Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Z číslic* 1 *až* 9 *vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a na tabuli napíšeme jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Můžeme tak na tabuli získat právě dvě různá prvočísla? Pokud ano, určete všechny takové dvojice prvočísel.*

Řešení. Předpokládejme, že existuje číslo, ze kterého opravdu můžeme získat na tabuli právě dvě prvočísla. Nejprve ukážeme, že to jsou nutně prvočísla 2 a 3, a pak uvedeme příklad devítimístného čísla, pro které na tabuli opravdu zůstanou jen tato dvě prvočísla.

Z číslic 1 až 9 jsou 4 sudé (2, 4, 6, 8). Je-li na prvním místě sudá číslice, vytvoříme právě 3 sudá čísla, každé z nich končící některou ze zbývajících tří sudých číslic. V tomto případě budou na tabuli právě 3 dvojky. Pokud na prvním místě není sudá číslice, tak vytvoříme dokonce 4 sudá čísla, tedy na tabuli budou 4 dvojky. Jedno z prvočísel napsaných na tabuli je jistě dvojka. Jelikož na tabuli je napsáno 8 čísel a dvojka je tam nejvýše čtyřikrát, druhé prvočíslo tam musí být alespoň čtyřikrát. Vyloučením jiných prvočísel ukážeme, že toto druhé prvočíslo může být pouze 3.

Prvočíslo 5 může být na tabuli nejvýše jednou, a to v tom dvoumístném čísle, které má na místě jednotek číslici 5. Prvočíslo 7 získáme jen z čísel $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 11 = 77$, $7 \cdot 13 = 91$, čili může být na tabuli nejvýše třikrát. Pro prvočíslo p větší než 7, čili alespoň 11, může existovat nejvíce jedno vyhovující dvojmístné číslo, a to samotné p (jelikož již $11 \cdot 11$ je trojmístné, každé jiné dvojmístné číslo má dělitele menšího než 10, a ten by způsobil, že na tabuli se dostane prvočíslo menší než 10, a ne p). Tím jsme zdůvodnili, že kromě prvočísla 2 může být na tabuli jedině prvočíslo 3.

Příkladem čísla, které vyhovuje, je 124563987 (dokonce je to nejmenší z nich). Pro toto číslo na tabuli napíšeme 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3.

Komentář. Přestože to pro úplnost řešení není nutné, ukážeme, jak jsme k nějakému vyhovujícímu číslu mohli přijít. Přirozený způsob je střídat lichá a sudá čísla tak, aby dvouciferná čísla končící lichým číslem byla dělitelná třemi. Pro každou sudou číslici najdeme vhodný násobek tří, například 21, 45, 63, 87, z čehož dostaneme číslo 921456387.

Ukážeme ještě systematický postup, jak přijít k nejmenšímu vyhovujícímu číslu. Začneme zleva a budeme postupně zkoušet připisovat co nejmenší číslice. Vždy, když by se na tabuli mělo objevit prvočíslo jiné než 2 či 3, vrátíme se o krok zpět. Tento proces vylučování nevhodných čísel vypadá následovně:

- ▷ 123␣␣␣␣␣␣ nefunguje, 23 je velké prvočíslo.
- ▷ 1243␣␣␣␣␣ nefunguje, 43 je velké prvočíslo.
- ▷ 12453␣␣␣␣ nefunguje, 53 je velké prvočíslo.
- ▷ 1245637␣␣ nefunguje, 37 je velké prvočíslo.
- ▷ 124563879 nefunguje, 79 je velké prvočíslo.
- ▷ 124563897 nefunguje, 97 je velké prvočíslo.
- ▷ 12456397␣ nefunguje, 97 je velké prvočíslo.

▷ 124563987 funguje.

Počítačem lze ověřit, že existuje 3 072 možných vyhovujících čísel.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna dvojmístná čísla, jejichž nejmenším prvočíselným dělitelem je číslo 7. [Jsou to čísla $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 11 = 77$, $7 \cdot 13 = 91$. Musí jít o násobky sedmi, tedy čísla tvaru $7k$, přičemž k nemůže mít menšího prvočíselného dělitele než 7. To vylučuje hodnoty $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$. Pro $k \geqq 15$ má již číslo $7k$ více než dvě číslice.]

N2. Dokažte, že každé složené dvojmístné číslo má prvočíselného dělitele menšího než číslo 10. [Sporem. Co kdyby existovalo dvojmístné složené číslo, jehož každý prvočíselný dělitel je alespoň 10? Jelikož se jedná o složené číslo, musí mít v prvočíselném rozkladu alespoň dvě prvočísla, ale ta musí být alespoň 10, čili uvažované číslo by bylo alespoň $10 \cdot 10 = 100$, a tedy ne dvojmístné.]

D1. Najděte všechna trojmístná čísla, která se skládají pouze z číslic 1, 2, 3, 4 (nemusí být použity všechny) a každé dvojmístné číslo určené jeho sousedními číslicemi je dělitelné číslem a) 11, b) 7. [a) Čísla 111, 222, 333, 444; protože dvojmístná čísla dělitelná 11 jsou právě ta se stejnými číslicemi. b) 142, 214, 421. Možná dvojmístná čísla dělitelná sedmi jsou 14, 21 a 42, přičemž z nich musíme vybrat dvě tak, aby poslední číslice prvního čísla byla totožná s první číslicí druhého čísla.]

