74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy a^2+b a $a+b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?* (Patrik Bak)

Komentář. Ukážeme, že nejmenší možná společná hodnota zadaných dvou výrazů je rovna $-\frac{1}{4}$. Uvedeme více řešení.

Řešení (sečtením výrazů). Označme S společnou hodnotu obou výrazů. Pak

$$\begin{aligned} 2S &= (a^2+b)+(a+b^2) = \left(a^2+a+\tfrac{1}{4}\right)+\left(b^2+b+\tfrac{1}{4}\right)-\tfrac{1}{2} = \\ &= \left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{2} \geqq -\tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

takže $S \geqq -\frac{1}{4}$. V použitých odhadech nastává rovnost, pokud $a=b=-\frac{1}{2}$. A tehdy skutečně platí, že oba výrazy mají tutéž hodnotu $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Poznámka. Z uvedeného sčítacího postupu dokonce plyne, že pro *libovolná* reálná čísla a, b platí nerovnost

$$\max(a^2+b, b^2+a) \geqq -\tfrac{1}{4},$$

přičemž rovnost nastane v jediném případě, kdy $a=b=-\frac{1}{2}$.

Jiné řešení (odečtením výrazů). Podle zadání pro čísla a, b platí $a^2+b=a+b^2$. Převedením na jednu stranu a další úpravou dostaneme

$$0=(a^2+b)-(a+b^2)=a^2-b^2-(a-b)=(a-b)(a+b-1).$$

Musí tedy nastat (aspoň) jeden z případů $b=a$, $b=1-a$.

- ▷ V prvním případě ($b=a$) mají oba výrazy hodnotu a^2+a. Doplněním na čtverec získáme

  $$a^2+a=a^2+a+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}=\left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}.$$

  Jelikož druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná, minimum nastane pro $b=a=-\frac{1}{2}$ a je rovno $-\frac{1}{4}$.
- ▷ Ve druhém případě dosazením $b=1-a$ do obou výrazů zjistíme, že mají hodnotu $a^2+(1-a)$, což podobně jako v prvním případě upravíme pomocí doplnění na čtverec:

  $$a^2-a+1=a^2-a+\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}=\left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}.$$

  Minimum je v tomto případě $\frac{3}{4}$, což je více než $-\frac{1}{4}$.

Komentář. Místo doplnění na čtverec lze využít známých vlastností kvadratické funkce: Jak víme, v případě kladného koeficientu α funkce $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ nabývá minima pro $x=-\beta/(2\alpha)$ a toto minimum se rovná $-\beta^2/(4\alpha)+\gamma$. Například v prvním případě výše jde o funkci $f(a)=1\cdot a^2+1\cdot a\ +0$, tedy $\alpha=\beta=1$ a $\gamma=0$. Její minimum je proto $-1/4$ a nastává pro $a=-1/2$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro různá reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 - b^2$ a $a - b$ stejnou hodnotu. Dokažte, že hodnota $a + b$ je 1. [Ze zadání $a^2 - b^2 = a - b$, po vydělení nenulovým výrazem $a - b$ dostáváme $a + b = 1$.]

N2. Jaké nejmenší hodnoty může pro reálné číslo a nabývat výraz $a^2 + 3a$? [Upravíme

$$a^2 + 3a = \left(a + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} \geqq -\tfrac{9}{4},$$

nejmenší hodnota je tedy $-\frac{9}{4}$, kterou výraz nabývá pro $a = -\frac{3}{2}$.]

N3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $a^2 + b = c$, $b^2 + c = a$, $c^2 + a = b$. [Po sečtení rovnic dostaneme $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, tedy $a = b = c = 0$. Zkouškou, která je zde nutná, se snadno přesvědčíme, že $a = b = c = 0$ je skutečně i řešením původní soustavy.]

D1. Předpokládejme, že pro reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ mají výrazy $a_1^2 + a_2, a_2^2 + a_3, \ldots, a_{n-1}^2 + a_n$ a $a_n^2 + a_1$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být? [Označme společnou hodnotu S, pak sečtením podobně jako ve vzorovém řešení získáme odhad

$$n \cdot S = (a_1^2 + a_2) + \cdots + (a_n^2 + a_1) = \left(a_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n}{4} \geqq -\frac{n}{4},$$

tedy $S \geqq -\frac{1}{4}$ a rovnost opět nastává pro $a_1 = \cdots = a_n = -\frac{1}{2}$.]

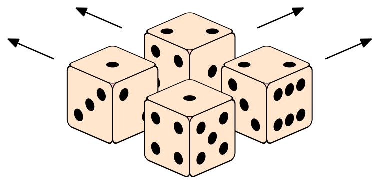
D2. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $a^2(b + c) = b^2(c + a) = c^2(a + b)$. Určete všechny možné hodnoty výrazu $(a + b + c)^2/(a^2 + b^2 + c^2)$. [B–73–S–3]

D3. Pro reálná čísla x a y platí $x^3 + y^3 \leqq 2$. Dokažte, že pak rovněž $x + y \leqq 2$. [B–57–1–3]

D4. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla. Ukažte, že všechna tři čísla a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b nemohou být zároveň druhé mocniny celých čísel. [APMO–2011–P1]

2. *Martin k sobě přikládá hrací kostky (stejné velikostí i rozmístěním čísel) tak, aby byly vyskládané do tvaru čtverce libovolné velikosti a aby vždy na dvou přiléhajících bočních stěnách byla táž čísla. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek?*

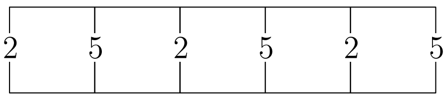
(Martin Panák, Josef Tkadlec)



Řešení. Odpověď: Nejvýše 4 různá čísla.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že kostky jsou očíslované jako na obrázku v zadání, tj. že čísla 1, 2, 3 jsou na sousedních stěnách ve směru chodu hodinových ručiček a že na každých dvou navzájem protějších stěnách jsou čísla se součtem 7.

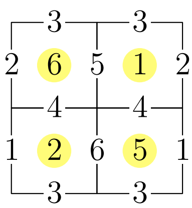
Pro $x \in \{1,2,3\}$ budeme x-*řádkem* nazývat řádek čtverce, jehož první kostka zleva má na levé stěně číslo x nebo $7-x$. Podobně budeme x-*sloupcem* rozumět sloupec čtverce, jehož první kostka zepředu má na přední stěně číslo x nebo $7-x$. Všimněme si, že na stěnách kostek x-řádku, resp. x-sloupce, které jsou kolmé na jeho podélnou osu, se střídají čísla x a $7-x$. Na obrázku je příklad 2-řádku.

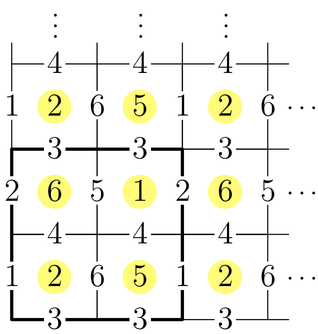


Dále si všimněme, že pokud se v celé sestavě vyskytne nějaký x-řádek, nemůže se v ní vyskytovat žádný x-sloupec, protože kostka v tomto řádku a tomto sloupci by měla dvě stěny s číslem x. Rozebereme teď dva případy:

- ▷ Pokud existuje $x \in \{1,2,3\}$ takové, že všechny řádky jsou x-řádky, pak se na horních stěnách kostek nevyskytují čísla x ani $7-x$, takže jsou tam nejvýše 4 různá čísla.
- ▷ V opačném případě existují různá $y, z \in \{1,2,3\}$ taková, že některý řádek je y-řádek a některý řádek je z-řádek. Žádný sloupec proto není y-sloupec ani z-sloupec, takže všechny sloupce jsou w-sloupce, kde w je takové, že $\{y,z,w\} = \{1,2,3\}$. To znamená, že na horních stěnách kostek se nevyskytují čísla w a $7-w$, takže i v tomto případě jsou tam nejvýše 4 různá čísla.

