děvčata měla 20 nektarinek. Kolik měla dohromady jablek?

[Ema měla 4 jablka, 6 hrušek a 8 nektarinek. Fína měla $20-4-8 = 8$ nektarinek, a tedy $8 - 1 - 1 = 6$ jablek. Dohromady měla děvčata $2 + 4 + 6 = 12$ jablek.]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

Pan Vaflička smaží a prodává koblížky, pan Koblížek peče a prodává vafličky. Oba cukráři mají každý týden otevřeno od pondělí do pátku. Libuška u nich kupuje každé pondělí dvě vafličky a jeden koblížek, každé úterý tři koblížky a jednu vafličku, každou středu čtyři koblížky, každý čtvrtek tři vafličky a každý pátek dva koblížky a dvě vafličky. Pan Koblížek si jednoho dne všiml, že od prvního pondělí tohoto měsíce prodal Libušce celkem 30 vafliček.

Kolik koblížků prodal Libušce za stejné období pan Vaflička? (M. Petrová)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Líba snědla v pondělí 2 bonbóny. Každý následující den až do neděle pak snědla o 1 bonbón víc než předchozí den. Kolik bonbónů snědla za celý týden?

[Snědla $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35$ bonbónů.]

N2. Milan pojídal jablka od pondělí do neděle. Každý den snědl o 1 jablko víc než předchozí den a celkem za týden snědl 49 jablek. Kolik jablek snědl za víkend?

[Kdyby v pondělí snědl 1 jablko, za týden by snědl $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ jablek. Každé jablko v pondělí navíc znamená 7 jablek za týden navíc, tedy 4 jablka v pondělí dají $28 + 3 \cdot 7 = 49$ jablek za celý týden. Za víkend snědl $9 + 10 = 19$ jablek.]

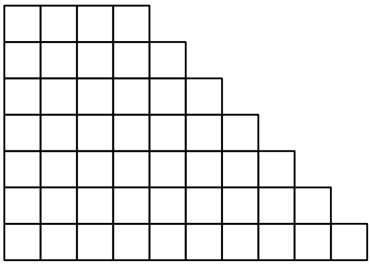
N3. Eva diktovala přirozená čísla od 1 do 100. Petr z diktovaných čísel zapisoval jen násobky tří. Když zapsal jedenáct čísel, převzal zapisování Pavel. Ten z diktovaných čísel zapisoval jen násobky sedmi. Kolik čísel celkem chlapci zapsali?

[Petr zapsal čísla 3, 6, ..., 33, celkem 11 čísel. Pak Pavel zapsal čísla 35, 42, ..., 98, celkem 10 čísel. Dohromady zapsali $11 + 10 = 21$ čísel.]

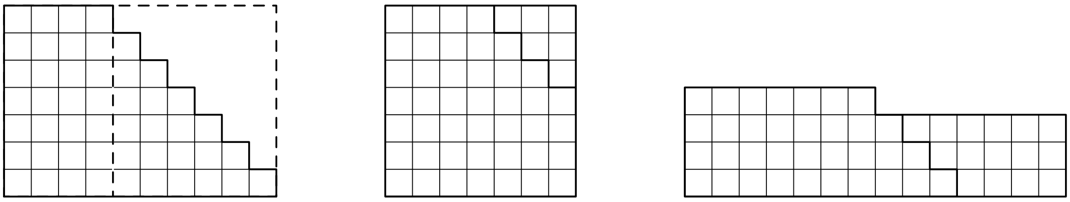
N4. Letos na Nový rok začal Jarda běhat. Každé pondělí a čtvrtek uběhne 4 km, každé úterý a pátek uběhne 5 km, každou středu a sobotu 6 km a každou neděli uběhne 7 km. Jednou po běhání si všiml, že v součtu uběhl přesně 100 km. Kterým dnem v týdnu začal letošní rok?

[Za jeden týden od pondělí do neděle uběhne $4 + 5 + 6 + 4 + 5 + 6 + 7 = 37$ km, za dva týdny uběhne 74 km. Pokud by s běháním začal v pondělí, pak třetí týden v sobotu by překonal 100 km: $74+4+5+6+4+5+6 = 104$. Přesně 100 km vyjde, pouze když s běháním začal v úterý.]

D1. Kolik malých bílých čtverců je na obrázku? Najděte co nejvíce způsobů, jak čtverce spočítat, a zamyslete se nad obecnějším zadáním s více řádky.



[Malých čtverců je 49. Kromě počítání po jednom si lze pomoct vhodnými děleními či úpravami. Např. lze daný útvar rozložit na obdélník 4×7 a trojúhelník, který je polovinou obdélníku 6×7. Nebo přesunem pravého dolního rohu tvořeného 6 malými čtverci se vytvoří čtverec 7×7. Nebo přesunem prvních tří řad dostaneme útvar složený ze 3 řad po 14 čtvercích a jednou řadou poloviční.]

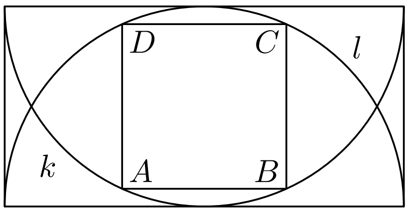


Z6–I–2

V obdélníku se stranami délek 4 cm a 8 cm jsou dány půlkružnice k a l, jejichž krajní body leží ve vrcholech obdélníku.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrcholy A a B ležely na půlkružnici k, vrcholy C a D ležely na půlkružnici l a strany čtverce byly rovnoběžné se stranami obdélníku.

(K. Pazourek)



Návodné a doplňující úlohy

N1. Určete velikost úhlu, který ve čtverci svírají:

a) dvě sousední strany,
b) strana a úhlopříčka,
c) dvě úhlopříčky.

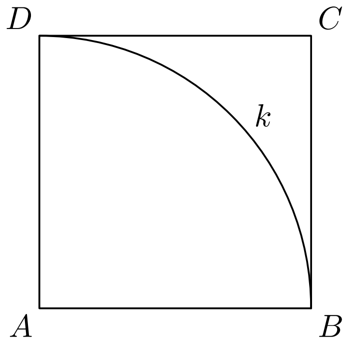
[Z definice a souměrností čtverce plynou odpovědi: a) 90°; b) 45°; c) 90°.]

N2. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) strana AB,
b) úhlopříčka AC,
c) středy protilehlých stran S_{AB} a S_{CD},
d) vrchol A a čtverci opsaná kružnice k.

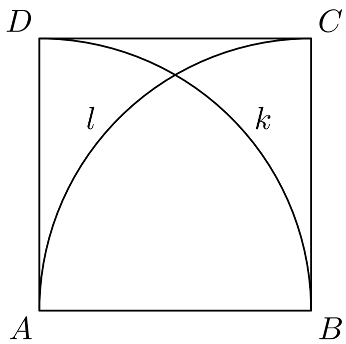
[Konstrukce lze založit na následujících pozorováních: a) Sousední strany leží na kolmicích k AB v jejích krajních bodech. b) Střed úhlopříčky je středem čtverce, úhlopříčky jsou navzájem kolmé. c) Úsečka $S_{AB}S_{CD}$ je shodná se stranami čtverce, ke dvěma stranám je kolmá, se dvěma je rovnoběžná, její střed je středem čtverce. d) Úhlopříčky čtverce jsou průměry kružnice k, střed kružnice je středem čtverce.]

N3. Na obrázku je čtverec $ABCD$ a čtvrtkružnice k se středem A a krajními body B a D. Sestrojte čtverec $AKLM$ tak, aby $K \in AB$, $L \in k$, $M \in AD$.



[Vrchol L leží na úhlopříčce AC, strany čtverce $AKLM$ buď leží na stranách čtverce $ABCD$, nebo jsou s nimi rovnoběžné.]

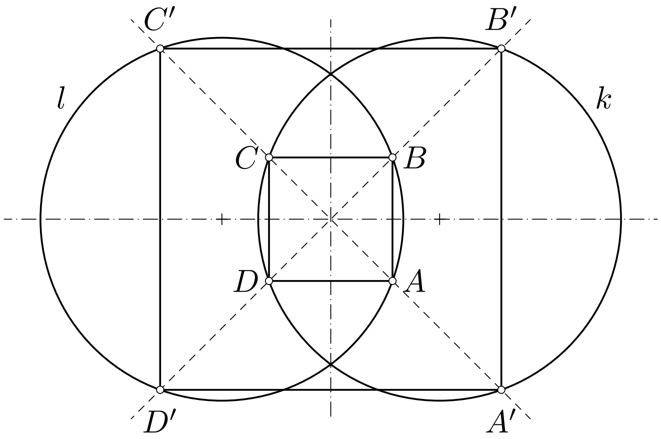
D1. Na obrázku je čtverec $ABCD$ a dvě čtvrtkružnice k, l se středy a krajními body ve vrcholech čtverce. Sestrojte čtverec $KLMN$ tak, aby $KL \subset AB$, $M \in k$, $N \in l$.



[Obrázek je souměrný podle osy úsečky AB. Středy úseček AB a KL splývají a stejně tak jejich spojnice s vrcholy C a M, resp. D a N.]

D2. Jsou dány kružnice k a l, které mají stejné poloměry a navzájem se protínají. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ takové, že $A, B \in k$ a $C, D \in l$.

[Vše je souměrné podle spojnice středů kružnic, tzv. *středné*. Střed čtverce je středem středné, úhlopříčky čtverce svírají se střednou úhel 45°. Úloha má dvě řešení.]



Z6–I–3

Pětimístným palindromem myslíme takové pětimístné číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě desetitisíců a na místě desítek stejnou číslici jako na místě tisíců.

Najděte nejmenší pětimístný palindrom dělitelný 36. *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. U následujících čísel určete, zda jsou dělitelná dvěma, třemi, čtyřmi, šesti, devíti, dvanácti, osmnácti nebo třiceti šesti:

48, 54, 60, 72, 108.

[Číslo 48 je dělitelné všemi uvedenými čísly kromě 9, 18, 36. Číslo 54 je dělitelné všemi kromě 4, 12, 36. Číslo 60 je dělitelné všemi kromě 9, 18, 36. Čísla 72 a 108 jsou dělitelná všemi bez výjimky.]

N2. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

a) Když je číslo dělitelné dvěma a osmnácti, pak je dělitelné třiceti šesti.
b) Když je číslo dělitelné třemi a dvanácti, pak je dělitelné třiceti šesti.
c) Když je číslo dělitelné čtyřmi a devíti, pak je dělitelné třiceti šesti.

[Ve všech třech případech je 36 součinem uvedených činitelů, avšak aby tvrzení platilo, musí být dělitelé nesoudělní. Platí tedy pouze tvrzení c). Nejmenší protipříklady k tvrzením a), resp. b) jsou 18, resp. 12.]

N3. Kolik existuje čtyřmístných palindromů dělitelných čtyřmi?

[Poslední dvojčíslí po prohození číslic určuje první dvojčíslí. Poslední dvojčíslí musí být dělitelné čtyřmi a první nesmí začínat nulou. Hledaných palindromů je tolik, kolik je dvojčíslí dělitelných čtyřmi a nekončících nulou, a těch je dvacet: 04, 08, 12, 16; 24, 28, 32, 36; 44, 48, 52, 56; 64, 68, 72, 76; 84, 88, 92, 96.]

N4. Kolik existuje trojmístných palindromů dělitelných devíti a větších než 300?

[První a poslední číslice jsou stejné, součet číslic musí být dělitelný devíti. Prostřední číslice je tak určena číslicemi sousedními. Hledaných palindromů je osm: 333, 414, 585, 666, 747, 828, 909, 999.]

D1. Dva dělitele d a e daného čísla n nezveme *sesterskými*, jestliže číslo n dělí součin $d \cdot e$. Kolik dvojic sesterských dělitelů má číslo 24?

[Dělitelé čísla 24 jsou 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 a součin sesterských dělitelů je násobkem 24. Číslo 24 má 16 dvojic sesterských dělitelů: $(1,24)$; $(2,12)$, $(2,24)$; $(3,8)$, $(3,24)$; $(4,6)$, $(4,12)$, $(4,24)$; $(6,8)$, $(6,12)$, $(6,24)$; $(8,12)$, $(8,24)$; $(12,12)$, $(12,24)$; $(24,24)$.]