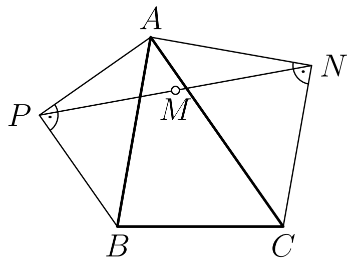
D2. Jeník napsal na tabuli několik různých prvočísel (aspoň tři). Když sečetl libovolná dvě z nich a tento součet zmenšil o 7, bylo výsledné číslo mezi napsanými. Která čísla mohla na tabuli být? [63–B–II–2]

D3. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli. [58–B–I–1]

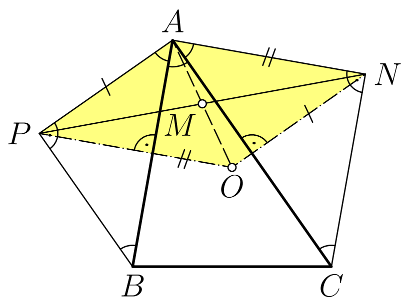
D4. Na tabuli je napsáno jedno nebo několik různých dvojmístných přirozených čísel. Číslici c na tabuli nazveme *dobrou*, je-li součet těch čísel z tabule, která obsahují číslici c, roven číslu 71. a) Které z číslic 0 až 9 mohou být dobré? b) Kolik nejvíce číslic může být současně dobrých?[71–C–II–3]

2. *V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 45°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABP a ACN s přeponami AB a AC. Označme M střed úsečky PN. Dokažte, že úsečka AM má délku rovnou polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC.*

(Patrik Bak, Anastasia Bredichina)



Řešení. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Víme, že bod O leží na ose úsečky AB. Jelikož je trojúhelník ABP rovnoramenný, na ose úsečky AB leží i bod P. Přímka PO je tak kolmá na úsečku AB, neboť je její osou. Z rovnoramennosti trojúhelníku ACN také máme $|\sphericalangle CAN| = |\sphericalangle NCA| = 45°$. Proto platí $|\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAN| = 45° + 45° = 90°$. Tedy úsečky PO a AN jsou rovnoběžné, neboť jsou obě kolmé na úsečku AB. Analogicky jsou rovnoběžné i úsečky AP a ON. Čtyřúhelník $APON$ je tak rovnoběžník a jeho úhlopříčky se půlí. Bod M, který je středem úhlopříčky PN, je tedy i středem úhlopříčky AO. Proto $|AM| = |AO|/2$, což jsme měli dokázat.



Jiné řešení. Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC a O je její střed. Protože $|PA| = |PB|$ a $|OA| = |OB|$, jsou trojúhelníky PAO a PBO shodné podle věty *sss*. Analogicky jsou shodné i trojúhelníky NAO a NCO.*

Jelikož BAC je obvodový úhel kružnice opsané trojúhelníku ABC, který přísluší jejímu středovému úhlu BOC, tak podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí

$$|\sphericalangle BOC| = 2|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot 45° = 90°.$$

Protože OB a OC jsou poloměry kružnice k, trojúhelník BOC je rovnoramenný pravoúhlý s přeponou BC. Pak platí (viz také návodnou úlohu N2)

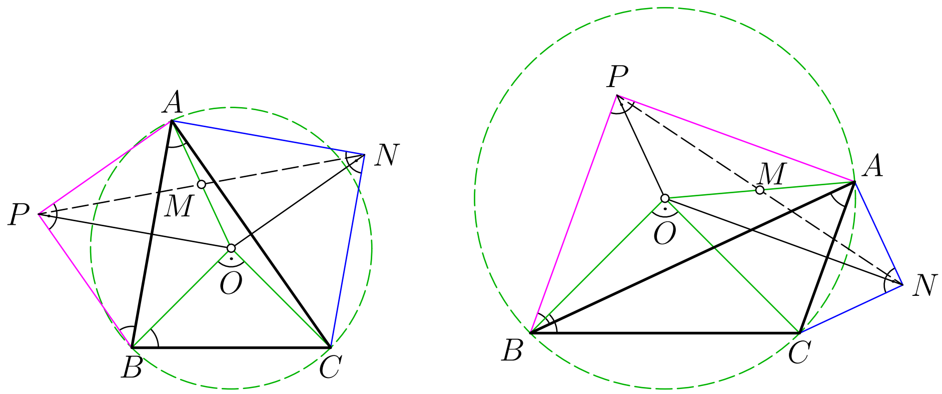
$$\frac{|BP|}{|BA|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|BO|}{|BC|}.$$

Platí i

$$|\sphericalangle PBO| = |\sphericalangle PBA| \pm |\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle OBC| \pm |\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle ABC|,$$

kde úhly sčítáme, pokud bod O leží v polorovině BAC a jinak odečítáme. Proto jsou trojúhelníky PBO a ABC podle věty *sus* podobné. Analogicky jsou podobné i trojúhelníky NCO a ACB.

* Při zápisech shodnosti a podobnosti je nutné psát vrcholy ve správném pořadí, např. pokud trojúhelník ABC je shodný s XYZ, tak úhly ACB a XZY musí být shodné atd.



Shrnutím dostáváme, že platí následující podobnosti, resp. shodnosti:

$$\triangle PAO \cong \triangle PBO \sim \triangle ABC \sim \triangle NOC \cong \triangle NOA.$$

Trojúhelníky PAO a NOA jsou tak podobné a mají společnou stranu AO, musí být tedy shodné. Proto je čtyřúhelník $APON$ rovnoběžník, střed M jeho úhlopříčky PN je současně středem úhlopříčky AO, a tedy $|AM| = |AO|/2$.