Zbývá uvést příklad čtverce kostek, v němž se na horních stěnách vyskytují 4 různá čísla. Jeden možný příklad je na obrázku vlevo (podbarvená čísla jsou ta na horních stěnách).





Poznámka. Není obtížné si rozmyslet, že dokonce pro každé $n \geqq 2$ lze n^2 kostek uspořádat do čtverce $n \times n$ tak, aby se na horních stěnách vyskytovala 4 různá čísla. Například lze kostky vyskládat jako na obrázku vpravo tak, aby řádky byly střídavě 1- a 2-řádky s počátečními čísly 1, resp. 2 a všechny sloupce byly 3-sloupce s počátečními čísly 3. Na horních stěnách v lichých řádcích se pak budou střídat čísla 2 a 5 a v sudých řádcích čísla 6 a 1.

Návodné a doplňující úlohy:

V úlohách o skládání kostek předpokládáme, že na k sobě přiléhajících stěnách kostek jsou vždy dvě stejná čísla.

N1. Místo do čtverce skládáme kostky do řady. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek? [Nejvýše 4. V řadě kostek se na přiléhajících stěnách střídají jen dvě čísla, žádné z nich proto nemůže být na horní stěně. Zbylá čtyři čísla na horních stěnách být mohou.]

N2. Kostky skládáme do čtverce (tj. do kvádru tvaru $n \times n \times 1$). Může se na dvou sousedních bočních stěnách čtverce (tj. na sousedních stěnách $n \times 1$ složeného kvádru) objevit číslo 1? [Nemůže. V řadě kostek se na přiléhajících stěnách střídají jen dvě čísla, takže všechny kostky v řadě, která má číslo 1 na boční stěně, budou mít číslo 1 pouze na stěnách s ní rovnoběžných. Pokud by také někde na sousední boční stěně bylo číslo 1, musela by je nějaká kostka mít na dvou svých stěnách, což je vyloučeno.]

D1. Z kostek jsme poskládali krychli $3 \times 3 \times 3$. Určete možné hodnoty součtů všech 54 viditelných čísel za předpokladu, že každá kostka má na protějších stěnách čísla se součtem 7. [Součet je vždy roven $27 \cdot 7 = 189$. Jelikož jsou v každé řadě tři kostky za sebou, viditelná čísla na jejích koncích mají stejně jako na jedné kostce součet 7. Těchto dvojic je 27, proto je odpověď $27 \cdot 7 = 189$. (Krychli skutečně poskládat lze.)]

D2. Čtvercová tabulka 10×10 je vyplněna písmeny A, B, C, D tak, že každá podtabulka 2×2 obsahuje každé ze čtyř písmen jednou. Dokažte, že existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje právě dvě různá písmena. [Ukažte, že pokud jsou v některém řádku aspoň tři různá písmena, pak v něm někde tři různá leží vedle sebe, řekněme v pořadí $\ldots ABC \ldots$ V řádku pod i nad nimi musí být tři písmena $\ldots CDA \ldots$ Zopakováním tohoto argumentu potom vyjde, že v uvedených třech sloupcích (a dokonce ve všech sloupcích) musí být jen dvě různá písmena.]

D3. Určete nejmenší možné n, pro které lze dovnitř krychle $2020 \times 2020 \times 2020$ umístit n kvádrů $2020 \times 1 \times 1$ tak, aby každý kvádr měl stěny rovnoběžné se stěnami krychle, žádné dva kvádry se neprotínaly (dotýkat se mohou) a aby se každá ze čtyř obdélníkových stěn každého kvádru dotýkala buď jiné obdélníkové stěny jiného kvádru nebo některé stěny celé krychle. [USAMO–2020–P2]

3. *Na tabuli jsou napsána navzájem různá přirozená čísla se součtem* 2024. *Každé z nich kromě nejmenšího je násobkem součtu všech menších napsaných čísel. Kolik nejvíce čísel může na tabuli být?* (Patrik Bak)

Řešení. Ukážeme, že na tabuli může být nejvýše 6 čísel.

Označme čísla na tabuli postupně $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ a pro každé $k = 1, \ldots, n$ označme $s_k = a_1 + \ldots + a_k$ součet nejmenších k z nich. Ze zadání víme, že $s_n = 2024$. Navíc pro každé $k = 1, \ldots, n-1$ platí* $s_k \mid a_{k+1}$, a tedy platí i $s_k \mid a_{k+1} + s_k = s_{k+1}$. Posloupnost $(s_1, s_2, \ldots, s_n = 2024)$ je proto posloupností kladných dělitelů čísla 2024, z nichž každý další dělitel je násobkem toho předchozího.

Jelikož pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je číslo s_{k+1} násobkem čísla s_k (a je ostře větší než s_k), musí číslo s_{k+1} ve svém rozkladu na prvočinitele obsahovat alespoň jednoho prvočinitele navíc oproti rozkladu čísla s_k.

Číslo $2024 = 45^2 - 1 = 44 \cdot 46 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ obsahuje ve svém rozkladu 5 prvočinitelů, takže v posloupnosti $s_1, s_2, \ldots$ se může vyskytnout nejpozději na šestém místě. Tento případ $s_6 = 2024$ přitom nastane právě tehdy, pokud součet s_1 nemá žádného prvočinitele, tedy $s_1 = 1$, a pokud každý další součet s_{k+1} má právě o jednoho prvočinitele více než předchozí součet s_k.

Zbývá dokázat, že 6 čísel na tabuli být může. Odpovídající příklad zkonstruujeme pomocí úvah výše. Za posloupnost součtů můžeme vzít například $(s_1, s_2, \ldots, s_6) = (1, 11, 22, 44, 88, 2024)$. Tomu odpovídá posloupnost čísel

$$(a_1, a_2, \ldots, a_6) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots, s_6 - s_5) = (1, 10, 11, 22, 44, 1936),$$

která skutečně vyhovuje zadání.

Poznámka. Existuje celkem osm vyhovujících příkladů šesti čísel

$$\begin{array}{ll} (1,\ 10,\ \ 11,\ \ 22,\ \ 44,\ 1936), & (1,\ 22,\ \ 23,\ \ 46,\ \ 92,\ 1840), \\ (1,\ 10,\ \ 11,\ \ 22,\ 968,\ 1012), & (1,\ 22,\ \ 23,\ \ 46,\ 920,\ 1012), \\ (1,\ 10,\ \ 11,\ 484,\ 506,\ 1012), & (1,\ 22,\ \ 23,\ 460,\ 506,\ 1012), \\ (1,\ 10,\ 242,\ 253,\ 506,\ 1012), & (1,\ 22,\ 230,\ 253,\ 506,\ 1012). \end{array}$$

Tyto šestice vzniknou ze všech výše popsaných posloupností dělitelů

$$s_1 = 1, \quad s_2 \in \{11, 23\}, \quad s_3 \in \{22, 46, 253\}, \quad \ldots, \quad s_6 = 2024,$$

kde (pouze) případy $s_2 = 2$ jsou vyloučeny, neboť obě čísla a_1, a_2 by pak byla rovna 1. (Do levého, resp. pravého sloupce jsme vypsali ty šestice, pro něž $s_2 = 11$, resp. $s_2 = 23$.)