Z6–I–4

Šárka s Lubošem společně zasadili 70 tulipánů různých barev. Šárka nesázela žluté tulipány a pět devítin těch, které zasadila, byly červené. Luboš nesázel červené tulipány a dvě sedmnáctiny těch, které zasadil, byly žluté.

Kolik zasazených tulipánů mělo jinou barvu než červenou či žlutou? *(L. Hozová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Mach řekl Maxovi: „Dnes jsme společně zasadili 20 stromů.“

Max na to: „A já jsem jich zasadil přesně třetinu.“

Mohli mít oba chlapci pravdu?

[Nemohli, neboť číslo 20 není dělitelné třemi.]

N2. Polovina jablek v košíku bylo červených, dvě třetiny jablek v košíku bylo červivých. Kolik nejméně jablek bylo v košíku?

[Počet jablek byl násobkem dvou a tří. V košíku bylo nejméně 6 jablek.]

N3. Selma měla o tři rubíny méně než Telma. Telma měla třikrát méně rubínů než Velma. Kolik mohly mít Selma, Telma a Velma dohromady rubínů, jestliže jich bylo méně než 30?

[Počet rubínů Velmy byl násobkem tří, Telma měla alespoň 3 rubíny. Velma, Telma a Selma měly po řadě nejméně 9, 3 a 0 rubínů, tedy celkem 12. Další možnosti jsou $12 + 4 + 1 = 17$, $15+5+2 = 22$, $18+6+3 = 27$. Dohromady mohly mít 12, 17, 22, nebo 27 rubínů.]

N4. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení, v nepravdivých případech navrhněte nápravu:

a) Když Ola sní čtvrtinu jablek z košíku a Iva sní polovinu jablek z téhož košíku, pak v košíku zbudou tři osminy jablek.

b) Když si Ola vezme polovinu rubínů z trezoru a Iva si vezme čtvrtinu zbylých rubínů, pak v trezoru zbude čtvrtina rubínů.

c) Když si Ola vybere čtvrtinu filmů z nabídky kina a Iva si vybere čtvrtinu filmů z téže nabídky, pak si dohromady vyberou polovinu filmů.

[První dvě tvrzení pravdivá nejsou, u třetího nelze bez dalších informací rozhodnout. Možné nápravy, resp. upřesnění jsou: a) Když Ola sní čtvrtinu jablek z košíku a Iva sní polovinu jablek z téhož košíku, pak v košíku zbude čtvrtina jablek. b) Když si Ola vezme polovinu rubínů z trezoru a Iva si vezme polovinu zbylých rubínů, pak v trezoru zbude čtvrtina rubínů. c) Když si Ola vybere čtvrtinu filmů z nabídky kina, Iva si vybere čtvrtinu filmů z téže nabídky a žádný film není v obou výběrech současně, pak si dohromady vyberou polovinu filmů z nabídky kina.]

D1. Selka přinesla na trh vejce. Prvnímu zákazníkovi prodala polovinu všech a jedno vejce, druhému zákazníkovi prodala polovinu zbytku a jedno vejce, třetímu zákazníkovi prodala polovinu nového zbytku a jedno vejce a zůstalo jí ještě 10 vajec. Kolik jich přinesla na trh?

[Snadno se dořeší odzadu: Selce zůstalo 10 vajec, před tím měla 22 vajec (třetímu zákazníkovi jich prodala 12), před tím měla 46 vajec (druhému jich prodala 24), na trh přinesla 94 vajec (prvnímu jich prodala 48).*]

Z6–I–5

Tři kamarádky se po letech sešly a sdělovaly si, kde která z nich bydlí:

První: „Já bydlím v Hradci Králové."
Druhá: „Já nebydlím v Opavě."
Třetí druhé: „Ty nebydlíš ani v Jihlavě."

Kamarádky opravdu bydlí ve zmiňovaných městech, každá v jiném. Jedna z kamarádek neřekla ostatním pravdu a nebyla to ta z Opavy.

Rozhodněte, kde která z kamarádek bydlí. *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Dlouhý, Široký a Bystrozraký dostali tři mince: zlatou, stříbrnou a bronzovou. Kolika způsoby si je mohli rozdělit, aby každý měl jednu? Všechny možnosti přehledně vypište.

[Všechna možná rozdělení lze zapsat např. takto: (z, s, b), (s, z, b), (s, b, z), (b, s, z), (b, z, s), (z, b, s). Celkem je 6 možností.]

N2. Petr a Pavel měli dohromady tři ananasy. Žádný ananas nedělili na části.

Petr řekl: „Já mám stejně ananasů jako ty."

Pavel řekl: „Já nemám víc ananasů než ty."

Kolik ananasů mohl mít každý z kluků, jestliže:

a) lhal právě jeden z nich,
b) lhali oba kluci?

[Petr jistě lhal (tři ananasy nelze bez dělení na části rozdat tak, jak tvrdil). a) Pavel nelhal, tedy mohli mít buď Pavel žádný ananas a Petr tři, nebo Pavel jeden a Petr dva.

* Převzato z publikace M. Volfová, *Metody řešení matematických úloh*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2000.

b) Pavel lhal, tedy mohli mít buď Petr žádný ananas a Pavel tři, nebo Petr jeden a Pavel dva.]

N3. Každý Marťan je buď lhář, nebo poctivec. Lháři vždy lžou, kdežto poctivci vždy mluví pravdu. Dva Marťané se sešli v kráteru a jeden řekl:

„Já jsem lhář a ty jsi poctivec."

Co byli tito Marťané zač?

[Ten, který mluvil, byl lhář (poctivec by o sobě nepravdivě tvrdil, že je lhář). Protože lhal (a sám byl lhář), druhý Marťan musel být také lhář (jinak by lhářův výrok byl pravdivý). Oba Marťané byli lháři.*]

N4. Sešli se tři Merkuřané, z nichž každý byl buď lhář, nebo poctivec. Lháři vždy lžou, poctivci vždy mluví pravdu.

První Merkuřan řekl: „Každý z nás tří je lhář."

Druhý Merkuřan řekl: „Právě jeden z nás tří je poctivec."

Kdo z této trojice byl lhář a kdo poctivec?

[První Merkuřan byl lhář (poctivec by o sobě nepravdivě tvrdil, že je lhář) a mezi zbylými Merkuřany byl alespoň jeden poctivec (jinak by lhářův výrok byl pravdivý). Druhý Merkuřan byl poctivec a třetí lhář (kdyby byl druhý lhář, musel by být třetí poctivec a lhářův výrok by byl pravdivý).*]

D1. Máme tři krabice s víky:

První víko je označeno ČČ a v krabici jsou dvě černé koule.

Druhé víko je označeno BB a v krabici jsou dvě bílé koule.

Třetí víko je označeno ČB a v krabici je černá a bílá koule.

Víka byla zpřeházela tak, že žádné nepopisuje správně obsah krabice. Máme za úkol jedno víko nadzvednout, vzít poslepu jednu kouli z krabice, podívat se na ni a podle ní určit barvy koulí ve všech krabicích. Jak to lze provést?

[Je třeba vzít kouli zpod víka označeného ČB, kde musí být dvě stejnobarevné koule. Pokud je tato koule bílá, je i druhá koule v této krabici bílá, pod víkem ČČ je černá a bílá koule, pod víkem BB jsou dvě černé koule. Pokud je tato koule černá, je i druhá koule v této krabici černá, pod víkem ČČ jsou dvě bílé koule, pod víkem BB je černá a bílá koule.*]

Z6–I–6

Ve čtvercové síti bydlí tři kruhy a tři trojúhelníky, každý v jiném poli. Každý tvar má alespoň jednoho souseda, přičemž sousedé obývají pole se společnou stranou. Obydlená pole tvoří souvislou oblast, tedy od každého ke každému se lze dostat přes sousedy. Každou noc se každý tvar může změnit podle toho, jak přes den vypadali jeho sousedé:

- *pokud je tvar kruhem a mezi jeho sousedy bylo víc trojúhelníků než kruhů, tak se tvar změní na trojúhelník,*

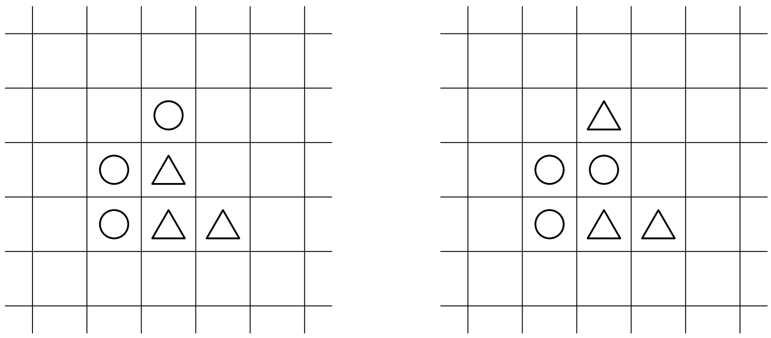
* Úlohy N3, N4 a D1 jsou upraveny podle publikace M. Volfová, *Metody řešení matematických úloh*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2000. Úlohy lze řešit také tak, že se postupně pro všechny možné situace kontrolují dané okolnosti. Např. v úloze N3 rozlišujeme čtyři možnosti podle toho, zda první a druhý Marťan je poctivec nebo lhář, ale pouze v jednom případě dává pronesený výrok smysl.

- *pokud je tvar trojúhelníkem a mezi jeho sousedy bylo víc kruhů než trojúhelníků, tak se tvar změní na kruh,*
- *v ostatních případech se tvar nezmění.*

Příklad obydlené čtvercové sítě a proměny po jedné noci je na obrázku níže.

a) *Rozmístěte tvary tak, aby se v noci neměnily.*
b) *Rozmístěte tvary tak, aby se každý tvar každou noc změnil.*
c) *Rozmístěte tvary tak, aby po několika nocích byly všechny tvary stejné.*

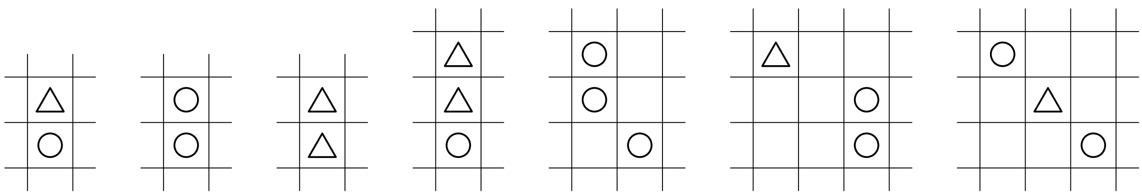
(I. Jančigová)



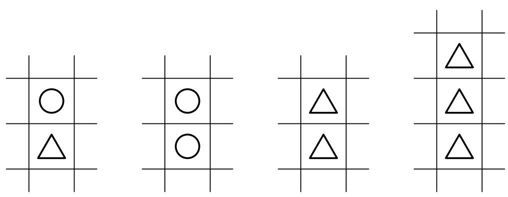
Návodné a doplňující úlohy

V následujících úlohách se *vesnicemi* rozumí souvislé skupiny trojúhelníků nebo koleček jako v soutěžní úloze, avšak s libovolnými počty tvarů.

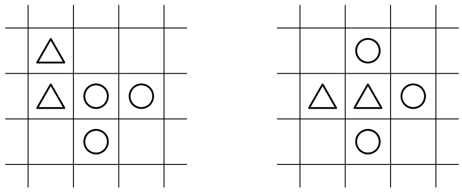
N1. Mohou vesnice vypadat následovně? Pokud ano, jak budou vypadat další den?



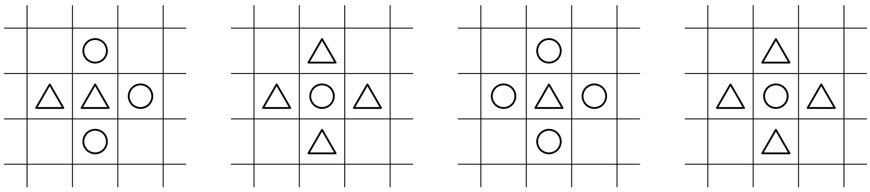
[Vesnice, tedy skupiny vyhovující všem uvedeným pravidlům, jsou první čtyři. Jejich podoba následující den je uvedena na obrázku níže.]