KOMENTÁŘ. Úlohu lze řešit i postupným vyjadřováním délek úseček. Než se do toho pustíme, je dobré si rozmyslet, zda budeme schopni takové výpočty dotáhnout do konce. Poloměr kružnice opsané umíme snadno zjistit (doplňující úloha D1). Nejtěžším úkolem je zjistit délku úsečky AM. Ta je však těžnicí v trojúhelníku APN, a tedy můžeme využít vzorec (doplňující úloha D5) vyjadřující délku těžnice pomocí délek stran trojúhelníku. Strany vyjádříme snadno, jelikož máme v zadání mnoho úhlů pěkných velikostí 45°, 90° a 135°.

Uvažujme obvyklé značení a, b, c délek stran trojúhelníku ABC. Poloměr R kružnice jemu opsané umíme ze známého vztahu (viz také doplňující úlohu D1) vyjádřit jako $R = a/(2\sin 45°) = a/\sqrt{2}$. Z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků ACN, ABP určíme $|AN| = b/\sqrt{2}$ a $|AP| = c/\sqrt{2}$. Trojúhelníky ABC a APN mají u vrcholu A po řadě úhel 45° a 135°. Také v nich známe délky dvou stran vycházejících z vrcholu A. Proto podle doplňujících úloh D2 a D3* umíme dopočítat i stranu proti vrcholu A

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2},$$
$$|PN|^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{bc}{\sqrt{2}}.$$

Na závěr už jen použijeme vztah z doplňující úlohy D5 pro výpočet délky těžnice AM, který následně zjednodušíme:

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= \frac{|AN|^2 + |AP|^2}{2} - \frac{|PN|^2}{4} = \\ &= \frac{b^2/2 + c^2/2}{2} - \frac{b^2/2 + c^2/2 + bc/\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}}{8} = \frac{a^2}{8}. \end{aligned}$$

* Stejný výpočet lze provést i použitím kosinové věty.

Tedy $|AM| = a\ /(2\sqrt{2}) = R/2$, což jsme měli dokázat.

Na závěr k tomuto řešení dodáme, že ačkoli jsme dokázali požadované tvrzení, nezískali jsme dodatečný vhled do geometrické situace. Např. jsme si neuvědomili, že čtyřúhelník $APON$ (kde O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC) je rovnoběžník, nebo jsme neodhalili dvojice podobných trojúhelníků zmiňované ve druhém řešení. Pokud by například soutěžní úkol od nás vyžadoval ukázat silnější tvrzení, že bod M je středem úsečky AO, tak by výpočetní řešení bylo výrazně náročnější.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jak v daném trojúhelníku najdeme střed kružnice opsané? [Střed kružnice opsané trojúhelníku se nachází v průsečíku os jeho stran.]

N2. Uvažujme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů a délky ramen. [$90°$, $45°$, $45°$ a ramena délek $\sqrt{2}/2$. Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné. Nemohou tak být oba pravé. Proto se jedná o úhly BAC a ABC, součet jejich velikostí je $180° - 90° = 90°$, tedy oba mají velikost $45°$. Z Pythagorovy věty pro délku r odvěsen platí $r^2 + r^2 = 1^2$ čili $r = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.]

N3. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě označíme S, T, U, V středy stran AB, BC, CD, DA. Dokažte, že úsečka SU půlí úsečku VT. [Úsečka ST je střední příčkou trojúhelníku ACB a úsečka VU je střední příčkou trojúhelníku ACD. Proto jsou úsečky ST a VU rovnoběžné s úhlopříčkou AC, a tedy i rovnoběžné navzájem. Analogicky jsou rovnoběžné i úsečky VS a TU. Proto je $STUV$ rovnoběžník a jeho úhlopříčky, tedy úsečky SU a VT, se půlí.]

N4. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ACB| = 90°$ a $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Stranám AB a AC jsou vně připsány rovnostranné trojúhelníky ABP a ACN. Označme S střed úsečky AB. a) Dokažte, že přímky NS a AP jsou rovnoběžné. b) Dokažte, že trojúhelníky ABC a NSA jsou shodné. c) Nechť T, U jsou těžiště po řadě trojúhelníků ABP, ACN. Dokažte, že trojúhelníky TAU a PAC jsou podobné a určete koeficient jejich podobnosti. [a) Nechť M je střed strany AC. Přímka SM je střední příčkou trojúhelníku ABC, proto je rovnoběžná se stranou CB, tedy kolmá ke straně AC. Proto i přímka SM je osou strany AC, na které leží z rovnoramennosti trojúhelníku ACN i bod N. Tedy přímka NS je kolmá ke straně AC. K ní je kolmá i přímka AP, jelikož $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BAP| = 90°$. b) Platí též $|\sphericalangle SAN| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAN| = 90°$. Jelikož přímka SN je osou strany AC rovnoramenného trojúhelníku ACN, je i osou jeho protilehlého úhlu, tedy $|\sphericalangle SNA| = 30°$. Trojúhelníky ABC a NSA se tak shodují ve velikostech vnitřních úhlů a v délkách stran AN a AC, jsou tak podle věty *usu* shodné. c) Těžnice v rovnostranném trojúhelníku je rovněž osou úhlu, proto $|\sphericalangle TAU| = 30° + 30° + 30° = 90° = |\sphericalangle PAC|$. Těžnice rovnostranného trojúhelníku se stranou dlouhou x má délku $x\sqrt{3}/2$ (Pythagorova věta), tedy vzdálenost jeho vrcholu od těžiště je $2/3 \cdot x\sqrt{3}/2 = x\sqrt{3}/3$. Proto $|AT|/|AP| = |AU|/|AC| = \sqrt{3}/3$. Podobnost trojúhelníků TAU a PAC tak plyne z věty *sus* a hledaný koeficient podobnosti je $\sqrt{3}/3$.]