Jiné řešení. Uvedeme další způsob jak dokázat, že čísel může být nejvýše šest.

Jako v prvním řešení označme čísla na tabuli $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Postupujme od menších čísel k větším a násobky zmíněné v textu úlohy vyjadřujme pomocí přirozených čísel $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$.

▷ Ze zadání je a_2 násobkem a_1, platí proto $a_2 = k_1 \cdot a_1$ pro vhodné k_1.

* Jako obvykle zápis $d \mid m$ značí, že číslo d je dělitelem čísla m.

▷ Ze zadání je a_3 násobkem součtu $a_1 + a_2 = a_1 + k_1 a_1 = (1 + k_1)a_1$, platí proto $a_3 = k_2(1 + k_1)a_1$ pro vhodné k_2.

▷ Ze zadání je a_4 násobkem součtu

$$(a_1 + a_2) + a_3 = (1 + k_1)a_1 + k_2(1 + k_1)a_1 = (1 + k_2)(1 + k_1)a_1,$$

platí proto $a_4 = k_3(1 + k_2)(1 + k_1)a_1$ pro vhodné k_3.

Těmito výpočty se postupně dostaneme až k součtu všech n napsaných čísel:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (1 + k_{n-1})(1 + k_{n-2}) \ldots (1 + k_2)(1 + k_1)a_1.$$

Každá z $n - 1$ závorek na pravé straně je celé číslo větší než 1. Zároveň levá strana je ze zadání rovna 2024, což je, jak už víme, číslo s pěti prvočiniteli. Závorek na pravé straně může být proto nejvýše 5, tedy $n - 1 \leqq 5$ čili $n \leqq 6$, jak jsme slíbili dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechny dvojice různých přirozených čísel, v nichž větší číslo je násobkem toho menšího a jejich součet je 74. [Vyhovují dvojice (1,73) a (2,72). Označíme-li hledaná čísla a a $k \cdot a$, kde $k \geqq 2$ je celé, pak $74 = a + ka = a(k + 1)$, přičemž $k + 1 \geqq 3$, takže $k + 1$ je dělitelem čísla $74 = 2 \cdot 37$ větším než 3, tedy je to buď 37 nebo 74.]

N2. Jakou největší délku může mít rostoucí posloupnost kladných celých čísel, ve které je každý člen násobkem předchozího a poslední člen je roven 1000? [7. Každý další člen musí mít v rozkladu na prvočinitele aspoň jednoho prvočinitele navíc oproti předchozímu členu. Jelikož číslo $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ má 6 prvočinitelů, může být celkem členů až 7 (první člen totiž může být 1).]

D1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \ldots = 2021,$$

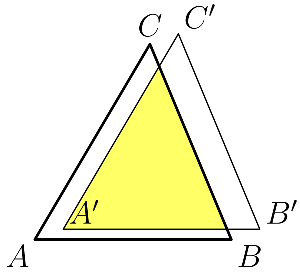
kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$). [MO–70–A–III–4]

D2. O lichém prvočísle p řekneme, že je speciální, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální? [MO–73–A–I–4]

D3. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$ s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla $n!$ vzestupně jako $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n!$, potom platí $d_2 - d_1 \leqq d_3 - d_2 \leqq \ldots \leqq d_k - d_{k-1}$. [USAMO–2024–P1]

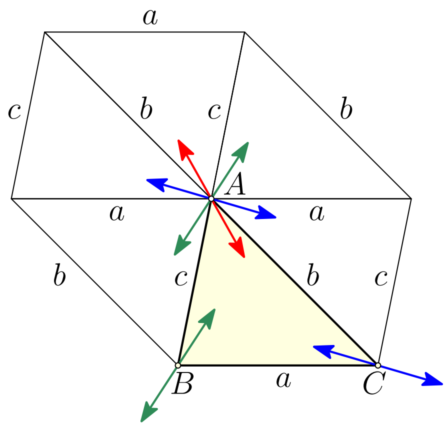
D4. Určete všechna složená čísla $n > 1$ s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla n vzestupně jako $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, potom d_i je dělitelem součtu $d_{i+1} + d_{i+2}$ pro každé $1 \leqq i \leqq k - 2$. [IMO–2023–P1]

4. *Pro trojúhelník ABC platí $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor délky 1 vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Určete nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.* (Tomáš Bárta)

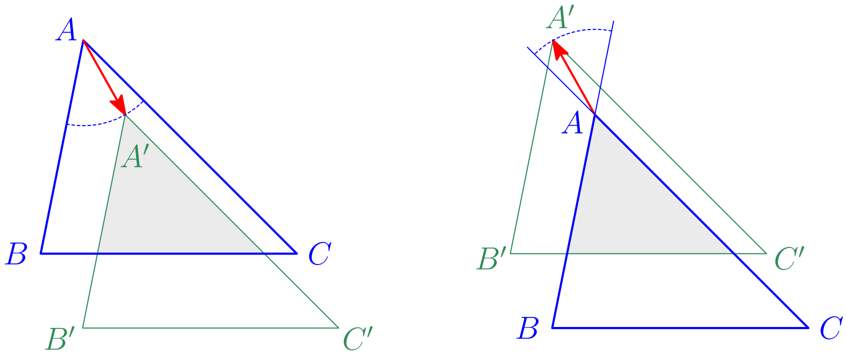


Řešení. Ukážeme, že nejmenší možný obsah je $7803/112 \doteq 69{,}67$.

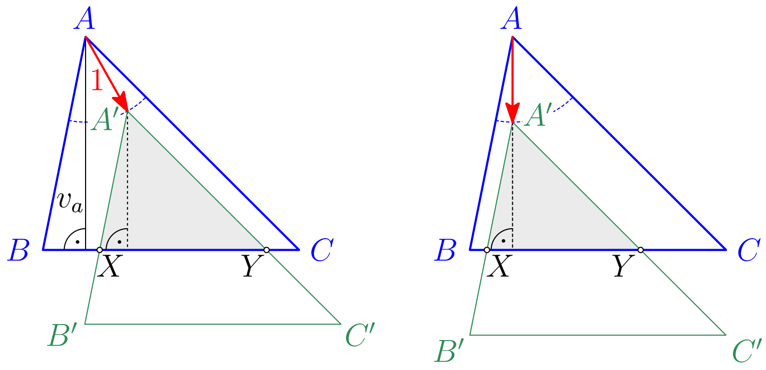
V celém řešení budeme využívat toho, že daný trojúhelník ABC je ostroúhlý a že kterákoli jeho výška je větší než zadaná délka posunutí (rovná 1); tato (intuitivně zřejmá) tvrzení ověříme až na úplném konci přímým výpočtem.