N2. Pro následující dvě vesnice určete, jak budou vypadat v příštích třech dnech:



[Podoba první vesnice se nemění. Druhá vesnice se mění jako na obrázku níže.]

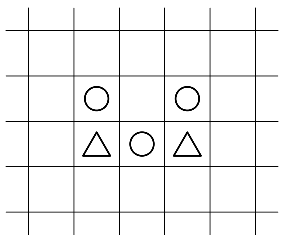


N3. Kolik sousedů musí být trojúhelníků, aby se kruh v noci

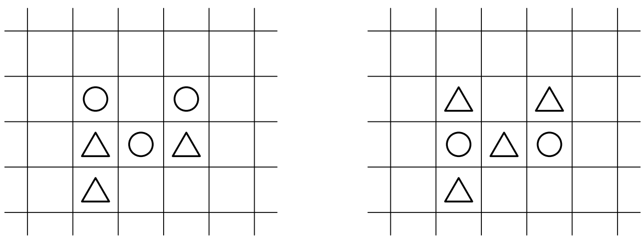
a) jistě stal trojúhelníkem,
b) mohl stát trojúhelníkem?

[a) Každý může mít až čtyři sousedy a v takovém případě tři z nich musí být trojúhelníky.
b) Jeden trojúhelník stačí, pokud víc sousedů není.]

N4. Do následující vesnice doplňte jeden trojúhelník tak, aby další den převažovaly trojúhelníky. Najděte alespoň jedno řešení.



[Možné doplnění a podoba vesnice další den je uvedena níže.]



Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Andulka a Zuzana pojídaly švestky. První den snědla Andulka tři čtvrtiny toho, co týž den snědla Zuzana. Druhý den snědla Zuzana tři poloviny toho, co týž den snědla Andulka. Dohromady za oba dny snědly 31 švestek a každé děvče každý den snědlo celý počet švestek.

Kolik švestek snědla za oba dny Andulka? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Tonda se účastnil běžeckého závodu, v němž startovalo 15 závodníků. Po vyhlášení výsledků zjistil, že jeho startovní číslo je třemi polovinami čísla určujícího jeho pořadí v závodě. Kolikátý mohl Tonda doběhnout? Určete všechny možnosti.

[Startovní číslo bylo násobkem tří, tj. 3, 6, 9, 12, nebo 15. Tonda mohl doběhnout na 2., 4., 6., 8., nebo 10. místě.]

N2. Pejsek a kočička o víkendu zavařovali meruňky. V sobotu pejsek zavařoval o čtvrt hodiny déle než kočička. V neděli kočička zavařovala o šestinu času déle než pejsek. Za celý víkend zavařovala kočička o pět minut déle než pejsek. Jak dlouho v neděli zavařoval pejsek?

[Šestina pejskova nedělního času byla $15 + 5 = 20$ minut. Pejsek v neděli zavařoval 2 hodiny.]

N3. Patrik si dovezl z prázdnin od babičky košík švestek. V úterý snědl o čtvrtinu více švestek než v pondělí, ve středu dvě třetiny toho co v úterý, ve čtvrtek o 8 švestek méně než ve středu a v pátek pětkrát tolik co ve čtvrtek, což bylo stejně jako ve středu. Kolik švestek dohromady snědl?

[Aby souhlasily počty ve středu a v pátek, musel ve čtvrtek sníst 2 švestky ($2+8 = 5\cdot 2$). Tedy ve středu a v pátek snědl 10 švestek, v úterý 15 a v pondělí 12. Patrik snědl dohromady 49 švestek.]

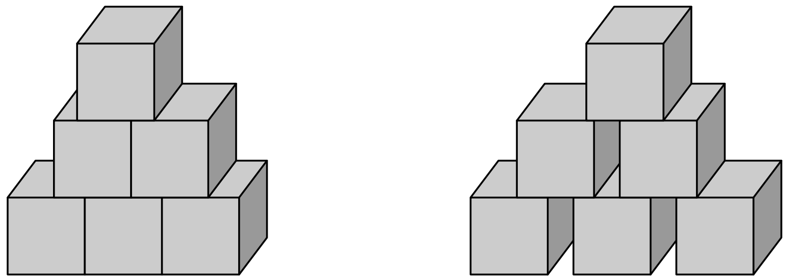
N4. Marta a Nikola vyráběly během letních prázdnin náramky pro kamarádky. Marta v srpnu vyrobila o tři čtvrtiny náramků více než v červenci. Nikola v srpnu vyrobila o třetinu náramků méně než v červenci. Kolik náramků mohly dohromady během prázdnin vyrobit? Určete dvě nejmenší hodnoty.

[Nejmenší počty náramků, které mohla děvčata vyrobit jsou: Marta v červenci 4 a v srpnu 7, Nikola v červenci 3 a v srpnu 2, tedy dohromady 16 kusů. Druhý nejmenší počet náramků je 32.]

Z7–I–2

Mikuláš postavil pyramidu ze šesti stejných krychlí s hranami délky 7 cm. Spodní patro tvořily tři krychle, prostřední patro dvě krychle a horní patro jedna krychle. Sousední krychle v každém patře měly společnou stěnu, patra navzájem nepřečnívala. Vítězslav posunul krychle tak, že každá krychle v horních dvou patrech stála na dvou spodnějších krychlích *a mezi sousedními krychlemi ve spodních dvou patrech byly mezery široké třetinu hrany krychle. Až na tyto mezery patra navzájem nepřečnívala.*

O kolik cm^2 se liší povrchy původní a upravené pyramidy? *(V. Dedek)*

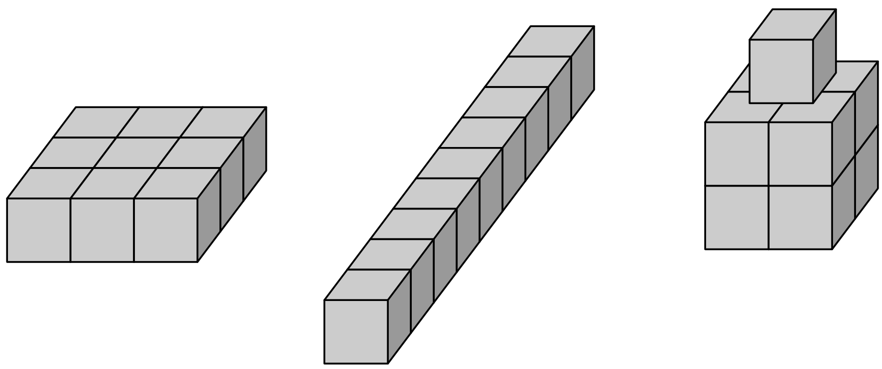


Návodné a doplňující úlohy

N1. Stavba ze shodných krychlí musí splňovat, že každá z krychlí se dotýká alespoň jedné jiné krychle a že dotýkající se krychle mají společnou celou stěnu. Najděte způsob, jak z devíti krychlí s hranami délky 1 cm vytvořit stavbu, která má povrch:

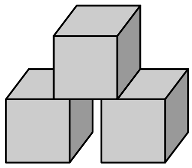
a) $30\,\text{cm}^2$,
b) $38\,\text{cm}^2$,
c) $28\,\text{cm}^2$.

[Každá stěna má obsah $1\,\text{cm}^2$, devět samostatných krychlí má celkový povrch $6 \cdot 9 = 54\,\text{cm}^2$. Rozdíl od povrchu stavby odpovídá dvojnásobku dotýkajících se stěn. Možné stavby vyhovující a), b) a c) jsou na obrázku níže.]

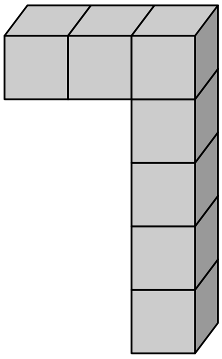


N2. Jonáš si hraje se třemi krychlemi s hranami délky 4 cm. Chce z nich postavit stavbu, která bude mít co největší povrch a přitom se každá z krychlí dotýká alespoň jedné další krychle nejméně čtvrtinou jedné své stěny. Jak může výsledná stavba vypadat a jaký bude mít povrch?

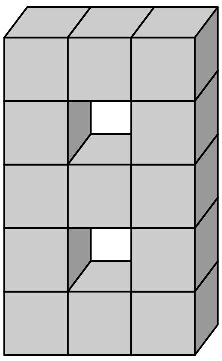
[Aby stavba měla maximální povrch, musí být dotyk stěn co nejmenší, tedy právě čtvrtinou stěny. V takovém případě je povrch stavby o jednu stěnu menší než součet povrchů tří samostatných kostek, tj. $3 \cdot 6 \cdot 16 - 16 = 272\,\text{cm}^2$. Možná podoba stavby je na obrázku.]



N3. Anička vytvořila bráškovi k sedmým narozeninám přání ze sedmi shodných krychlí ve tvaru číslice sedm. Sousední krychle k sobě slepila celými stěnami, výsledný útvar nalepila na karton a dostupné stěny krychlí nabarvila na modro. Bráškovi se přání líbilo, a tak Anička zvažovala, že mu obdobné vytvoří i za rok, k čemuž bude potřebovat o šest krychlí více než nyní. O kolik více stěn bude muset nabarvit?



[Příští rok bude skládat číslici 8, viz obrázek. Nové krychle se dotýkají starých ve třech stěnách. Na jedné nové krychli bude barvit 2 stěny, na ostatních po 3 stěnách. Počet stěn, které bude Anička barvit navíc, je $17 - 3 = 14$.]



D1. Řešte soutěžní úlohu pro pyramidy s jinými počty kostek a pater (např. pro 10 kostek ve 4 patrech či 15 kostek v 5 patrech).

[Vyplatí se rozlišovat přírůstky na svislých a vodorovných stěnách. Pro pyramidu z 10 kostek se povrch zvětší o 16 stěn, tj. o $784\,\mathrm{cm}^2$. Pro pyramidu z 15 kostek se povrch zvětší o 26 a $\frac{2}{3}$ stěn, tedy přibližně o $1306{,}7\mathrm{cm}^2$.]

Z7–I–3

Pankrác, Servác a Bonifác se ubytovali v hotelu. Čísla pokojů byla trojmístná a číslice na místě stovek určovala patro, na kterém se pokoj nacházel. U snídaně si podle přívěsků na klíčích od pokojů všimli, že:

- *v číslech jejich pokojů jsou použity všechny číslice od 1 do 9,*
- *Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, Servácovo číslo je dělitelné osmi, Bonifácovo číslo je dělitelné sedmi,*
- *Bonifácovo číslo je čtyřikrát větší než Pankrácovo číslo,*
- *Servác bydlí na patře mezi Pankrácem a Bonifácem.*

Určete čísla pokojů Pankráce, Serváce a Bonifáce. *(L. Hozová, E. Novotná)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte všechna dvojmístná čísla, která po vynásobení šesti dávají dvojmístný výsledek, přičemž původní číslo a výsledek tvoří čtyři různé číslice.

[Dvojmístná čísla s dvojmístným výsledkem po násobení šesti jsou čísla od 10 do 16. Všem podmínkám ze zadání vyhovují jedině čísla 13 ($13 \cdot 6 = 78$) a 15 ($15 \cdot 6 = 90$).]

N2. Najděte všechna trojmístná čísla, která po vynásobení osmi dávají trojmístný výsledek, přičemž původní číslo a výsledek tvoří šest různých číslic.

[Trojmístná čísla s trojmístným výsledkem po násobení osmi jsou čísla od 100 do 124. Pouze deset z těchto čísel je tvořeno různými číslicemi. Všem podmínkám ze zadání vyhovují jedině čísla 103, 104, 107, 109 a 123.]

N3. Jirka si nemohl vzpomenout na kód k zámku od kola. Věděl jen, že jeho kód je čtyřmístný, číslice v kódu jsou uspořádány sestupně a celý kód je dělitelný 25. Určete všechny možné kódy, které by měl Jirka vyzkoušet.

[Dělitelnost 25 určuje poslední dvojčíslí, z nichž sestupné číslice má jedině 75 a 50. Možné Jirkovy kódy jsou 9875, 9850, 9750, 9650, 8750, 8650, 7650.]