N5. Uvažujme trojúhelník ABC, ve kterém je $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky AC označme D, obraz C podle AB označme E a obraz B podle AD označme F. Dokažte, že $|CF| = |DE|$. [70–B–S–2]

Následující doplňující úlohy jsou zaměřeny na vyjádření délek v trojúhelníku pomocí délek jeho stran, resp. velikostí úhlů. Takové vyjádření můžeme použít při částečném nebo úplném řešení některých geometrických úloh. Ve všech úlohách používáme standardní značení délek stran a velikostí úhlů trojúhelníku ABC.

D1. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC s ostrým úhlem α je roven $a/(2\sin\alpha)$. [Označme O střed kružnice opsané, R její poloměr a S střed strany BC. Z věty o obvodovém a středovém úhlu má úhel BOC velikost 2α. Z rovností $|OB| = |OC| = R$ plyne $|\sphericalangle BOS| = \alpha$. Z pravoúhlého trojúhelníku BOS tak získáme

$\sin\alpha = |BS|/R$, tedy $R = a/(2\sin\alpha)$. Na závěr dodejme, že v případě $\alpha \geqq 90°$ dostaneme $R = a/(2\sin(180° - \alpha))$, což je týž vztah, jelikož $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. (Tvrzení také okamžitě plyne z rozšířené sinové věty $a/\sin\alpha = 1/(2R)$.)]

D2. V trojúhelníku ABC platí $\alpha = 45°$. Pomocí délek stran b, c vyjádřete a) výšku ke straně c, b) délku strany a. [a) $v_c = b\sqrt{2}/2$, b) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}}$. Nechť P je pata výšky ke straně c. a) Trojúhelník APC je rovnoramenný pravoúhlý s přeponou AC, proto $|CP| = v_c = b/\sqrt{2} = b\sqrt{2}/2$. Stranu a dopočítáme Pythagorovou větou z pravoúhlého trojúhelníku BCP, kde $|PB| = |c - b/\sqrt{2}|$,

$$a^2 = \left(c - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2},$$

tedy $a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}}$.]

D3. Vyřešte předchozí úlohu pro trojúhelník, ve kterém je $\alpha = 135°$. [Opět získáme $|CP| = b/\sqrt{2}$. Jediný rozdíl je v tom, že nyní $|PB| = c + b/\sqrt{2}$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník BCP dostaneme $a = \sqrt{b^2 + c^2 + bc\sqrt{2}}$. Postupy z obou úloh lze zobecnit pro libovolný úhel α a získáme tak vztah $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ známý jako *kosinová věta*. V případě tupého úhlu α platí $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$.]

D4. Nechť ABC je trojúhelník s tupým úhlem α. Patu výšky z vrcholu C označíme P. Pomocí délek jeho stran vyjádřete $|PA|$. Jak se změní výsledek, pokud by byl úhel α ostrý? [a) Nechť $|PA| = x$. Z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ACP a BCP vyjádříme výšku dvěma způsoby $b^2 - x^2 = |CP|^2 = a^2 - (c+x)^2$. Pomocí prvního a třetího výrazu získáme $x = |PA| = (a^2 - b^2 - c^2)/2c$. V případě $\alpha < 90°$ postupujeme analogicky s tím rozdílem, že $|PB| = (a - x)$ a dostaneme $|PA| = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$.]

D5. Nechť ABC je trojúhelník a t_c délka jeho těžnice ke straně c. Dokažte, že platí

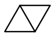
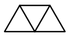
$$t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

[Důkaz uvedeme pro trojúhelník s ostrými úhly α, β. Důkazy zbývajících případů, které se jen drobně liší, přenecháváme čtenáři. Inspirováni předchozími úlohami označíme P patu výšky z bodu C a M střed strany AB. Označme dále $|PA| = x$ a $|PB| = y$, přičemž $x + y = c$. Potom $|PM| = |x - y|/2$ a délku těžnice můžeme vyjádřit z pravoúhlého trojúhelníku CMP jako $t_c^2 = v_c^2 + (x - y)^2/4$. Dokazovanou rovnost tak umíme ekvivalentně upravit na $4v_c^2 + (x - y)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (x + y)^2$ a následně na $4v_c^2 = 2(a^2 - y^2) + 2(b^2 - x^2)$. Důkaz dokončíme užitím rovností $a^2 - y^2 = b^2 - x^2 = v_c^2$, které plynou z Pythagorových vět pro trojúhelníky ACP a CPB.]

D6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [71–B–I–2]

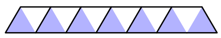
D7. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s nejdelší stranou BC. Uvnitř jeho stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Uvažujme dále body F a G tak, že $ABCF$ a $ACBG$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $|FD| = |GE|$. [71–B–S–2]

D8. Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$. [64–B–I–5]

3. *Pro která přirozená čísla n lze rovnostranný trojúhelník se stranou délky n rozřezat na shodné dílky tvaru: a)* *, b)* *? Dílky jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky 1.* (Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

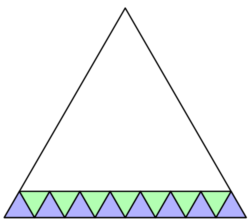
Řešení. Pro obě části uvedeme několik řešení. Ve všech řešeních uvažujeme jen rovnostranné trojúhelníky, i když rovnostrannost explicitně nezmíníme. Pro jednoduchost vyjadřování umístíme dělený trojúhelník tak, aby měl jednu stranu vodorovně a protilehlý vrchol nad ní.