Na úvodním obrázku vidíme šestiúhelník složený z šesti kopií téhož trojúhelníku ABC o stranách délek $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Podle vykreslených vektorů je patrné, že ať vybereme vektor posunutí jakkoli, vždy bude ležet buď v některém vnitřním úhlu trojúhelníku ABC, nebo v úhlu k němu vrcholovém, pokud tento vektor umístíme do vhodně zvoleného vrcholu trojúhelníku ABC (červené vektory do vrcholu A, zelené do vrcholu B a modré do vrcholu C). Případem vrcholových úhlů se nemusíme zabývat, protože (jak ilustruje následující dvojice obrázků) výsledný průnik dvou trojúhelníků se nezmění, pokud namísto posouvání původního trojúhelníku ABC o daný vektor posuneme výsledný trojúhelník $A'B'C'$ o vektor k němu opačný.



Zaměřme se teď na případ, kdy vektor posunutí AA' (zadané délky 1) leží v úhlu BAC (zbývající případy, kdy BB' leží v úhlu ABC, resp. kdy CC' leží v úhlu BCA, nebudou o nic těžší). Jelikož platí $v_a > 1$ (kde v_a značí jako obvykle výšku z vrcholu A v trojúhelníku ABC), průnikem trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ bude trojúhelník $A'XY$, kde X a Y jsou ty body na straně BC, pro které platí $A'X \parallel AB$ a $A'Y \parallel AC$ (viz další obrázek vlevo).



Díky rovnoběžnostem stran je trojúhelník $A'XY$ podobný trojúhelníku ABC, a má proto nejmenší možný obsah právě tehdy, když má nejkratší možnou výšku z vrcholu A'. Jelikož trojúhelník ABC je ostroúhlý, je tato výška nejkratší, když vektor posunutí AA' je kolmý ke straně BC. Tehdy je výška z vrcholu A' v trojúhelníku $A'XY$ rovna $v_a - 1$ (viz obrázek vpravo). Trojúhelníky $A'XY$ a ABC jsou tudíž podobné s koeficientem podobnosti $\frac{v_a-1}{v_a}$, a tak pro nejmenší možný obsah průniku v uvažovaném případě dostáváme hodnotu

$$S_{ABC} \cdot \left(\frac{v_a - 1}{v_a}\right)^2 = S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_a}\right)^2.$$

Podobně v případech, kdy v trojúhelníku ABC leží vektor BB', resp. vektor CC', dostaneme pro nejmenší možnou hodnotu obsahu průniku vyjádření

$$S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_b}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_c}\right)^2.$$

Z nerovností $|AB| < |BC| < |CA|$ zřejmě plyne $v_c > v_a > v_b$, a proto nejmenší z nalezených tří minimálních hodnot je hodnota $S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_b}\right)^2$.

Zbývá vypočítat S_{ABC} a v_b. Podle Heronova vzorce (viz poznámku pod čarou) platí

$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 21$ je polovina obvodu trojúhelníku ABC. Po dosazení získáme $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$. Ze vztahu $S_{ABC} = \frac{1}{2}b \cdot v_b$ pak dostáváme $v_b = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5}$. Tím jsme také ověřili, že nejkratší výška v_b je delší než 1. To, že trojúhelník je ostroúhlý, plyne z nerovnosti $15^2 < 13^2 + 14^2$ (díky kosinové větě $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ pak proti nejdelší straně b leží úhel β, jehož kosinus je kladný). Závěrem dopočteme

$$S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v_b}\right)^2 = 84 \cdot \left(\frac{51}{56}\right)^2 = \frac{7803}{112} \doteq 69{,}67.$$

Návodné a doplňující úlohy:

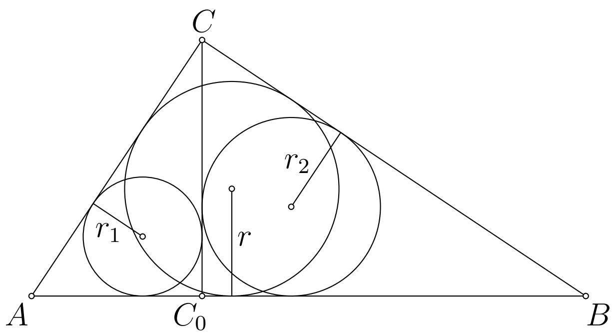
N1. Uvnitř trojúhelníku ABC na jeho střední příčce rovnoběžné se stranou BC je dán bod P. Rovnoběžky se stranami AB, AC vedené bodem P protnou stranu BC postupně v bodech Q, R. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je roven čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC. [Trojúhelníky PQR a ABC mají rovnoběžné strany, takže jsou podobné. Výška ke straně QR má poloviční délku nežli výška ke straně BC, takže koeficient podobnosti je $1/2$. Obsah trojúhelníku PQR je proto roven $(1/2)^2 = 1/4$ obsahu trojúhelníku ABC.]

N2. Spočtěte obsah trojúhelníku se stranami délek $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. [$6\sqrt{6} \doteq 14{,}7$. Stačí dosadit do Heronova vzorce* $S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ je polovina obvodu. Vyjde $s = 9$ a $S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$. Případně lze postupovat také následovně: Z kosinové věty $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ plyne $\cos\gamma = (a^2+b^2-c^2)/(2ab) = 1/5$, takže $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = 2\sqrt{6}/5$ a $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 6\sqrt{6}$. (Zmíněný Heronův vzorec lze odvodit podobně jako v uvedeném výpočtu pomocí úprav $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\gamma) = \frac{1}{4}a^2b^2(1+\cos\gamma)\cdot(1-\cos\gamma) = \frac{1}{16}\big((a+b)^2-c^2\big)(c^2-(a-b)^2\big).$)]

D1. Určete *největší* možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. [Vyjde $84\cdot(14/15)^2 = 5488/75 \doteq 73{,}17$. Ukažte, že maximum nastane, pokud bude vektor posunutí rovnoběžný s některou ze stran trojúhelníků. Příslušný koeficient podobnosti pak bude $12/13$, $13/14$ nebo $14/15$, přičemž maximum dává právě poslední z nich.]

D2. Pro daná kladná čísla a a d platí $d \leqq \frac{a}{\sqrt{2}}$. Posunutím čtverce $ABCD$ o straně délky a o libovolný vektor délky d vznikne čtverec $A'B'C'D'$. Určete největší možný a také nejmenší možný obsah průniku čtverců $ABCD$ a $A'B'C'D'$. [Maximum je $a(a-d)$, minimum je $(a-d/\sqrt{2})^2$. Průnikem je totiž obdélník o obsahu $S = (a-x)(a-y)$, kde nezáporná čísla x, y jsou délky kolmých průmětů vektoru posunutí na přímky AB, AD. Pro součet $s = x+y$ zřejmě platí $s \geqq d$ a také $s \leqq d\sqrt{2}$, neboť $x^2+y^2 = d^2$ a $(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)$. Užitím rovnosti $xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}d^2$ zapíšeme obsah S jako funkci součtu s: $S(s) = a^2-(x+y)a+xy = \frac{1}{2}s^2 - as + a^2 - \frac{1}{2}d^2$. To je kvadratická funkce s minimem v bodě $s = a$, který leží díky předpokladu $d \leqq a/\sqrt{2}$ napravo od intervalu $\langle d, d\sqrt{2}\rangle$ se všemi možnými hodnotami s. Zbývá využít toho, že na tomto intervalu je uvažovaná funkce klesající a že hodnoty $s = d$ a $s = d\sqrt{2}$ jsou dosažitelné. Proto je $S(d)$ hledané maximum a $S(d\sqrt{2})$ hledané minimum.]