D1. Julča, Klára a Maruška šly do bazénu. Čísla jejich skříněk splňovala:

- všechna tři čísla byla dvojmístná,
- žádná číslice se v těchto číslech neopakovala,
- Julčino a Klářino číslo byla prvočísla,
- Maruščino číslo bylo trojnásobkem Julčina čísla,
- Klářino číslo bylo větší než Julčino a menší než Maruščino číslo.

Jaká mohla být čísla skříněk? Určete všechny možnosti.

[Dvojmístná prvočísla, jejichž trojnásobek je dvojmístným číslem, jsou 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Pouze čísla 19, 23, 29 jsou spolu se svými trojnásobky tvořena různými číslicemi. V těchto mezích hledáme prvočísla, jež jsou spolu s ostatními dvěma čísly tvořena různými číslicemi. Možné trojice čísel Julči, Kláry a Marušky jsou: $(19, 23, 57)$, $(19, 43, 57)$; $(23, 41, 69)$, $(23, 47, 69)$; $(29, 31, 87)$, $(29, 41, 87)$, $(29, 43, 87)$, $(29, 53, 87)$, $(29, 61, 87)$.]

Z7–I–4

V jedné z pěti nádob očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 je mince. Doprovodné nápisy oznamují:

„Mince je v nádobě s lichým číslem.“
„Mince je v nádobě s číslem větším než 3.“
„Mince je v nádobě s číslem menším než 4.“

Pravdomluvný hlídač s bezchybným úsudkem dodává:

„Jeden z nápisů není pravdivý, zbylé dva pravdivé jsou. Přestože vím, který nápis pravdivý není, neumím určit, ve které nádobě je mince.“

Rozhodněte, který z nápisů není pravdivý. *(K. Pazourek)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V tajemné hale jsou modré, zelené a červené dveře. Pouze dvoje z těchto dveří vedou ven, za třetími se skrývá hladový tygr. Na dveřích jsou následující nápisy:

Modré: „Tygr není za těmito dveřmi.“

Zelené: „Tygr není za modrými dveřmi.“

Červené: „Tygr není za těmito dveřmi.“

Strážný chtěl být nápomocný a po pravdě prozradil, že dva nápisy jsou pravdivé a jeden je nepravdivý. Za kterými dveřmi se skrývá tygr?

[Nápisy na modrých a zelených dveřích jsou buď oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. Dva ze tří nápisů jsou pravdivé (modré a zelené dveře) a jeden nepravdivý (červené dveře). Tygr je za červenými dveřmi.]

N2. Jarce bylo více než 10 a méně než 15 let. Když se jí někdo zeptal na její věk, odpovídala v hádankách. Jednou řekla: „Můj věk je dělitelný třemi, není prvočíselný a není sudý.“ Jedna z těchto informací nebyla pravdivá, zbylé dvě byly pravdivé. Kolik let bylo Jarce?

[Mezi čísly 11, 12, 13, 14 má jedině číslo 12 dvě ze tří uvedených vlastností (ostatní mají jednu). Jarce bylo 12 let.]

N3. V osadě žili mafiáni a normální lidé. Mafiáni měli ve zvyku vždy lhát, normální lidé vždy mluvili pravdu. Při návštěvě této osady potkal turista tři místní, Adama, Bořka a Cyrila. Zeptal se Adama, zda je mafián, ale ten jen něco zabrblal pod vousy, nebylo mu vůbec rozumět. Bořek řekl: „Adam povídal, že je mafián“. Na to Cyril dodal: „Bořkovi se nedá věřit, vždyť je to sám mafián!“ Je Adam mafián, nebo není?

[Nikdo o sobě neřekne, že je mafián (pravdomluvný by lhal, lhář by mluvil pravdu). Tedy Bořek lhal a Cyril mluvil pravdu. O Adamovi nelze z uvedeného rozhodnout.]

D1. V kouzelné zahradě žije Alenka spolu se psem, kočkou a kozou. Jednou Alenka upekla dort, dala ho na zahradu vychladnout, ale když se vrátila, byl dort snězen. Alenka začala situaci vyšetřovat a každé ze zvířat jí řeklo své:

Pes: „Já jsem jediným pánem celé zahrady a dort jsem nesnědl.“

Kočka: „Já jsem jediným pánem celé zahrady a pes dort nesnědl.“

Koza: „Já jsem dort nesnědla, snědl ho pes.“

Alenka věděla, že každé ze zvířat mělo alespoň částečně pravdu. Kdo tedy snědl dort?

[Kdyby dort snědla koza, pak by obě části jejího tvrzení byly nepravdivé. Kdyby dort snědl pes, pak by obě části buď jeho, nebo koččina tvrzení byly nepravdivé. Dort snědla kočka (současně byla jediným pánem zahrady a všichni měli alespoň částečně pravdu).]

Z7–I–5

Je dán trojúhelník ABC s délkami stran $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$. Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně AC a která se dotýká stran AB a BC. *(K. Pazourek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Sestrojte kružnici opsanou a kružnici vepsanou čtverci se stranou délky $5\,\mathrm{cm}$.

[Středy obou kružnic splývají se středem čtverce. Kružnice opsaná je určena libovolným vrcholem čtverce, kružnice vepsaná středem libovolné strany.]

N2. K trojúhelníku ze zadání soutěžní úlohy sestrojte kružnici opsanou a kružnici vepsanou.

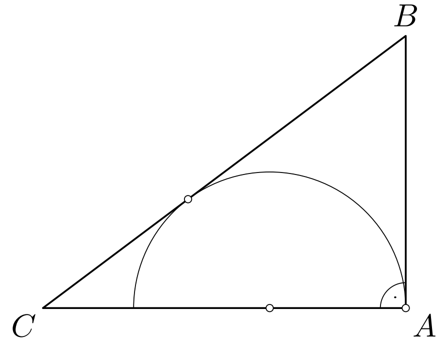
[Kružnice opsaná má střed v průsečíku os stran trojúhelníku, její poloměr je určen libovolným vrcholem. Kružnice vepsaná má střed v průsečíku os úhlů trojúhelníku, její poloměr je určen patou kolmice z tohoto bodu na libovolnou stranu.]

N3. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně AC a která se dotýká stran AB a BC.

[Střed půlkružnice je středem strany AB, její poloměr je určen patou kolmice z tohoto bodu na stranu AC či BC.]

D1. V trojúhelníku ABC se stranami $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 10\,\mathrm{cm}$ se má sestrojit půlkružnice, jejíž krajní body jsou vnitřními body strany AC a která se dotýká zbylých dvou stran. Udejte příklady trojúhelníků ABC, po než úloha nemá řešení.

[Příkladem může být trojúhelník s třetí stranou $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$. Trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A, což by byl krajní a současně dotykový bod půlkružnice, viz obrázek. Protože tento bod není vnitřním bodem strany AC, nejedná se o vyhovující řešení. Úloha nemá řešení také pro $|AC| < 8\,\mathrm{cm}$, tj. pro trojúhelníky s tupým úhlem u vrcholu A.]



Z7–I–6

Káťa a Škubánek smaží každý na své pánvičce jednu palačinku za druhou. Oba začali smažit současně, Kátě trvá každá palačinka tři minuty, Škubánkovi trvá každá palačinka čtyři minuty. Každých pět minut od začátku smažení se objeví mlsný kocour Luciáš. Pokud se Káťa i Škubánek věnují smažení, tak jim jednu hotovou palačinku ukradne, pokud zrovna přendávají palačinku z pánvičky na talíř, tak se schová a palačinky nechá být.

Kolik palačinek musí Káťa se Škubánkem usmažit, aby jim zbylo 150? Jak dlouho jim to bude trvat? *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Při výletu na jezeře Jindra pravidelně střídal veslování s odpočinkem. Vždy 2 minuty vesloval, přičemž uplul 60 metrů, a následně minutu odpočíval, přičemž ho vítr vrátil o 4 metry zpět. Za jak dlouho takto dovesloval na konec jezera vzdálený 225 metrů?

[Popsaným způsobem za 3 minuty urazí 56 m, tedy za 9 minut urazí 168 m. Do 225 m chybí 57 m, a tuto vzdálenost dovesluje za 114 vteřin. Na konec jezera se Jindra dostane za 10 minut a 54 vteřin.]

N2. Ája koupila pytel granulí pro své dva pejsky, Šteflíka a Špagetku. Granule dává pejskům do stejných misek a zakoupený pytel vystačí na 50 takových misek. Šteflík sní 3 misky granulí za dva dny, Špagetka sní 4 misky za tři dny. Jak dlouho jim granule vydrží?

[Za šest dní sní dohromady $9 + 8 = 17$ misek granulí, tedy za 18 dní sní 51 misek. Na jeden vychází $\frac{17}{6} \doteq 2{,}8$ misky, tedy balení vystačí na 17 dnů.]

N3. Uvažte zadání soutěžní bez Škubánka, tedy jen Káťa smaží a Luciáš krade. Kolik palačinek musí Káťa usmažit, aby jich zbylo 20, a jak dlouho jí to bude trvat?

[Za 15 minut Káťa usmaží 5 palačinek, z nichž 2 ukradne Luciáš. Za 90 minut usmaží 30 palačinek, Luciáš jich ukradne 12, zbude 18. Za dalších 9 minut usmaží 3 palačinky, Luciáš ukradne 1 a bude jich mít celkem 20. Káťa musí usmažit 33 palačinek, bude jí to trvat 99 minut.]

D1. Na stadionu běhají Andrea, Bětka a Cilka. Andrea je nejrychlejší a jeden okruh uběhne za 3 minuty, Bětce jeden okruh trvá 4 minuty a Cilce 5 minut. David dívky vyfotil při startu a pak pokaždé, když se na startovní čáře potkaly všechny tři. Pokaždé, když se na startovní čáře potkaly dvě z dívek, vyfotil si je Emil. Kolik okruhů uběhla Bětka ve chvíli, kdy chlapci dohromady nafotili 12 fotografií?

[Emil fotil Andreu a Bětku každých 12 minut, Andreu a Cilku každých 15 minut, Bětku a Cilku každých 20 minut, David fotil děvčata každých 60 minut. Za 60 minut pořídili dohromady 11 fotografií, dvanáct jich měli za 72 minut. Za tu dobu Bětka oběhla 18 okruhů.]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Ivan, Jarek, Kája a Luboš mají dohromady 90 známek. Kdyby měl Ivan o dvě známky méně, Jarek o dvě více, Kája dvojnásobek a Luboš polovinu toho, co nyní, měli by všichni stejně.

Kolik známek má každý z chlapců? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Alice, Božena a Daniela sbírají mušle, dohromady jich mají 34. Kdyby měla Alice o dvě méně, Božena o tři více a Daniela o třetinu méně toho, co nyní, měly by všechny stejně. Kolik mušlí má každá z dívek?

[Vzhledem k počtu mušlí, které by měly, kdyby měly stejně, lze dopočítat nynější stavy a ověřit součet 34. Vyhovující řešení odpovídá počtu 10: Alice má 12, Božena 7 a Daniela 15 mušlí.]

N2. Při oslavě 39. narozenin paní Záhadové se jí kamarádka zeptala na věk jejích tří dětí. Paní Záhadová odpověděla: „Když sečtu věk nejstaršího s polovinou věku nejmladšího a čtvrtinou věku prostředního, dostanu třetinu věku svého.“ Kolik let mohlo být jejím dětem? Uveďte všechny možnosti.

[Věk nejmladšího dítěte byl sudý, věk prostředního byl násobkem čtyř a popsaný součet byl 13. Možné věky dětí byly 2, 4, 11, nebo 2, 8, 10, nebo 4, 8, 9 let.]

N3. Sourozenci Adam a Eva chodí na základní školu, Adam je o dva roky mladší než Eva. Když k trojnásobku Evina věku přičetli 5 a výsledek vydělili věkem Adama, vyšlo jim stejné číslo jako počet babiččiných koček. Kolik koček měla babička?

[Počet babiččiných koček lze po úpravě vyjádřit jako $3 + \frac{11}{A}$, kde A značí věk Adama. Aby tento výsledek byl celočíselný a současně Adam mohl chodit na základní školu, musí být $A = 11$. Babička měla 4 kočky.]