Část a), první možnost. Podívejme se (obr. 1) na levý roh na vodorovné (spodní) straně trojúhelníku. Protože v tomto rohu máme úhel 60°, existuje jediný způsob, jak lze odříznout dílek, který bude obsahovat tento roh. Po odříznutí nám opět vznikne vlevo na vodorovné straně nový roh s úhlem 60°. Pokud tuto úvahu zopakujeme $(n-1)$-krát, tak nám zůstane trojúhelník se stranou délky 1, který není shodný s uvažovaným dílkem. Podúloze a) tedy žádné kladné celé číslo n nevyhovuje.



Obr. 1

Část a), druhá možnost. Předpokládejme, že máme trojúhelník rozřezaný na dílky tvaru a). Každý dílek ještě rozřežeme na dva jednotkové rovnostranné trojúhelníky a budeme zkoumat, jak takové rozřezání velkého trojúhelníku na jednotkové může vypadat. Vodorovná strana trojúhelníku s délkou n je pokryta n jednotkovými trojúhelníky*, které jsou orientovány *vrcholem nahoru*; nazvěme je modré (obr. 2). Po odstranění modrých trojúhelníků zůstane $n-1$ jednotkových trojúhelníků, z nichž každý má se zbytkem útvaru společnou jen jednu stranu a jsou orientovány *vrcholem dolů*; nazvěme je zelené. Každý modrý trojúhelník byl součástí dílku, jehož druhý trojúhelník je zelený. Jenže modrých trojúhelníků je n a zelených $n-1$, což je spor. Nevyhovuje tedy žádné n.

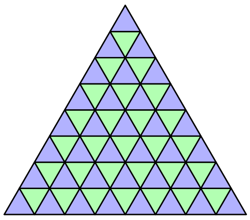


Obr. 2

Část a), třetí možnost. Trojúhelník se stranou délky n pokryjeme sítí jednotkových trojúhelníků. Každý z jednotkových trojúhelníků obarvíme buď modrou, nebo zelenou barvou tak, aby jednotkové trojúhelníky se společnou stranou měly různé barvy a nejvrchnější jednotkový trojúhelník byl modrý (jako na obrázku 3). Pomocí $n-1$ vodorovných čar je velký trojúhelník rozdělen na několik „řádků“. V každém řádku je více modrých

* Průnik strany jednotkového trojúhelníku a strany velkého trojúhelníku může být jen úsečka, bod nebo může být prázdný; jinak by jednotkový trojúhelník přesahoval mimo velký trojúhelník. Bod a prázdný průnik nemají délku. Úsečka musí odpovídat celé straně jednotkového trojúhelníku, tedy má délku 1.

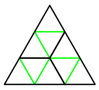
trojúhelníků než zelených, proto i v celém trojúhelníku je více modrých jednotkových trojúhelníků než zelených.* Každý dílek se však skládá ze dvou jednotkových trojúhelníků se společnou stranou, tedy jednoho modrého a jednoho zeleného. Pokud bychom uměli celý trojúhelník rozstříhat na dílky tvaru a), tak bychom museli mít stejně mnoho modrých a zelených jednotkových trojúhelníků, což ovšem není pravda. Proto žádné číslo n nevyhovuje.



Obr. 3

Část b), první možnost. Trojúhelník se stranou délky n pokryjeme sítí jednotkových trojúhelníků. Tato síť je rozdělena $n-1$ vodorovnými úsečkami na n řad jednotkových trojúhelníků. Horní řada se skládá z jednoho jednotkového trojúhelníku a každá další má o dva jednotkové trojúhelníky více. Celkový počet jednotkových trojúhelníků tak je $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ podle známého vztahu z návodné úlohy N3. Jelikož každý dílek pokrývá právě 3 jednotkové trojúhelníky, tak jejich celkový počet n^2 musí být dělitelný třemi, a proto i číslo n musí být dělitelné třemi. Tím jsme dostali nutnou podmínku pro rozřezání trojúhelníku.

Ukážeme, že tato podmínka je i postačující. Je-li n dělitelné třemi, můžeme velký trojúhelník rozřezat na $(n/3)^2$ malých trojúhelníků se stranou délky 3. Každý z těchto malých trojúhelníků pak rozřízneme na tři dílky ve tvaru b) jako na obrázku 4. Proto podúloze b) vyhovují právě všechna kladná celá čísla dělitelná třemi.



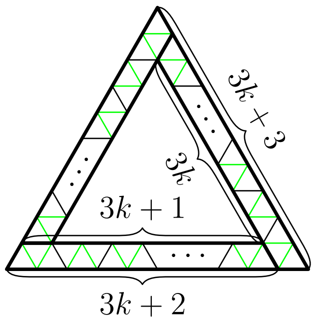
Obr. 4

Část b), druhá možnost. Pokud si obsah rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 1 označíme S, má dílek obsah $3S$. Trojúhelník se stranou délky n má obsah n^2S, jelikož se skládá z n^2 jednotkových trojúhelníků, jak jsme ukázali v předchozím řešení. (Obsah velkého trojúhelníku lze určit i s využitím toho, že je podobný jednotkovému trojúhelníku s koeficientem podobnosti n.) Porovnáním obsahů zjistíme, že velký trojúhelník musíme rozřezat na $n^2S/(3S)=n^2/3$ dílků, což musí být celé číslo. Číslo n tak musí být dělitelné 3.