D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme CC_0 výšku k přeponě AB a dále označme r, r_1, r_2 postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ACC_0, BCC_0. Dokažte, že $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.



[Trojúhelníky ABC, ACC_0 a CBC_0 jsou navzájem podobné, takže existuje reálné číslo x takové, že $r = x\cdot|AB|$, $r_1 = x\cdot|AC|$, $r_2 = x\cdot|BC|$. Dokazovaná rovnost je tudíž x^2-násobkem rovnosti z Pythagorovy věty pro $\triangle ABC$.]

D4. V pravoúhlém trojúhelníku s vepsanou kružnicí o poloměru r má výška k přeponě velikost v. Dokažte nerovnosti

$$0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5.$$

* O tomto proslulém vzorci se více dočtete v článku *J. Blažek*: Čtyři důkazy Heronova vzorce.

[*S. Horák*: Nerovnosti v trojúhelníku, ŠMM sv. 57, příklad 25, str. 50–52.]

D5. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2. [MO–71–A–I–2]

D6. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník T o obsahu 1 existuje přímka p, pro kterou má průnik trojúhelníku T a jeho obrazu v osové souměrnosti podle přímky p obsah větší než $\frac{3}{4}$. [Z trojúhelníkové nerovnosti lze odvodit, že v každém trojúhelníku existují dvě strany, pro jejichž délky a, b platí $1 \leqq a/b < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Pokud za p zvolíme osu úhlu mezi těmito stranami, vyjde průnik o obsahu alespoň $3-\sqrt{5} \doteq 0{,}764$, viz také USAMO–1996–P3. Komplikovanějším způsobem lze dokázat, že vhodnou volbou přímky p lze zajistit průnik o obsahu dokonce alespoň $2\sqrt{2}-2 \doteq 0{,}828$, tuto konstantu navíc nelze zlepšit, viz Wikipedia.]

5. *Saba se snaží z přízemí nekonečně vysokého mrakodrapu dostat do n-tého patra pomocí zvláštního výtahu. Ve výtahu jsou tlačítka* $0, 1, 2, \ldots$ *Po prvním stisknutí tlačítka pojede výtah nahoru a po každém dalším jede vždy opačným směrem, než posledně, přičemž po stisknutí tlačítka k popojede vždy o* 2^k *pater. Navíc každé další stisknuté tlačítko musí mít menší číslo než to předešlé. Dokažte, že Saba se do každého patra* $n \geqq 1$ *může dostat právě dvěma různými postupy.* (Morteza Saghafian)

Řešení. Označme t první tlačíko, které Saba stiskne. Pro $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ můžeme vypsat všechny možné postupy, které může Saba použít, a patra, ve kterých skončí. Dostaneme následující seznam (při daném t postupy uspořádáme podle počtu užitých tlačítek):

$t = 0$: $2^0 = \mathbf{1}$.

$t = 1$: $2^1 = \mathbf{2}$, $2^1 - 2^0 = \mathbf{1}$.

$t = 2$: $2^2 = \mathbf{4}$, $2^2 - 2^1 = \mathbf{2}$, $2^2 - 2^0 = \mathbf{3}$, $2^2 - 2^1 + 2^0 = \mathbf{3}$.

$t = 3$: $2^3 = \mathbf{8}$, $2^3 - 2^2 = \mathbf{4}$, $2^3 - 2^1 = \mathbf{6}$, $2^3 - 2^0 = \mathbf{7}$, $2^3 - 2^2 + 2^1 = \mathbf{6}$, $2^3 - 2^2 + 2^0 = \mathbf{5}$, $2^3 - 2^1 + 2^0 = \mathbf{7}$, $2^3 - 2^2 + 2^1 - 2^0 = \mathbf{5}$.

Tyto „malé“ případy nás mohou vést k domněnce, že pro každé přirozené t platí následující tvrzení:

Pokud Saba použije jen tlačítka menší nebo rovna t*, může se dostat do každého z pater* $1, 2, \ldots, 2^t - 1$ *právě dvěma způsoby a dále jen do patra* 2^t *právě jedním způsobem.*

Poté, co domněnku dokážeme, úloha bude zřejmě vyřešena.

K důkazu domněnky použijeme matematickou indukci. Pro nejmenší hodnoty $t \in \{1, 2, 3\}$ jsme tvrzení ověřili výše.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro nějaké pevné $t \geqq 3$, a dokažme, že pak platí i pro $t + 1$. K tomu uvážíme všechny postupy, kdy Saba použije jen tlačítka menší nebo rovna $t + 1$. Rozlišíme je podle toho, jestli používají tlačítko $t + 1$ a jestli kromě něj používají i nějaké jiné tlačítko.

a) Pomocí postupů, které tlačíko $t + 1$ nepoužívají, se podle indukčního předpokladu Saba dostane do každého z pater $1, 2, \ldots, 2^t - 1$ právě dvěma způsoby a navíc do patra 2^t právě jedním způsobem.

b) Pokud Saba stiskne tlačítko $t + 1$ a po něm ještě aspoň jedno další, po prvním stisku bude následovat libovolný z postupů vyhodnocených výše. Při něm se ovšem na rozdíl od původního postupu otočí všechny směry chodu výtahu, takže pokud původní postup vedl do patra p, nový postup povede do patra $2^{t+1} - p$. Pomocí všech těchto nových postupů se tak Saba může dostat do každého z pater

$$2^{t+1} - 1, \quad 2^{t+1} - 2, \quad \ldots, \quad 2^{t+1} - (2^t - 1) = 2^t + 1$$

právě dvěma způsoby a navíc do patra $2^{t+1} - 2^t = 2^t$ právě jedním způsobem.

c) Pokud Saba stiskne jen tlačítko $t + 1$, dostane se do patra 2^{t+1}.

Celkem jsme dokázali, že Saba se může dostat právě dvěma způsoby do každého z pater $1, 2, \ldots, 2^t - 1$ (případ a), 2^t (případy a, b), $2^t + 1, 2^t + 2, \ldots, 2^{t+1} - 1$ (případ b) a navíc právě jedním způsobem do patra 2^{t+1} (případ c). Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Poznámka. Možných domněnek, které lze odpozorovat a následně dokázat matematickou indukcí, je více. Například: *Pokud Saba začne stisknutím tlačítka $t \geqq 1$, může se dostat do každého ze dvou pater 2^{t-1}, 2^t právě jedním způsobem a navíc do každého z „mezipater“ $2^{t-1} + 1, \ldots, 2^t - 1$ právě dvěma způsoby.*

Jiné řešení. V tomto řešení budeme pracovat se zápisy čísel ve dvojkové soustavě. Například číslo 58 lze zapsat jako

$$58 = 32 + 16 + 8 + 2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = (111010)_2.$$

Při práci se zápisem čísla ve dvojkové soustavě číslujeme pozice zprava postupně od 0, tj. zde bychom řekli, že číslo 58 má ve dvojkovém zápisu jedničky na pozicích 1, 3, 4, 5 (které odpovídají sčítancům 2^1, 2^3, 2^4, 2^5) a nuly na pozicích 0, 2 (které odpovídají chybějícím sčítancům 2^0, 2^2). Dodejme dobře známý fakt, že každé přirozené číslo má ve dvojkové soustavě jednoznačný zápis (viz řešení návodné úlohy N2).