D1. Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček. Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda?

[Řešení je vhodné provádět od konce, kdy měli všichni po 25 kuličkách. Před posledními výměnami měl Jarda 39, Přemek 18 a Robin 18 kuliček. Před prvními výměnami měl Jarda 12, Přemek 27 a Robin 36 kuliček. Jarda měl po hře 12 kuliček.*]

* Převzato ze 73. ročníku MO, úloha **Z6–I–1**.

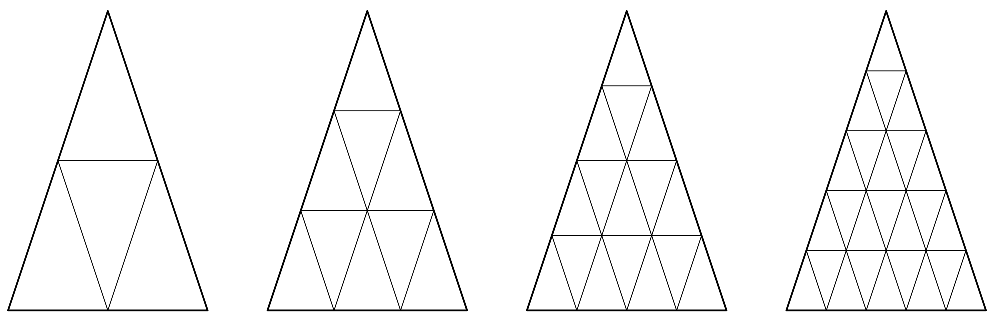
Z8–I–2

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 12 cm a výškou k základně velikosti 18 cm. Rozdělte trojúhelník na tři lichoběžníky o stejném obsahu. *(L. Dedková)*

Návodné a doplňující úlohy

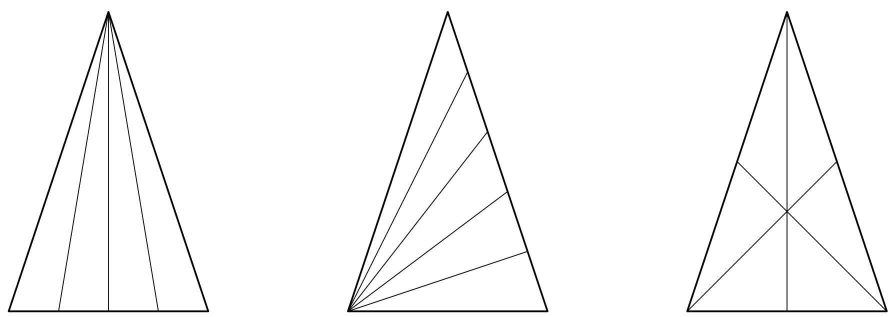
N1. Trojúhelník ze soutěžní úlohy rozdělte na čtyři shodné trojúhelníky. Zobecněte svoje řešení pro jiné počty trojúhelníků.

[Střední příčky rozdělují obecný trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Příčky protínající strany trojúhelníku ve třetinách, čtvrtinách, pětinách atd. jej rozdělují na 9, 16, 25 atd. shodných trojúhelníků.]



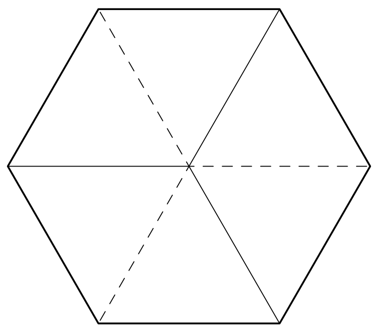
N2. Trojúhelník ze soutěžní úlohy rozdělte na čtyři trojúhelníky, které nejsou shodné, ale mají shodný obsah. Zobecněte svoje řešení pro jiné počty trojúhelníků.

[Rozdělením jakékoli strany na n stejných částí a spojením nově vzniklých bodů s protilehlým vrcholem trojúhelníku získáme dělení na n trojúhelníků se stejnými obsahy. Možností je však více, viz např. dělení na šest částí pomocí těžnic na posledním obrázku níže.]

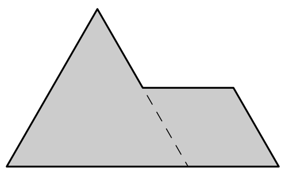


N3. Rozdělte pravidelný šestiúhelník na tři shodné kosočtverce.

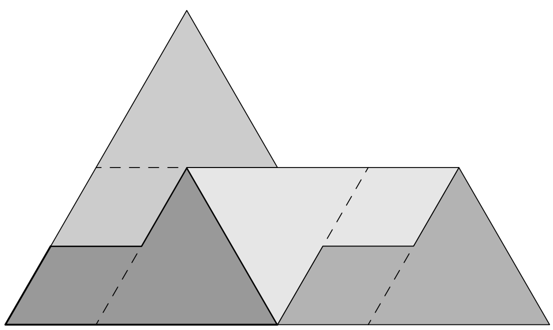
[Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků; každé dva sousední tvoří kosočtverec.]



D1. Klára měla čtyři shodné dílky z tvrdého papíru, které jí připomínaly sfingu. Každý dílek byl slepen z rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 6 cm a kosočtverce se stranou délky 3 cm. Klára tyto čtyři dílky přikládala k sobě, až se jí povedlo složit podobný, ovšem větší tvar sfingy. Nakreslete, jak to mohla udělat. (Dílky se nepřekrývaly, nebyly nijak ohnuté, avšak mohly být překlopené spodní stěnou nahoru.)



[Strana kosočtverce je poloviční vzhledem ke straně trojúhelníku. Vnitřní úhly trojúhelníku jsou 60°, vnitřní úhly kosočtverce jsou 60° a 120°. Klára mohla dílky složit jako na obrázku níže.]



Z8–I–3

Pro čísla a, b, c, d platí:

- *číslo a dává po dělení třemi zbytek 1,*
- *číslo b dává po dělení šesti zbytek 2,*
- $a - b = d - c$,
- *číslo d je dělitelné třemi.*

Jaký zbytek po dělení devíti může dávat číslo c? Najděte všechny možnosti.

(E. Semerádová)

N1. Najděte všechna přirozená čísla menší než 30, která po dělení třemi dávají zbytek 2. Jaké zbytky dávají tato čísla po dělení šesti? A jaké po dělení devíti?

[Jedná se o čísla 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29. Po dělení šesti se pravidelně opakují zbytky 2, 5. Po dělení devíti se pravidelně opakují zbytky 2, 5, 8.]

N2. Jsou dána čísla $a = 2024$ a $b = 111$. Jaké zbytky po dělení třemi, čtyřmi a pěti dávají čísla a, b, jejich součet $a + b$ a rozdíl $a - b$?

[Čísla a, b, $a+b$, $a-b$ dávají postupně po dělení třemi zbytky 2, 0, 2, 2, po dělení čtyřmi zbytky 0, 3, 3, 1 a po dělení pěti zbytky 4, 1, 0, 3. K určení zbytků není nutné vyčíslovat $a + b$ a $a - b$, stačí znát zbytky pro a a b.]

N3. Moje oblíbené číslo je součtem čísla, které po dělení čtyřmi dává zbytek 1, a čísla, které po dělení osmi dává zbytek 3. Jaké zbytky mohou vyjít po dělení mého oblíbeného čísla osmi?

[Po dělení osmi dává první číslo zbytek 1, nebo 5, druhé číslo dává zbytek 3. Součet těchto čísel dává po dělení osmi zbytek 4, nebo 0.]

D1. Najděte všechna dvojmístná čísla, která jsou dělitelná čtyřmi, po dělení šesti dávají zbytek 2 a po dělení pěti dávají zbytek 3.

[Dvojmístných čísel, která po dělení šesti dávají zbytek 2, je patnáct: 14, 20, 26, ..., 86, 92, 98. Mezi těmito čísly je sedm dělitelných čtyřmi: 20, 32, 44, 56, 68, 80, 92. Mezi těmito čísly jedině 68 dává po dělení pěti zbytek 3.]

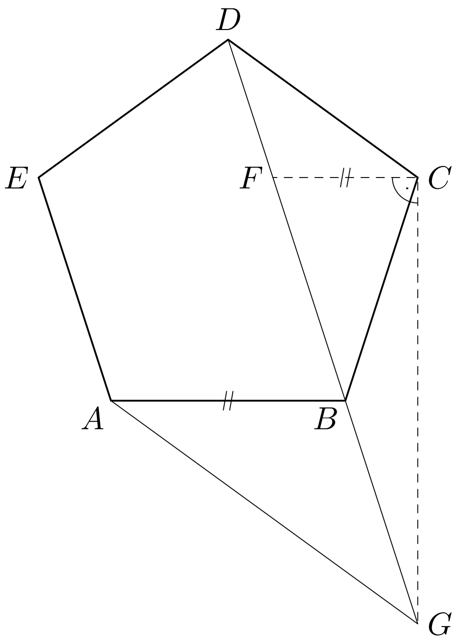
D2. Jaký zbytek po dělení třemi dává součet prvních 2024 přirozených čísel?

[Součet každé trojice po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi. Poslední úplná trojice mezi čísly od 1 do 2024 končí číslem 2022 (to je nejbližší menší číslo dělitelné třemi). Čísla 2023 a 2024 dávají po dělení třemi zbytky 1 a 2, tedy jejich součet je dělitelný třemi. Hledaný součet je dělitelný třemi.]

Z8–I–4

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem C protíná přímku BD v bodě F. Kolmice k přímce CF procházející bodem C protíná přímku BD v bodě G.

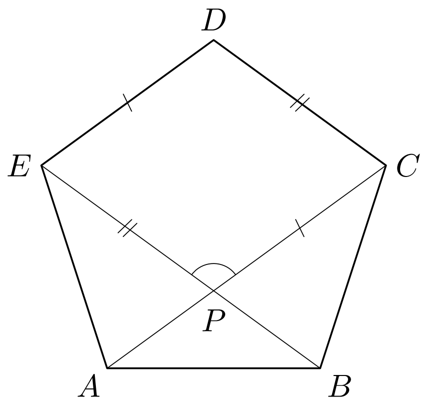
Určete velikost úhlu AGF. *(P. Bak)*



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

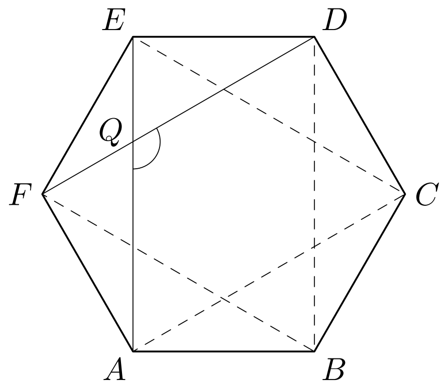
N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je bod P průsečíkem přímek AC a BE. Určete velikost úhlu EPC.

[Čtyřúhelník $EPCD$ je kosočtvercem. Úhel EPC je shodný s úhlem CDE, což je vnitřní úhel pětiúhelníku. Velikost úhlu EPC je $108°$.]



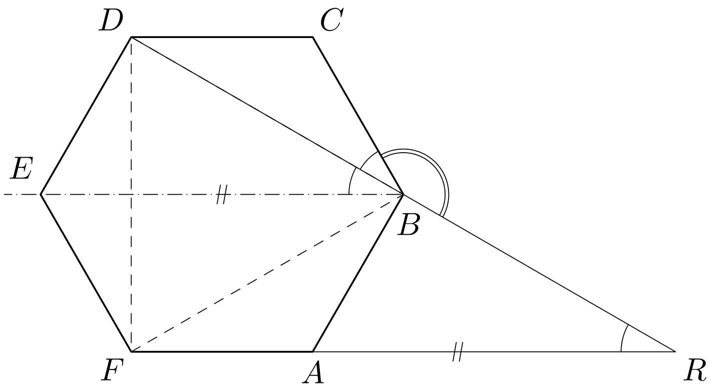
N2. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod Q průsečíkem přímek FD a AE. Určete velikost úhlu AQD.

[Úhlopříčky FD, AE a další čtyři shodné úhlopříčky vymezují pravidelný šestiúhelník uvnitř daného šestiúhelníku. Úhel AQD je vnitřním úhlem tohoto šestiúhelníku, jeho velikost je $120°$.]