Tvrzení, že každý trojúhelník se stranou délky $n=3k$ umíme rozřezat na dílky tvaru b), dokážeme matematickou indukcí podle k. Pro $k=1$ rozřízneme trojúhelník se stranou dlouhou 3 jako na obrázku 4.

* Počítáním lze ukázat, že modrých trojúhelníků je $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$ a zelených je $1+2+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$.

Uvažujme nyní libovolné kladné celé číslo k a předpokládejme, že trojúhelník se stranou délky $3k$ umíme rozříznout podle zadání. Ukážeme, že umíme rozříznout i trojúhelník se stranou délky $3(k+1)$. Vezměme rovnoramenný lichoběžník se základnami dlouhými $3k+2$, $3k+1$ a rameny délek 1, který je tvořen $3\cdot(2k+1)$ jednotkovými trojúhelníky a lze jej rozřezat na $2k+1$ dílků. Tři takové lichoběžníky uložíme podél hranice velkého trojúhelníku jako na obrázku 5. Ve středu nám zůstane rovnostranný trojúhelník se stranou délky $3k$, který umíme rozřezat na dílky podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz matematickou indukcí ukončen.



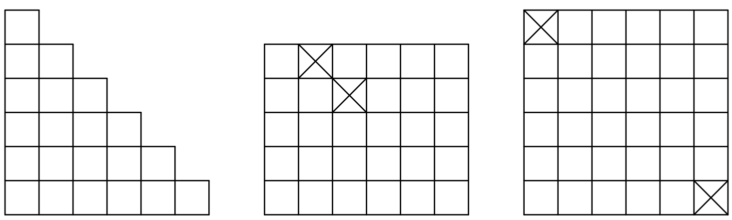
Obr. 5

Komentář. V některých řešeních jsme pokryli trojúhelník se stranou délky n sítí jednotkových trojúhelníků a předpokládali jsme, že řezy musíme vést podél hran jednotkových trojúhelníků tvořících tuto síť. Přestože v úlohách tohoto typu se často tento předpoklad pokládá za samozřejmý a využívá se bez důkazu, uvedli jsme i řešení, která jej nevyužívají. V části a) se jedná o třetí řešení. V části b) lze místo počítání pokrytých trojúhelníků (které tento předpoklad využívá) uvažovat o obsazích, jak jsme uvedli v druhém řešení části b).

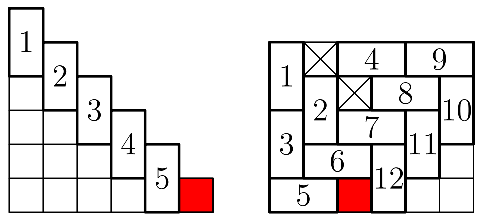
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která lze čtverec o rozměrech $n\times n$ rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×2. [Právě všechna sudá n. Pro $n=2k$ rozřežeme čtverec $2k\times 2k$ na $k\times k$ čtverců 2×2 a každý z nich na dva obdélníky 2×1. Pro liché n má čtverec obsah n^2 a jeden dílek má obsah 2. Avšak číslo n^2 není dělitelné dvěma, proto úkol splnit nejde.]

N2. Uvažujme následující tři útvary složené z jednotkových čtverců, ze kterých vystřihneme čtverce označené křížkem. Lze zbytky útvarů rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×2?



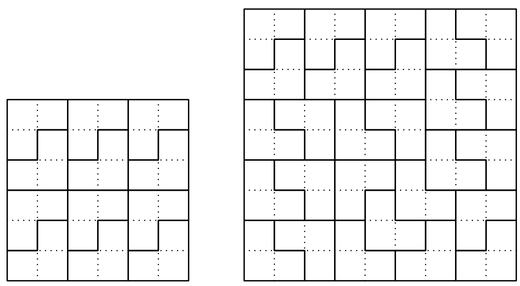
[Ve všech případech je odpověď ne. Pro první dva útvary to umíme zdůvodnit přímo: z velkého útvaru budeme postupně vyřezávat dílky tak, jak jsou vynuceny. Pořadí vyřezávání je znázorněno na obrázcích čísly – máme-li vyřezané dílky po některé číslo, pak musíme vyříznout také dílek s následujícím číslem (pokud takový existuje). V obou případech však po tomto nuceném řezání dílků oddělíme červený čtvereček 1×1.



Pro všechny tři útvary lze ukázat nemožnost pokrytí užitím jiné myšlenky: Každý z útvarů vybarvíme šachovnicově bílou a černou barvou. Jeden dílek zakrývá jeden čtvereček bílé a jeden černé barvy. Pokud bychom tedy uměli útvar rozstříhat na dílky, tak má stejně černých a bílých čtverečků, což ovšem není pravda.]

N3. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n je součet prvních n lichých čísel roven číslu n^2. [Pro $n = 1$ máme součet $1 = 1^2$, což je pravda. Pokud je součet prvních n lichých čísel roven n^2, tak po přičtení $(n + 1)$-tého lichého čísla, tedy čísla $2(n + 1) - 1$, dostaneme součet $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, jak jsme měli ukázat. Tedy postupným přidáváním dalších čísel se rovnost zachová. Takový typ důkazu se nazývá *matematická indukce* a můžete se o něm více dozvědět v doplňujících úlohách.]

N4. L-*tromino* se skládá ze tří jednotkových čtverců uspořádaných do tvaru písmene L. Pro které hodnoty n z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ lze čtverec $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru L-tromina? [Pro 6 a 9. Čtverec má obsah n^2 a jeden dílek má obsah 3. Proto n^2 musí být dělitelné třemi, a tedy i n. Čtverec 3×3 nelze rozřezat na základě rozboru případů. Čtverce 6×6 a 9×9 rozřežeme jako na obrázcích.]