Zpátky k úloze. Nejdřív rozeberme případ, kdy Saba stiskne dohromady *sudý* počet tlačítek, tedy po posledním stisknutí výtah pojede dolů. Konkrétně po stisknutí $2k$ tlačítek postupně s čísly

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \ldots > a_k > b_k$$

skončí výtah v patře s číslem $n = (2^{a_1} - 2^{b_1}) + (2^{a_2} - 2^{b_2}) + \ldots + (2^{a_k} - 2^{b_k})$. Podívejme se na zápis tohoto čísla ve dvojkové soustavě. Pro rozdíl v každé závorce platí

$$2^{a_i} - 2^{b_i} = 2^{a_i - 1} + 2^{a_i - 2} + \ldots + 2^{b_i},$$

takže jde o číslo, které má ve dvojkové soustavě jedničky právě na pozicích b_i až $a_i - 1$. V zápise výsledného součtu n tak všechny jedničky vytvoří k souvislých úseků s pozicemi

$$(a_1 - 1, \ldots, b_1),\ (a_2 - 1, \ldots, b_2),\ \ldots,\ (a_k - 1, \ldots, b_k),$$

přitom každé dva tyto sousední úseky budou odděleny aspoň jednou nulou, neboť mezi pozicemi b_i a $a_{i+1} - 1$ je vždy aspoň pozice a_{i+1}. Pokud tedy Saba má stisknout sudý počet tlačítek, může se do daného patra $n \geqq 1$ dostat vždy právě jedním způsobem: číslo n zapíše ve dvojkové soustavě, v zápisu najde co nejdelší souvislé úseky jedniček, označí je zleva po řadě $(a_i - 1, \ldots, b_i)$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a postupně stiskne tlačítka $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$. Například pro patro $58 = (111010)_2$ takto najde dva úseky

$$(a_1 - 1 = 5,\ 4,\ 3 = b_1),\ (a_2 - 1 = 1 = b_2),$$

a pak postupem $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (6, 3, 2, 1)$ se skutečně dostane do patra $2^6 - 2^3 + 2^2 - 2^1 = 58$.

Podobně ve druhém případě, kdy Saba stiskne *lichý* počet tlačítek, řekněme s čísly

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \ldots > a_k > b_k > a_{k+1},$$

skončí v patře s číslem $n = \sum_{i=1}^{k}(2^{a_i} - 2^{b_i}) + 2^{a_{k+1}}$, které má v dvojkové soustavě jedničky na úsecích pozic $(a_i - 1, \dots b_i)$ a na pozici a_{k+1} (všude jinde má nuly, zejména aspoň jednu mezi každými dvěma sousedními úseky jedniček z prvních k úseků). Každé $n \geqq 1$ lze v uvedeném tvaru zapsat právě jedním způsobem – jako a_{k+1} musí Saba zvolit pozici první jedničky zprava v dvojkovém zápisu čísla n, tuto jedničku přepíše na nulu a dále už postupuje jako výše v případě sudého počtu tlačítek. I zde je tedy právě jeden možný postup. Například pro patro $58 = (111010)_2$ Saba přepíše na nulu jedničku na pozici 1, najde jediný úsek jedniček $(a_1 - 1 = 5, 4, 3 = b_1)$, takže bude $k = 1$ a $a_{k+1} = 1$, a pak se postupem $(a_1, b_1, a_2) = (6, 3, 1)$ skutečně dostane do patra $2^6 - 2^3 + 2^1 = 58$.

Poznámka. Z podaného řešení, které jsme založili na užití dvojkové soustavy, plyne, že dva možné postupy, jakými se Saba dostane do patra s daným číslem n, končí stiskem téhož tlačítka a, jednou pro pohyb o 2^a pater nahoru, podruhé pro takový pohyb dolů. Navíc platí, že 2^a je největší mocnina dvojky, která dané číslo n dělí. Odtud plyne, že oba postupy pro dané n lze postupně konstruovat „odzadu“, aniž předem určíme dvojkový zápis čísla n. Například pro číslo $n = 58$, které je dělitelné 2^1, ne však 2^2, celá konstrukce pro lichý počet stisků tlačítek (poslední pohyb bude o 2^1 pater nahoru) bude vypadat takto

$$58,\ 58 - 2^1 = 56,\ 56 + 2^3 = 64,\ 64 - 2^6 = 0;$$

pro sudý počet stisků tlačítek bude mít tvar

$$58,\ 58 + 2^1 = 60,\ 60 - 2^2 = 56,\ 56 + 2^3 = 64,\ 64 - 2^6 = 0.$$

Hledané skupiny tlačítek tedy jsou $(6, 3, 1)$ a $(6, 3, 2, 1)$.

Dodejme, že tuto poznámku nelze považovat za úplné řešení – například by ještě bylo potřeba zdůvodnit, že

- ▷ použitím uvedeného postupu „odzadu“ nikdy nezajedeme do podzemí a že
- ▷ po konečně mnoha krocích skutečně dojedeme do přízemí.

První tvrzení lze zdůvodnit například tak, že z kteréhokoliv patra s kladným číslem $2^i \cdot l$, kde l je liché číslo, popojedeme jen o 2^i pater, tedy skončíme v patře s číslem alespoň $2^i \cdot l - 2^i \geqq 2^i - 2^i \geqq 0$. Druhé tvrzení lze zdůvodnit různými způsoby – například lze indukcí dokázat, že pokud začínáme konstrukci odzadu v patře n a platí $n < 2^k$, pak nikdy nenavštívíme patro s číslem větším než 2^k. Z toho pak vyplývá požadované tvrzení. Jelikož totiž v každém kroku popojedeme o více pater než v předchozím kroku, po konečném počtu kroků takto dojedeme buď do přízemí nebo do patra s číslem 2^k (a z něj následně do přízemí).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kam (a kolika postupy) se Saba může dostat, pokud ve výtahu budou jen tlačítka 0, 1, 2? [Pokud prvně stiskne tlačítko 2, může se dostat do pater $4 = 2^2$, $3 = 2^2 - 2^0$, $2 = 2^2 - 2^1$, $3 = 2^2 - 2^1 + 2^0$. Jinak se může dostat do pater $2 = 2^1$, $1 = 2^1 - 2^0$ a $1 = 2^0$. Celkově se do patra 4 může dostat jedním postupem a do pater 1, 2 a 3 dvěma postupy.]

N2. Dokažte, že pokud výtah nemění směr (tedy jezdí pouze nahoru), může se Saba do každého patra $n \geqq 1$ dostat právě jedním postupem. [Máme dokázat, že každé $n \geqq 1$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako součet různých celočíselných mocnin dvojky. Toto tvrzení je známé jako jednoznačnost zápisu ve dvojkové soustavě. Načrtneme důkaz matematickou indukcí: Stačí dokázat, že pro každé $k \geqq 1$ má 2^{k+1} podmnožin množiny

$\{2^0, 2^1, \ldots, 2^k\}$ navzájem různé součty prvků, a to čísla od 0 po $2^{k+1}-1$. Pro $k = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k-1$. Podmnožiny, které neobsahují prvek 2^k, mají podle předpokladu součty $0, \ldots, 2^k - 1$. Podmnožiny, které prvek 2^k obsahují, mají součty o 2^k větší, tedy $2^k + 0, \ldots, 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$.]