N3. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod R průsečíkem přímek FA a BD. Určete velikosti úhlů ARB a RBC.

[Přímka EB je osou souměrnosti jak daného šestiúhelníku, tak vepsaného rovnostranného trojúhelníku FBD. Proto platí $|\sphericalangle EBC| = 60°$ a $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle CBD| = 30°$. Přímky FA a EB jsou rovnoběžné, tedy (souhlasné) úhly ARB a EBD jsou shodné. Velikost úhlu ARB je 30°. Úhly RBC a CBD jsou sousední (jejich součtem je přímý úhel). Velikost úhlu RBC je 150°.]



D1. V pravidelném 180-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_{180}$ je bod V průsečíkem přímek A_1A_3 a A_2A_4. Určete velikosti úhlů $A_1A_3A_2$ a A_1VA_4.

[Středový úhel pravidelného 180-úhelníku je 1°, vrcholový úhel je 178°. Trojúhelník $A_1A_2A_3$ je rovnoramenný a $|\sphericalangle A_1A_2A_3| = 178°$, tedy $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = 1°$. Všechny úhlopříčky shodné s A_1A_3 a A_2A_4 vymezují pravidelný 180-úhelník a úhel A_1VA_4 je jeho vnitřním úhlem. Tedy $|\sphericalangle A_1VA_4| = 178°$.]

Z8–I–5

Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75. Součet čísel a a b je větší než 100 a menší než 200.

Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi. (E. Semerádová)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Určete všechny dvojice jednomístných čísel, které mají jednomístný nejmenší společný násobek.

[Číslo 1 může být ve dvojici s jakýmkoli jednomístným číslem: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,7)$, $(1,8)$, $(1,9)$. Každé číslo může být ve dvojici s každým svým jednomístným násobkem: $(2,2)$, $(2,4)$, $(2,6)$, $(2,8)$, $(3,3)$, $(3,6)$, $(3,9)$, $(4,4)$, $(4,8)$, $(5,5)$, $(6,6)$, $(7,7)$, $(8,8)$, $(9,9)$. Dále vyhovuje už jen dvojice $(2,3)$.]

N2. Určete všechny dvojice čísel, pro které je součin jejich nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele roven 75.

[Prvočíselný rozklad čísla 75 je $3\cdot5\cdot5$. Odtud dostáváme možnosti $(1,75)$, $(3,25)$, $(5,15)$.]

N3. Pro čísla $a = 60$, $b = 48$ určete jejich největší společný dělitel D, nejmenší společný násobek N a ověřte, že platí $a\cdot b = D\cdot N$. Rozhodněte, zda obdobný vztah platí pro libovolná čísla a, b.

[Čísla jsou tvaru $a = A\cdot D$ a $b = B\cdot D$, kde A a B jsou nesoudělná čísla. S tímto značením je $N = A\cdot B\cdot D$, tedy rovnost $a\cdot b = D\cdot N$ platí pro všechna přirozená čísla a a b.]

N4. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 6. Součet čísel a a b je menší než 20. Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi.

[Vyhovující nesoudělné dvojice jsou $(1,6)$ a $(2,3)$, vyhovující soudělné dvojice jsou $(2,12)$, $(4,6)$ a $(6,9)$.]

D1. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele navzájem různých čísel a, b a c je 30. Součet každých dvou čísel z této trojice je větší než 10 a menší než 30. Určete všechny možné trojice čísel a, b, c s uvedenými vlastnostmi.

[Prvočíselný rozklad čísla 30 je $2\cdot3\cdot5$. Jedině tito činitelé mohou být zastoupeni v prvočíselných rozkladech čísel a, b, c, a to nejvýše ve druhé mocnině pro 2 a 3, resp. v první mocnině pro 5 (aby součet každých dvou čísel byl menší než 30). Vyhovující řešení, až na pořadí čísel ve trojici, jsou $(1,10,15)$, $(2,10,15)$, $(3,10,15)$, $(5,6,10)$, $(5,6,15)$, $(6,10,15)$, $(2,10,12)$, $(4,10,12)$, $(6,10,12)$, $(6,9,15)$.]

Z8–I–6

Rybář Štika chytil několik ryb. Když prodal tři nejtlustší ryby majiteli místní restaurace, snížil celkovou hmotnost svého úlovku o 35 %. Když dal tři nejhubenější ryby svému psovi, snížil hmotnost zbývajících ulovených ryb o pět třináctin.

Kolik ryb chytil pan Štika? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Rybář Kapr choval ve svém rybníku cejny. Na jaře přikoupil polovinu množství cejnů, které v rybníku měl, a k tomu dostal 20 cejnů od majitele vedlejšího rybníku. Na podzim po výlovu zůstalo v rybníce 182 cejnů, což bylo o 30 procent cejnů méně než po jarním navýšení chovu. Kolik cejnů měl pan Kapr na začátku?

[Po jarním navýšení chovu bylo v rybníce 260 cejnů, před darem majitele vedlejšího rybníku jich bylo 240, na začátku měl pan Kapr 160 cejnů.]

N2. Štika prohání a pojídá ryby v rybníce. V úterý a ve středu snědla o čtvrtinu více ryb než předchozí den, ve čtvrtek a v pátek snědla o 20 % více ryb než předchozí den a v pátek snědla 36 ryb. Kolik ryb snědla štika v pondělí? Který den měla snědeno právě polovinu všech ryb, které spořádala od pondělí do pátku?

[Ve čtvrtek štika snědla 30 ryb, ve středu 25, v úterý 20 a v pondělí 16. Celkem snědla 127 ryb, polovinu měla snědeno během čtvrtka.]

N3. Rybář Cejn ulovil 15 ryb a vzal je všechny na trh. Každá z těchto ryb vážila alespoň 500 gramů, ale žádná nevážila více než 3 kilogramy. Během dne si lidé kupovali velké ryby a večer šel rybář domů s nejmenšími kousky ze svého úlovku. Dohromady neprodané ryby vážily pětinu toho, co ranní úlovek. Kolik nejméně a kolik nejvíce ryb pan Cejn prodal?

[Pokud by všechny ryby vážily stejně, pak by neprodané ryby byly tři ($3 = 15/5$). Pokud by všechny prodané ryby vážily 3 kg a všechny neprodané 1/2 kg, pak by neprodaných bylo devět ($9/2 = (9/2 + 6 \cdot 3)/5$). Pan Cejn prodal nejvíce 12 a nejméně 6 ryb.]

D1. Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem. První třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady. Pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řáděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici?

[Rozdíl mezi nejdražší a nejlevnější lahví je 60 Kč. Rozdíl celkových škod závisí na tom, ve které třetině řady kocour se svým řáděním skončil: a) Pokud skončil v první třetině, pak rozdíl škod odpovídá počtu shozených lahví. Těch bylo 25, ale $25 \cdot 60 \neq 660$. V této třetině tedy kocour neskončil. b) Pokud skončil ve druhé třetině, pak rozdíl škod odpovídá třetině všech lahví. To dělá $660/60 = 11$ lahví, celkem $3 \cdot 11 = 33$ lahví. Shozených však bylo 25, což je víc než dvě třetiny všech. V této třetině tedy kocour neskončil. c) Pokud skončil v poslední třetině, pak rozdíl škod odpovídá počtu nedotčených lahví. To dělá $660/60 = 11$ lahví, celkem $11 + 25 = 36$ lahví. To je vyhovující možnost. Na polici původně bylo 36 lahví.*]

* Převzato z 59. ročníku MO, úloha **Z7–I–1**.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y$ je 16. *(P. Bak)*

Návodné a doplňující úlohy

V řešeních lze s výhodou použít následující charakterizaci dělitelnosti přirozených čísel: Číslo d dělí číslo a, právě když pro nějaké přirozené číslo k platí $a = k \cdot d$.

N1. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, d platí:

a) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také součet $a + b$ a rozdíl $a - b$.
b) Jestliže číslo d dělí obě čísla a, b, pak d dělí také číslo $11a + 13b$.

[Ve všech případech lze dělitele d z uvedených vyjádření vytknout, tedy d tato čísla dělí: Podle předpokladu platí $a = k \cdot d$ a $b = l \cdot d$ pro nějaká čísla k a l, tedy $a + b = (k + l) \cdot d$, $a - b = (k - l) \cdot d$ a $11a + 13b = (11k + 13l) \cdot d$.]

N2. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:
Pokud a a $2a + 3b$ jsou čísla dělitelná pěti, pak také číslo b je dělitelné pěti.

[Pokud 5 dělí čísla a a $2a + 3b$, pak 5 dělí také číslo $3b$: Podle předpokladu platí $a = 5k$ a $2a + 3b = 5l$ pro nějaká čísla k a l, tedy $3b = 5l - 2a = 5(l - 2k)$. Protože 3 a 5 jsou nesoudělná čísla, musí být b dělitelné pěti. Uvedené tvrzení platí.]

N3. Najděte všechna prvočísla p, pro která platí, že $\frac{p}{2} + 2p$ je prvočíslo.

[Jak p, tak $\frac{p}{2} + 2p$ musí být především celá čísla, tedy i $\frac{p}{2}$ musí být celé. Jediné sudé prvočíslo je 2, tedy $p = 2$ a $\frac{p}{2} + 2p = 5$, což je také prvočíslo. Úloha má jediné řešení $p = 2$.]

D1. Při dělení čísla a číslem 53 dostaneme zbytek 3 a při dělení čísla b číslem 53 dostaneme zbytek 2. Jaký zbytek dostaneme po dělení čísla $4a + 5b$ číslem 53?

[Podle předpokladu platí $a = 53k + 3$ a $b = 53l + 2$ pro nějaká čísla k a l. Odtud dostáváme $4a + 5b = 4(53k + 3) + 5(53l + 2) = 53(4k + 5l) + 22$. Hledaný zbytek je 22.]

D2. Pro obecné přirozené číslo k uvažte součet po sobě jdoucích čísel

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5).$$

Rozhodněte, pro která k je tento součet dělitelný dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, resp. šesti.

[Zápis S navádí k rozdělení do skupin po šesti sčítancích, každou skupinu sečteme a dále upravíme:

$$\begin{aligned} S &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (6k + (6k + 1) + (6k + 2) + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5)) = \\ &= 15 + (36 + 15) + \dots + (36k + 15) = 15(k + 1) + 36(1 + \dots + k). \end{aligned}$$

Z posledního vyjádření vyvozujeme, že S je dělitelné 3 pro libovolné k; S je dělitelné 2, právě když $k+1$ je dělitelné 2, tzn. k je liché; S je dělitelné 6, právě když k je liché; S je dělitelné 4, právě když $k+1$ je dělitelné 4, tzn. k dává po dělení 4 zbytek 3 ($k = 3, 7, 11, \ldots$). Dále S je dělitelné 5, právě když $1 + \cdots + k$ je dělitelné 5, což nastává pro k dělitelné 5 nebo pro k, která po dělení 5 dávají zbytek 4 ($k = 4, 5, 9, 10, \ldots$).

Součet prvních k přirozených čísel lze vyjádřit jako $1 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, což může pomoct při kontrole dělitelnosti 5. Stejné pravidlo použité na součet ze zadání dává $S = \frac{1}{2}(6k+5)(6k+5+1) = 3(6k+5)(k+1)$, což může zkrátit mnohé z předchozích úvah.]

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem $864\,\mathrm{cm}^3$ a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. *(V. Dedek)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu dlouhou $a = 3\,\mathrm{cm}$ a výšku $v = 5\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte objem hranolu a obsah jeho pláště.

[Objem hranolu je $a^2v = 45\,\mathrm{cm}^3$, obsah pláště je $4av = 60\,\mathrm{cm}^2$.]

N2. Určete velikost úhlopříčky obdélníku se stranami délek $4\,\mathrm{cm}$ a $9\,\mathrm{cm}$.

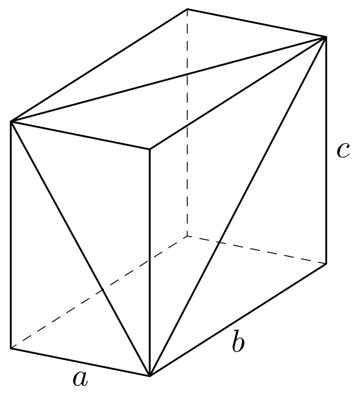
[Podle Pythagorovy věty je délka úhlopříčky $\sqrt{4^2+9^2} = \sqrt{97} \doteq 9{,}85\,\mathrm{cm}$.]