Zájemcům doporučujeme seznámit se s matematickou indukcí. Jedná se o užitečnou důkazovou metodu, zejména v situacích založených na opakování jisté myšlenky. Můžete se s ní seznámit v brožuře Antonína Vrby *Princip matematické indukce* z edice *Školy mladých matematiků*.

D1. Pro která kladná celá čísla lze čtverec $n \times n$ rozřezat na dílky tvaru L-tromina? [Pro násobky tří větší než 3. Stačí doplnit řešení návodné úlohy N4 o rozřezání čtverců, jejichž délka strany je dělitelná třemi. Čtverec $6k \times 6k$ rozřežeme na obdélníky 3×2 a každý z nich rozřežeme na dvě L-tromina. Čtverce rozměrů $(6k + 3) \times (6k + 3)$ rozřežeme užitím matematické indukce. Jelikož umíme rozřezat obdélník 3×2, tak umíme rozřezat i obdélník $3 \times 6k$. Čtyři takovéto obdélníky uložíme podél hranice čtverce $(6k+3) \times (6k+3)$, čímž nám ve středu zůstane čtverec $(6k - 3) \times (6k - 3)$, který rozřežeme podle indukčního předpokladu.]

D2. Uvažujme čtverečkovou síť skládající se z $2^n \times 2^n$ jednotkových čtverečků. Libovolný jednotkový čtvereček obarvíme černě. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n lze tuto čtverečkovou síť pokrýt dílky tvaru L-tromina tak, aby jedině tento černý čtvereček zůstal nepokrytý. [Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ ve čtverci 2×2 tvoří bílá políčka právě jedno L-tromino. Předpokládejme, že tak lze pokrýt čtverec rozměrů

$2^n \times 2^n$, bez ohledu na polohu černého čtverečku. Čtverec $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ rozdělíme na čtyři čtverce $2^n \times 2^n$. V těch třech z nich, které nemají černé políčko, zabarvíme černě rohová políčka ve středu velkého čtverce; tato tři políčka lze pokrýt L-trominem. A podle indukčního předpokladu nyní i každý ze čtverců $2^n \times 2^n$ lze pokrýt L-trominy. Podrobnější řešení lze najít v řešení 8. úlohy 1. zimního kola KMS 2009/2010.]

D3. Určete všechna celá čísla $n \geqq 4$, pro která lze čtverec se stranou délky n rozřezat na dílky tvaru obdélníku o rozměrech 1×4. [Všechny násobky čtyř. Pokud je n liché, tak čtverec má obsah n^2, což není násobek obsahu dílku. Pokud je $n = 4k + 2$, tak rozdělíme čtverec na $(2k+1) \times (2k+1)$ menších čtverců 2×2, které šachovnicově obarvíme. Každý dílek se musí skládat ze dvou černých a ze dvou bílých čtverců 1×1, tedy obsahuje stejně černých a bílých čtverců. Ovšem celý čtverec obsahuje více čtverců jedné barvy. Pro $n = 4k$ rozřežeme čtverec na $k \times k$ čtverců o rozměrech 4×4 a každý z nich třemi rovnoběžnými řezy na čtyři obdélníky 1×4.]

D4. Uvažujme čtverečkovanou síť $n \times n$ skládající se z $n \times n$ jednotkových čtverečků. Do této sítě chceme bez překrývání umístit několik pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s přeponou délky 2, jejichž vrcholy se nacházejí ve vrcholech čtverečkové sítě. Navíc, každá strana čtverečku se musí nacházet v právě jednom trojúhelníku (uvnitř nebo na obvodu). Najděte všechna přirozená čísla, pro která je to možné. [KMS 39. ročník, 1. část, 2. kolo, úloha 8]

4. *a) Najděte příklad dvojmístného přirozeného čísla n takového, že číslo $1/n$ má ve svém desetinném zápise za desetinnou čárkou právě dvě číslice.*

b) Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla k, l existují právě dvě kladná racionální čísla, která mají v desetinném zápise za desetinnou čárkou právě k číslic a jejich převrácené hodnoty právě l číslic.

(Desetinný zápis uvažujeme nejkratší možný.) (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. a) Vyhovuje například číslo $n = 25$, pro které je $1/25 = 0{,}04$.

Dále uvedeme dvě řešení části b). V obou z nich budeme pro stručnost říkat, že kladné racionální číslo má *délku zápisu* d, pokud jeho nejkratší možný desetinný zápis má právě d číslic za desetinnou čárkou (všechna přirozená čísla tak mají délku 0).

Část b), první možnost. Kladné racionální číslo x s délkou zápisu d můžeme zapsat jako $c/10^d$, kde c je kladné celé číslo nedělitelné deseti (viz návodnou úlohu N3). Avšak číslo c může být dělitelné nějakou mocninou dvou nebo nějakou mocninou pěti, kterou můžeme zlomek krátit. Po převodu do základního tvaru tak ve jmenovateli dostaneme číslo tvaru $2^{d-z}5^d$ nebo 2^d5^{d-z}, kde z je nějaké kladné celé číslo. Kladné racionální číslo x má tedy délku zápisu d právě tehdy, když v základním tvaru má jmenovatel roven 2^a5^b pro nějaká nezáporná celá čísla a, b, z nichž jedno je rovné d a druhé rovné nejvýše d. Toto pozorování označíme (*).