N3. Dokažte, že (kladný) rozdíl dvou různých mocnin dvojky lze vyjádřit jako součet několika po sobě jdoucích mocnin dvojky (jedné nebo více). [Pro každá dvě přirozená čísla $a > b$ platí $2^a - 2^b = 2^b + 2^{b+1} + \ldots + 2^{a-1}$, jak snadno ověříme přičtením 2^b k oběma stranám a opakovaným využitím vztahu $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.]

D1. Máme rovnoramenné váhy a 4 závaží, která můžeme pokládat na misky vah. a) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 15, pokud máme dovoleno pokládat závaží jen na levou misku vah. b) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 40, pokud máme dovoleno pokládat závaží na obě misky vah. [a) Jedna taková sada je $\{1, 2, 4, 8\}$. b) Jedna taková sada je $\{1, 3, 9, 27\}$.]

D2. Dokažte, že každé přirozené číslo n lze vyjádřit právě jedním způsobem jako

$$n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \ldots + c_k \cdot k!,$$

kde $k \geqq 1$ a $0 \leqq c_i \leqq i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, přitom $c_k \neq 0$. [Jde o vyjádření čísla n v tzv. faktoriálové soustavě (viz Wikipedia). Nejprve dokážeme pro každé přirozené m pomocnou rovnost $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + m \cdot m! = (m+1)! - 1$ – stačí buď v součtu $(2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + \cdots + ((m+1)-1) \cdot m!$ roznásobit závorky a výsledek zjednodušit, nebo užít matematickou indukci. Tu ale hlavně využijeme k důkazu tvrzení ze zadání vlastní úlohy D2: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí; platí-li pro všechna n' menší než dané číslo $n > 1$, najdeme k němu nejprve jednoznačně určená přirozená čísla k a c, kde $c \leqq k$, taková, že $c \cdot k! \leqq n < (c+1) \cdot k!$. Z pomocné rovnosti pro $m = k$ plyne, že nalezené k je právě to, které musí být v každém vyjádření n ze zadání D2 a že navíc v něm musí platit $c_k = c$; z indukčního předpokladu pro $n' = n - c \cdot k! < n$ pak dostáváme i jednoznačně určené koeficienty c_i s indexy $i < k$, neboť $n' < k!$ (několik posledních z těchto koeficientů mohou být nuly, v případě $n' = 0$ to jsou dokonce samé nuly).]

D3. Je dáno celé číslo $z < -1$. Dokažte, že jakékoli nenulové celé číslo n má vyjádření

$$n = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_1 z + c_0,$$

kde $k \geqq 0$ a $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ jsou celá čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, |z| - 1\}$. Ukažte rovněž, že za podmínky $c_k \neq 0$ je takové vyjádření daného n jediné. (V případě $z = -2$ se jedná o vyjádření čísla n v „minusdvojkové“ soustavě. Poziční soustavy se zápornými základy našly praktická uplatnění i z důvodu, že i záporná čísla jsou v nich zapisována bez znaménka, například $-7 = (1001)_{-2}$. Viz také Wikipedia.) [Využijte toho, že čísla $c_0, c_1, c_2, \ldots$ lze postupně určit kongruencemi

$$c_0 \equiv n \pmod{|z|}, \quad c_1 \equiv \frac{n - c_0}{z} \pmod{|z|}, \quad c_2 \equiv \frac{n - c_0 - c_1 z}{z^2} \pmod{|z|}, \ldots]$$

D4. Fibonacciho čísla F_n jsou definována jako $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n \geqq 3$. Dokažte, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet jednoho nebo více navzájem různých Fibonacciho čísel tak, že tento součet neobsahuje žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Dále dokažte, že bez použití F_1 je dokonce toto vyjádření jednoznačné. [Zeckendorfova věta (Wikipedia)]

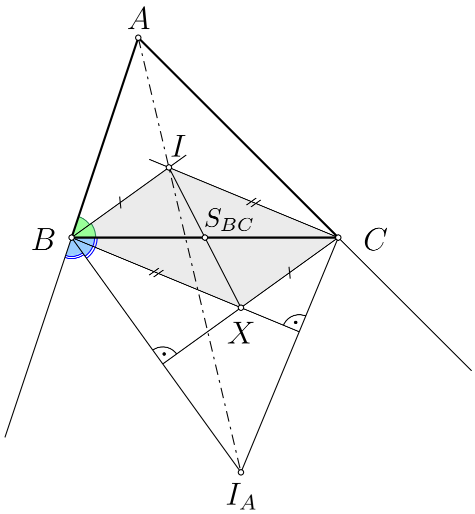
D5. Beruška Blanka sedí v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a začne skákat rovnoběžně se souřadnicovými osami tak, že v n-té minutě pro každé přirozené číslo n skočí právě jednou, a to v některém ze čtyř možných směrů s délkou skoku rovnou Fibonaccimu číslu F_n (definovaném v D4). Předpokládejme, že první dva Blančiny skoky byly navzájem kolmé. Dokažte, že se Blanka už nikdy nemůže vrátit tam, odkud začala skákat. [ICMC–6.1–P3]

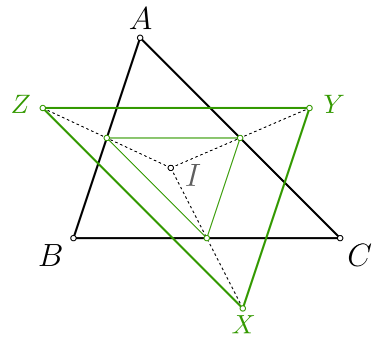
6. *Označme I_A, I_B, I_C po řadě středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Průsečíky výšek trojúhelníků I_ABC, AI_BC, ABI_C označme po řadě X, Y, Z. Dokažte, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou shodné.* (Michal Janík)

Řešení. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Přímky BI, BI_A jsou osami vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu B trojúhelníku ABC. V této roli to jsou dvě navzájem kolmé přímky, neboť při obvyklém označení $\beta = |\sphericalangle ABC|$ platí

$$|\sphericalangle IBI_A| = |\sphericalangle IBC| + |\sphericalangle CBI_A| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90°.$$

Ke zmíněné přímce BI_A je ovšem také kolmá přímka CX výšky z vrcholu C trojúhelníku I_ABC. Dohromady vychází, že přímky BI a CX jsou rovnoběžné. Podobně jsou rovnoběžné přímky CI a BX, tudíž podbarvený čtyřúhelník $BICX$ je rovnoběžník.



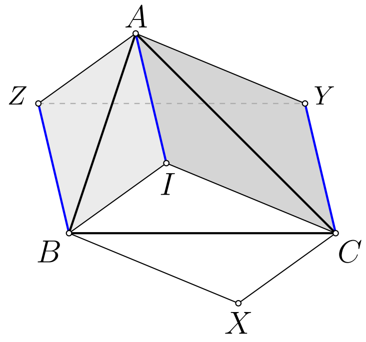


Úhlopříčky každého rovnoběžníku se navzájem půlí, takže střed úsečky IX splývá se středem S_{BC} strany BC. Analogicky středy úseček IY, IZ splývají po řadě se středy S_{CA}, S_{AB} stran CA, AB trojúhelníku ABC. Trojúhelník XYZ je proto obrazem tzv. *příčkového* trojúhelníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ ve stejnolehlosti se středem I a koeficientem 2. Jelikož příčkový trojúhelník $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti 1/2, je (dvakrát větší) trojúhelník XYZ s trojúhelníkem ABC shodný.