N3. Pravidelný čtyřboký hranol má tělesovou úhlopříčku délky $\sqrt{86}\,\mathrm{cm}$ a výšku $6\,\mathrm{cm}$. Určete objem hranolu.

[Tělesová úhlopříčka, výška a podstavná úhlopříčka tvoří pravoúhlý trojúhelník a stejně tak podstavná úhlopříčka s podstavnými hranami. Dvojím užitím Pythagorovy věty dostáváme $2a^2 = 86 - 6^2$, kde a značí velikost podstavné hrany. Odtud $a = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{cm}$ a objem hranolu je $5^2 \cdot 6 = 150\,\mathrm{cm}^3$.]

D1. Je dán kvádr s hranami délek a, b, c a trojúhelník určený jeho stěnovými úhlopříčkami. Pomocí a, b, c vyjádřete velikosti stran trojúhelníku a výpočtem ukažte, že trojúhelník není pravoúhlý.

[Všechny takové trojúhelníky jsou navzájem shodné, každý má strany délek $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$. Pokud by trojúhelník byl pravoúhlý a např. poslední strana byla přeponou, pak by mělo platit $(a^2+b^2)+(a^2+c^2) = (b^2+c^2)$ neboli $2a^2 = 0$. To však není možné, protože $a > 0$. Obdobně vyloučíme ostatní dva případy.]



D2. Kolik stěnových a kolik tělesových úhlopříček má pravidelný n-boký hranol?

[Z každého z n vrcholů jedné podstavy vede tělesová úhlopříčka do každého z $n-3$ vrcholů druhé podstavy, se kterými neleží ve stejné stěně. Tedy tělesových úhlopříček je $n(n-3) = n^2 - 3n$. Při pohledu shora tělesové úhlopříčky splývají s úhlopříčkami podstav, přičemž za každým průmětem jsou dvě tělesové a dvě podstavné úhlopříčky. Podstavných úhlopříček je proto stejně jako tělesových. V každé z n bočních stěn jsou dvě úhlopříčky, tedy stěnových úhlopříček je celkem $n^2 - 3n + 2n = n^2 - n$.]

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ *sestávající z prvních n přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.*

Najděte největší možné n, pro které to je možné. *(T. Bárta)*

Návodné a doplňující úlohy

Množinou se myslí skupina neopakujících se objektů (čísel, lidí, věcí atd.), kterým se říká *prvky*. Množina je charakterizována právě svými prvky, není podstatné jejich uspořádání či jiná struktura. *Podmnožinou* množiny je libovolná množina obsahující některé (nebo i všechny) prvky dané množiny, ale žádné jiné. *Neprázdná* množina obsahuje alespoň jeden prvek, množina neobsahující žádný prvek se nazývá *prázdná*.

N1. Devítiprvková množina byla rozdělena do šesti neprázdných podmnožin. Kolik nejvíce prvků může mít největší z těchto podmnožin?

[Pět neprázdných podmnožin obsahuje nejméně pět prvků, na šestou množinu zbývají nejvýše čtyři prvky.]

N2. Vypište všechny dvouprvkové množiny tvořené nesoudělnými děliteli čísla 24.

[Dělitelé čísla 24 jsou 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24. Nesoudělné dvojice jsou $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 6\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 12\}$, $\{1, 24\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 8\}$.]

N3. Kolik nejméně množin je potřeba k rozdělení všech dělitelů čísla 100 tak, aby čísla v každé množině byla po dvou nesoudělná?

[Číslo 100 má šest sudých dělitelů a tři liché. Méně než šest množin nestačí, avšak šest stačí: $\{1, 2, 5\}$, $\{4, 25\}$, $\{10\}$, $\{20\}$, $\{50\}$, $\{100\}$.]

N4. Která přirozená čísla mají pouze nesoudělné dvojice dělitelů?

[Pokud má číslo vlastního dělitele různého od 1, pak tento dělitel spolu s daným číslem tvoří dvojici soudělných dělitelů. Čísla s uvedenou vlastností jsou pouze prvočísla.]

D1. Zdůvodněte: Jestliže dané číslo má nějakého sudého dělitele, pak alespoň polovina všech jeho dělitelů je sudých.

[Čísla se sudým dělitelem jsou nutně sudá (neboli lichá čísla mají pouze liché dělitele). Jestliže sudé číslo má lichého dělitele d, pak také číslo $2d$ je jeho dělitelem. Tedy sudých dělitelů je alespoň tolik, co lichých.]

Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. *(T. Bárta)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Jaký může být nejmenší a jaký největší ciferný součet přirozeného čísla, které má a) 2 číslice; b) 3 číslice; c) n číslic?

[Nejmenší ciferný součet je ve všech případech 1 (pro čísla s první číslicí 1 a ostatními 0). Největší ciferný součet je a) 18; b) 27; c) $9n$ (pro čísla tvořená samými 9).]

N2. Přičtěte k číslu 74 jednomístné číslo tak, aby ciferný součet výsledného čísla byl:

a) menší než ciferný součet čísla 74,
b) stejný jako ciferný součet čísla 74?

Najděte všechny možnosti.

[Pokud přičtením nedojde k přechodu přes desítku, ciferný součet se zvětší. Vyhovující možnosti jsou a) 6, 7 nebo 8; b) 9.]

N3. Popište všechna trojmístná čísla, jejichž ciferný součet se po přičtení 1 zmenší. Určete možné rozdíly ciferných součtů.

[Ciferný součet se zmenší pro čísla končící devítkou. Pro čísla tvaru $**9$ (kde $*$ značí číslice různé od 9) se ciferný součet zmenší o 8, pro čísla tvaru $*99$ se ciferný součet zmenší o 17, pro číslo 999 se ciferný součet zmenší o 26.]

D1. Odhalte pravidlo v zápise následujícího příkladu a určete ciferný součet výsledného čísla:

$$(989 + 111) + (98789 + 11211) + (9876789 + 1123211) + \cdots$$
$$\cdots + (98765432101234567 89 + 1123456789876543211).$$

[Součty v závorkách jsou obecně tvaru 1100, 110000, 11000000 atd. (např. třetí závorku můžeme vyjádřit jako $9876789 + 1000000 + 123210 + 1 = 1000000 + 999999 + 1 = 11000000$). Součet prvních dvou závorek je 110000, prvních tří závorek 11111100 atd., tedy jedničky se kumulují a nové číslice se neobjevují. Ve vyjádření součtu prvních n závorek je $2n$ jedniček a dvě nuly. Závorek je celkem 9, tedy ciferný součet výsledného čísla je 18.]

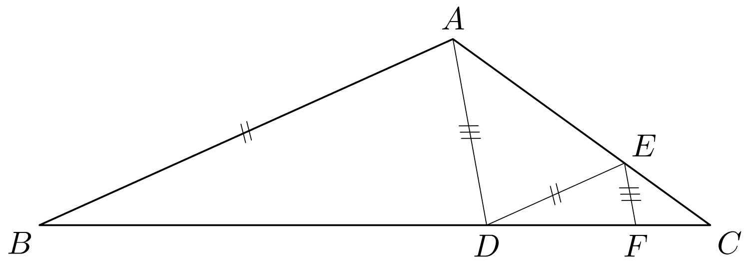
D2. Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1. Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti.

[Největší číslo, které mohla pošeptat Jana Petrovi, bylo $2022 \cdot 9 = 18198$ (pro 2022místné číslo tvořené samými 9). Největší číslo, které mohl pošeptat Petr Zuzce, bylo 36 (pro číslo 9999). Zuzka Adamovi pošeptala dvojmístné číslo s ciferným součtem 1, tj. jedině číslo 10. Petr Zuzce tedy pošeptal číslo menší nebo rovno 36 s ciferným součtem 10, tj. buď 19, nebo 28.*]

Z9–I–5

V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F.

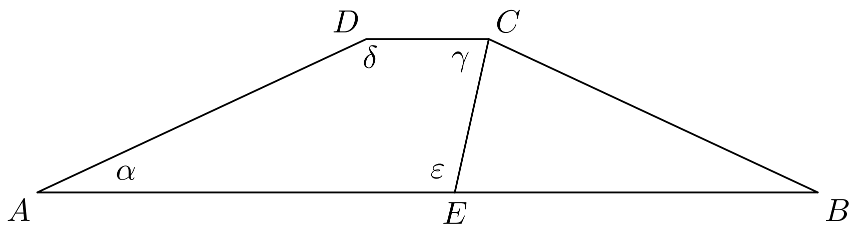
Určete poměr úseček AD a EF. *(M. Dományová)*



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Bod E je průsečíkem strany AB s osou úhlu BCD. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je $25°$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $AECD$.

[Vnitřní úhly u vrcholů čtyřúhelníku $AECD$ označíme odpovídajícími písmeny řecké abecedy. Ze zadání známe $\alpha = 25°$. Z rovnoběžnosti $AB \| CD$ plyne $\delta = 180° - 25° = 155°$. To je také velikost úhlu BCD, tedy $\gamma = 155°/2 = 77{,}5°$. Ze součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku dostáváme $\varepsilon = 360° - \alpha - \delta - \gamma = 102{,}5°$.]

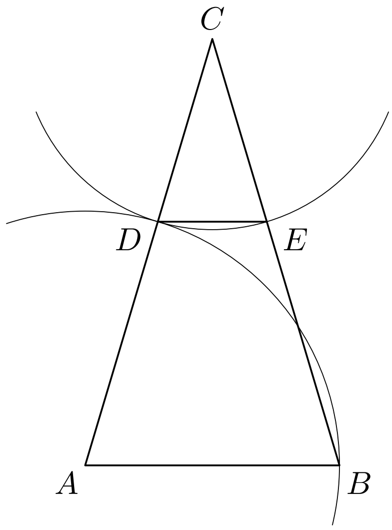


N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, kde $|AB| = 4\,\text{cm}$ a $|AC| = 7\,\text{cm}$. Kružnice se středem A procházející bodem B protíná stranu AC v bodě D.

* Převzato ze 71. ročníku MO, úloha **Z9–I–2**.

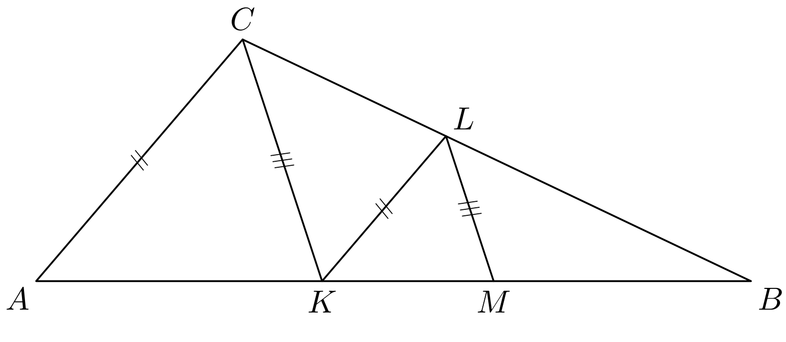
Kružnice se středem C procházející bodem D protíná stranu BC v bodě E. Určete obvod trojúhelníku DEC.

[Body D a E leží na kružnici se středem C, tedy trojúhelník DEC je rovnoramenný se základnou DE. Trojúhelníky DEC a ABC jsou podobné (přesněji stejnolehlé se středem C) a koeficient této podobnosti je $|DC| : |AC| = 3 : 7$ (zde využíváme $|DC| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| = 7 - 4$). Ve stejném poměru jsou také obvody trojúhelníků DEC a ABC. Obvod trojúhelníku ABC je $4 + 2 \cdot 7 = 18\,\text{cm}$, obvod trojúhelníku DEC je $\frac{3}{7} \cdot 18 \doteq 7{,}71\,\text{cm}$.]