Jiné řešení. Ukážeme jiný způsob jak dokončit řešení po zjištění, že čtyřúhelník $BICX$ je rovnoběžník.

Analogicky jako v prvním řešení se dokáže, že i čtyřúhelníky $CIAY$ a $AIBZ$ jsou rovnoběžníky. Úsečky BZ a CY jsou tedy shodné a rovnoběžné (každá z nich je totiž shodná a rovnoběžná s úsečkou IA). Čtyřúhelník $BCYZ$ je tudíž rovnoběžník, a proto platí $|BC| = |YZ|$. Obdobně dokážeme i rovnosti $|CA| = |ZX|$ a $|AB| = |XY|$, takže celkově jsou trojúhelníky ABC a XYZ shodné podle věty *sss*.

Jiné řešení. Ukážeme ještě trochu náročnější způsob jak odvodit, že střed úsečky IX splývá se středem S_{BC} úsečky BC. Zkombinujeme v něm dvě zajímavá tvrzení z doplňujících úloh D1 a D2.



Zkoumejme, jaký vztah má bod I k trojúhelníku I_ABC. Z doplňující úlohy D1 plyne, že úsečka I_AI je průměrem kružnice opsané trojúhelníku I_ABC (tj. bod I je „naproti“ vrcholu I_A na této kružnici). Díky tomu z doplňující úlohy D2 plyne, že bod I je obrazem průsečíku výšek X trojúhelníku I_ABC v souměrnosti podle středu jeho strany BC.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v trojúhelníku ABC je osa vnějšího úhlu u vrcholu A kolmá k ose vnitřního úhlu u vrcholu A. [Součet velikostí vnitřního a vnějšího úhlu u jednoho vrcholu trojúhelníku je 180°. Součet jejich polovin je proto 90°.]

N2. Dokažte, že trojúhelník tvořený středními příčkami daného trojúhelníku je mu podobný. [Jelikož střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se základnou a má oproti ní poloviční délku, je podle věty *sss* příčkový trojúhelník podobný celému trojúhelníku s koeficientem podobnosti 1/2. Jiný postup: Z vlastnosti těžnic plyne, že příčkový trojúhelník je obrazem původního trojúhelníku ve stejnolehlosti s koeficientem $-1/2$.]

N3. Uvnitř šestiúhelníku $ABCDEF$ leží bod P tak, že čtyřúhelníky $ABCP$, $CDEP$ a $EFAP$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelníky ACE a DFB jsou shodné. [Jelikož jsou čtyřúhelníky $ABCP$ a $CDEP$ rovnoběžníky, jsou úsečky AB, CP a DE rovnoběžné a shodné. Proto je i čtyřúhelník $ABDE$ rovnoběžník, tedy úsečky AE a DB jsou shodné. Analogicky jsou shodné i úsečky CE s FB a úsečky AC s DF, což dohromady podle věty *sss* už znamená shodnost trojúhelníků ACE a DFB.]

V doplňujících úlohách používáme značení ze zadání soutěžní úlohy.

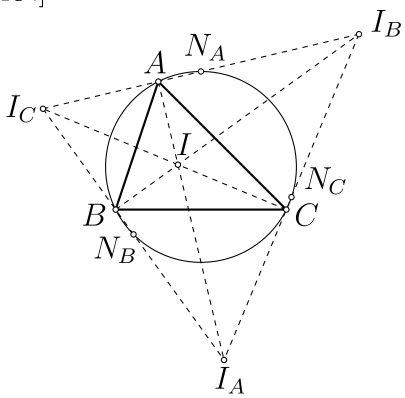
D1. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že úsečka I_AI je průměrem kružnice opsané trojúhelníku I_ABC. [Podle N1 platí $|\sphericalangle IBI_A| = 90° = |\sphericalangle ICI_A|$.]

D2. V trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek, M střed strany BC a H' obraz bodu H ve středové souměrnosti podle bodu M. Dokažte, že úsečka AH' je průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC. [Přímka BH' je obrazem přímky CH ve středové souměrnosti podle bodu M, proto jsou tyto přímky rovnoběžné. Jelikož přímka CH je kolmá ke straně AB, je úhel ABH' pravý. Analogicky je pravý i úhel ACH', tedy skutečně body B, C leží na kružnici nad průměrem AH'.]

D3. Označme S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} středy stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC. Dokažte, že se přímky AX, BY a CZ protínají v jednom bodě, a to ve středu kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ trojúhelníku ABC. [Označme J střed kružnice vepsané trojúhelníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$. Stačí dokázat, že J je střed strany AX trojúhelníku AIX. Z řešení původní úlohy víme, že $BICX$ je rovnoběžník, tedy S_{BC} je středem úsečky IX. Stejnolehlost s koeficientem $-1/2$, která zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle S_{BC}S_{CA}S_{AB}$, zobrazí úsečku AI na úsečku $S_{BC}J$, takže $\overrightarrow{S_{BC}J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$. Jelikož S_{BC} je středem strany IX trojúhelníku AIX, je $S_{BC}J$ jeho střední příčka a bod J je tak středem jeho strany AX.]

D4. a) Dokažte, že střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC je současně průsečíkem výšek trojúhelníku $I_AI_BI_C$. b) Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC je současně

Feuerbachovou kružnicí* trojúhelníku $I_AI_BI_C$. c) Dokažte, že středy oblouků ABC, BCA, CAB kružnice opsané trojúhelníku ABC jsou současně středy stran trojúhelníku $I_AI_BI_C$. [a) Např. přímky I_BI_C a I_AI jsou navzájem kolmé podle úlohy N1, protože jsou to osy vnějšího a vnitřního úhlu u vrcholu A. b) Podle části a) jsou totiž body A, B, C patami výšek v $\triangle I_AI_BI_C$. c) Střed N_A úsečky I_BI_C je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku BCI_BI_C , takže platí $|N_AB| = |N_AC|$ a $|\sphericalangle BN_AC| = 2\cdot|\sphericalangle BI_BC| = 2\cdot|\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle BAC|$, kde předposlední rovnost platí díky tomu, že čtyřúhelník $AICI_B$ je tětivový (opět Thaletova věta). Bod N_A je proto skutečně středem oblouku BAC.]



D5. V trojúhelníku ABC splňujícím $|AB| < |AC|$ označme M střed strany BC, N střed oblouku BAC kružnice opsané a I střed kružnice vepsané. Dokažte, že $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INA|$. [Označme I_B, I_C středy kružnic připsaných postupně stranám AC a AB. Čtyřúhelník BCI_BI_C je tětivový (Thaletova věta), takže $\triangle BIC \sim \triangle I_CII_B$ (věta *uu*). Podle úlohy D4 je bod N středem úsečky I_BI_C. Úsečky IM, IN jsou proto odpovídající si těžnice v podobných trojúhelnících $\triangle BIC$ a $\triangle I_CII_B$, tudíž podobné jsou i jejich „poloviny“ – trojúhelníky IMB a INI_C. Odtud už $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INI_C| = |\sphericalangle INA|$.]

* Feuerbachova kružnice daného trojúhelníku je kružnice procházející mj. středy jeho stran a patami jeho výšek. Viz *S. Horák*: Kružnice, ŠMM sv. 16, str. 78–80.