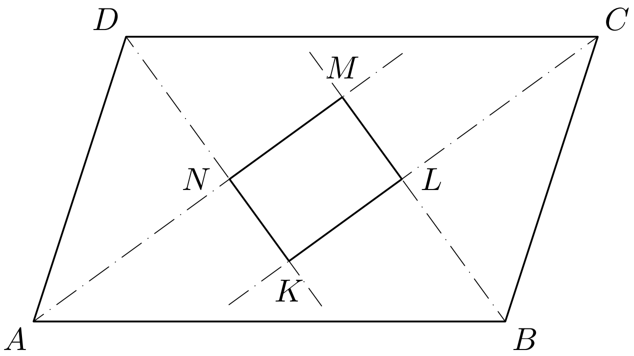


N3. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB body K, M, na straně BC je bod L a platí: $AC \| KL$, $CK \| LM$, $|AC| = 5\,\text{cm}$, $|CK| = 4\,\text{cm}$, $|KL| = 3\,\text{cm}$. Určete délku úsečky LM.

[Díky rovnoběžnostem $AC \| KL$ a $CK \| LM$ mají trojúhelníky AKC a KML shodné vnitřní úhly, tedy jsou podobné. Odpovídající si poměry stran jsou stejné, tedy např. platí $|AC| : |CK| = |KL| : |LM|$. Po dosazení a úpravě dostáváme $|LM| = \frac{12}{5} = 2{,}4\,\text{cm}$.]



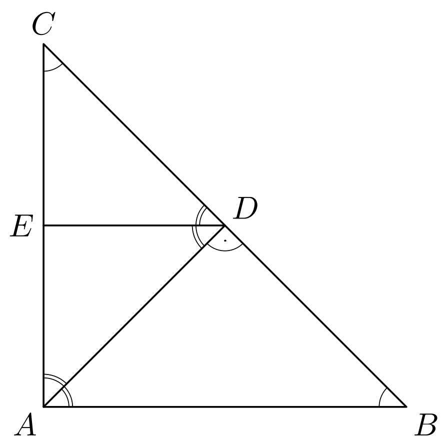
D1. Osy vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ omezují čtyřúhelník $KLMN$. Pomocí vnitřních úhlů kosodélníku $ABCD$ vyjádřete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $KLMN$.



[Vnitřní úhly u vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$ označíme odpovídajícími písmeny řecké abecedy. Protože $ABCD$ je kosodélník, platí např. $\alpha + \beta = 180^\circ$. Protože osy úhlů tyto úhly půlí, platí např. $|\sphericalangle MAB| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle MBA| = \beta/2$. Protože součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABM je 180°, platí $|\sphericalangle AMB| = 180^\circ - \alpha/2 - \beta/2 = 180^\circ - (\alpha+\beta)/2 = 90^\circ$. Protože $KLMN$ je rovnoběžník a jeden jeho vnitřní úhel je pravý, jsou pravé všechny. Jedná se tedy o pravoúhelník, tj. obdélník či čtverec.]

D2. V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě D a osa úhlu ADC protíná stranu AC v bodě E. Dále platí, že trojúhelníky ABD a DCE jsou podobné a strana AB měří 10 cm. Určete obvod trojúhelníku ABC.

[Z podobnosti trojúhelníků ABD a DCE plyne shodnost úhlů ABD a DCE, tedy trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC. Proto je osa AD kolmá k BC neboli úhel CDA je pravý. Z téže podobnosti dále plyne shodnost úhlů BAD a CDE, tedy i jejich dvojnásobků BAC a CDA. Proto je také úhel BAC pravý neboli trojúhelník ABC je pravoúhlý. Velikosti jeho stran jsou $|AC| = |AB| = 10\,\mathrm{cm}$ a (podle Pythagorovy věty) $|BC| = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Hledaný obvod je $10(2+\sqrt{2}) \doteq 34{,}14\,\mathrm{cm}$.]



Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka. Určete a znázorněte délky skoků všech králíků a jejich výsledné pořadí.

[Vzhledem ke skoku Řízka se snadno určí a na přímce znázorní délky skoků ostatních: Pečínka skočila $2730 - 1100 = 1630$ mm, Fašírka skočila $1630 - 150 = 1480$ mm, Guláš skočil $1480 + 200 = 1680$ mm. Výsledné pořadí bylo: 1. Řízek, 2. Guláš, 3. Pečínka, 4. Fašírka.*]

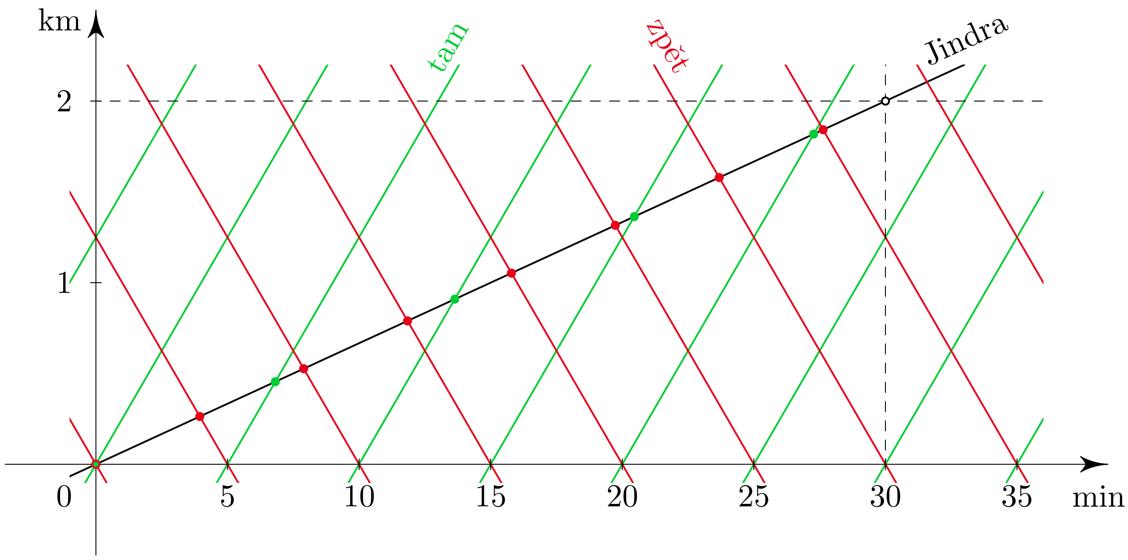
N2. Mohl být bazén ze soutěžní úlohy dlouhý 13 metrů?

[Předpokládejme, že bazén má 13 m a označme t čas prvního míjení plavců. V čase t byli 5 m od Pulcovy startovní strany, přičemž Pulec uplaval 5 m a Pstruh 8 m. V čase $2t$ uplaval Pulec dalších 5 m a Pstruh dalších 8 m, tedy od Pulcovy strany byl Pulec 10 m a Pstruh po obrátce 3 m. V čase $3t$ přidal každý zase svoji vzdálenost a míjeli se 11 m od Pulcovy strany. Podruhé se však měli míjet 5 m od Pulcovy strany, tedy bazén nemohl měřit 13 m.]

N3. Mezi dvěma zastávkami vzdálenými 2 km jezdí trolejbusy každých 5 minut, a to v obou směrech rychlostí 15 km za hodinu. Jindra šel podél trasy trolejbusu rychlostí 4 km za hodinu. Když vycházel od první zastávky, zrovna se zde míjely dva protijedoucí trolejbusy. Kolik trolejbusů Jindra cestou k druhé zastávce potkal?

[Trolejbusy ujedou trasu mezi zastávkami za $\frac{2}{15}$ h $=$ 8 min, Jindra ji ujde za $\frac{2}{4}$ h $=$ $=$ 30 min. Ve směru svého pohybu Jindra potkal všechny trolejbusy, které z první zastávky vyjely nejpozději 22. minutu jeho pohybu na trase, a těch bylo 5 (vyjely v minutách 0, 5, 10, 15, 20). Proti směru svého pohybu potkal všechny trolejbusy, které do první zastávky dojely nejpozději 38. minutu jeho pohybu na trase, a těch bylo 8 (dojely v minutách 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35). Jindra potkal celkem 13 trolejbusů. Názorně je vše zachyceno v následujícím grafu.]

* Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z6–I–1**.



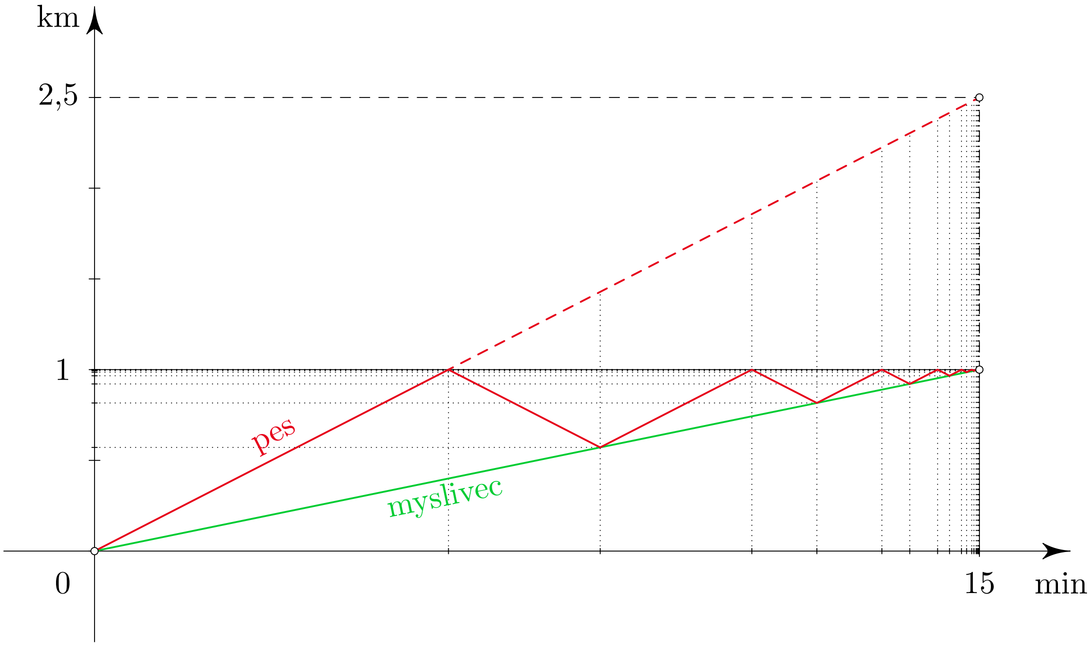
D1. Z města A do města B vyráží současně dodávka a kamion, ve stejnou chvíli proti nim z B do A vyjíždí motorka. Rychlosti dodávky, kamionu a motorky jsou po řadě 90 km/h, 40 km/h a 100 km/h. Vzdálenost měst A a B je 300 km. Za jak dlouho bude dodávka stejně vzdálena od kamionu i motorky?

[Za čas t měřený v hodinách se vozidla nachází ve vzdálenostech $90t$, $40t$, resp. $300 - 100t$ km od města A. Situace ze zadání nastane dvakrát. Poprvé než se potká motorka s dodávkou: rovnost vzdáleností dodávky od kamionu a dodávky od motorky je $90t - 40t = (300 - 100t) - 90t$, odkud vypočteme $t = \frac{5}{4}$ h = 1 h 15 min. Podruhé nastane, když se motorka míjí s kamionem: rovnost vzdáleností kamionu a motorky od města A je $40t = 300 - 100t$, odkud vypočteme $t = \frac{15}{7}$ h $\doteq$ 2 h 9 min.]

D2. Myslivec jde rychlostí 4 km/h. Když je vzdálený 1 km od myslivny, pustí psa, který běhá rychlostí 10 km/h. Pes plný radosti běží k myslivně, u myslivny se hbitě otočí a běží zpět k myslivci. U něj se opět otočí a běží k myslivně, od ní zase k myslivci a tak pořád dokola. Kolik kilometrů pes naběhá, než oba dorazí do myslivny?

[Stačí se zaměřit na čas: Myslivec ujde 1 km k myslivně za $\frac{1}{4}$ h. Stejnou dobu běhal i pes, který tak uběhl $10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ km. Postupné sčítání vzdáleností uběhnutých psem mezi jednotlivými otočkami by vedlo ke geometrické řadě, viz následující schéma.*]

* Klasická úloha upravená podle publikace M. Volfová, *Metody řešení matematických úloh*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2000.



km
2,5
1
pes
myslivec
0
15
min