Uvažujme kladné racionální číslo x v základním tvaru p/q, které má délku zápisu $k > 0$ a jeho převrácená hodnota $1/x = q/p$ má délku zápisu $l > 0$. Podle pozorování (*) jsou p i q tvaru 2^a5^b. Jelikož zlomek p/q je v základním tvaru, tak nejvýše jedno z čísel p, q je sudé a nejvýše jedno je dělitelné pěti. Také jsou obě čísla p, q různá od 1, protože čísla k, l jsou kladná. Proto jedno z čísel p, q obsahuje v prvočíselném rozkladu jen dvojky a druhé jen pětky.

Věnujme se nejprve případu, kdy q obsahuje dvojky. Protože q neobsahuje v prvočíselném rozkladu pětky a zápis p/q má délku zápisu k, musí podle (*) být $q = 2^k$. Protože p neobsahuje dvojky a zápis q/p má délku zápisu l, musí být $p = 5^l$. Číslo $x = 5^l/2^k$ splňuje díky (*) všechny požadované podmínky a je jedním z čísel, jejichž existenci jsme měli podle zadání dokázat. Jediným dalším takovým číslem je $2^l/5^k$, které získáme jako jedinou možnost v rozboru druhého případu (když q obsahuje pětky).

Část b), druhá možnost. Nechť p/q je základní tvar hledaného zlomku. Jelikož racionální číslo p/q má délku zápisu k, tak jej umíme zapsat jako*

$$\frac{p}{q} = \overline{a{,}b_1 \dots b_k} \qquad \text{nebo ekvivalentně} \qquad \frac{p}{q} = \frac{\overline{ab_1 \dots b_k}}{10^k},$$

kde a je nějaké nezáporné celé číslo a $b_1, \dots, b_k$ je k číslic, přičemž $b_k \neq 0$. Stejně zapíšeme i racionální číslo q/p s délkou zápisu l pomocí nezáporného celého čísla c a l číslic $d_1, \dots, d_l$, přičemž $d_l \neq 0$. Platí tedy

$$\frac{p}{q} = \frac{\overline{ab_1 \dots b_k}}{10^k}, \qquad \frac{q}{p} = \frac{\overline{cd_1 \dots d_l}}{10^l}.$$

* Vodorovnou čáru používáme k označení čísla, které vznikne, když čísla pod čarou zapíšeme za sebou. V této úloze v tomto zápisu vyznačujeme i polohu desetinné čárky. Např. pokud $a = 2024$, $b_1 = 7$ a $b_2 = 4$, pak $\overline{a{,}b_1b_2} = 2024{,}74$.

Pro lepší přehlednost si označíme $A = \overline{ab_1 \dots b_k}$ a $C = \overline{cd_1 \dots d_l}$. Po tomto nahrazení a odstranění zlomků dostaneme

$$10^k p = A \cdot q, \qquad 10^l q = C \cdot p,$$

z čehož po vzájemném vynásobení rovností a ekvivalentních úpravách postupně dostáváme

$$\begin{aligned} 10^k p \cdot 10^l q &= A \cdot q \cdot C \cdot p, \\ 10^{k+l} &= A \cdot C, \\ 2^{k+l} \cdot 5^{k+l} &= A \cdot C. \end{aligned}$$

Protože $b_k \neq 0$ a $d_l \neq 0$, čísla $A = \overline{ab_1 \dots b_k}$ a $C = \overline{cd_1 \dots d_l}$ nejsou dělitelná 10, platí tedy

$$(A, C) \in \left\{ \left(2^{k+l}, 5^{k+l}\right), \left(5^{k+l}, 2^{k+l}\right) \right\}.$$

Uvážíme dva případy:

▷ $(A, C) = \left(2^{k+l}, 5^{k+l}\right)$. Odtud

$$\frac{p}{q} = \frac{A}{10^k} = \frac{2^{k+l}}{10^k} = \frac{2^l}{5^k} \qquad \text{a} \qquad \frac{q}{p} = \frac{C}{10^l} = \frac{5^{k+l}}{10^l} = \frac{5^k}{2^l},$$

tedy p/q má délku zápisu k a q/p má délku zápisu l.

▷ $(A, C) = \left(5^{k+l}, 2^{k+l}\right)$. Odtud

$$\frac{p}{q} = \frac{A}{10^k} = \frac{5^{k+l}}{10^k} = \frac{5^l}{2^k} \qquad \text{a} \qquad \frac{q}{p} = \frac{C}{10^l} = \frac{2^{k+l}}{5^l} = \frac{2^k}{5^l},$$

tedy opět p/q má délku zápisu k a q/p má délku zápisu l.

Hledaná racionální čísla jsou tedy $2^l/5^k$ a $5^l/2^k$.

Komentář. Přestože to zadání nevyžaduje, ukážeme způsob, jak najít všechna čísla n vyhovující části a). Na základě pozorování (*) číslo n musí být tvaru $2^a 5^b$, kde jedno z nezáporných celých čísel a, b je 2 a druhé je nejvýše 2. V úvahu tedy přicházejí

▷ $n = 2^2 = 4$, což není dvojmístné;
▷ $n = 2^2 \cdot 5 = 20$, pro které $1/n = 0{,}05$;
▷ $n = 2^2 \cdot 5^2 = 100$, což opět není dvojmístné;
▷ $n = 5^2 = 25$, pro které $1/n = 0{,}04$;
▷ $n = 2 \cdot 5^2 = 50$, pro které $1/n = 0{,}02$;

tedy vyhovují čísla n z množiny $\{20, 25, 50\}$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zjistěte, kolik desetinných míst mají za desetinnou čárkou (v nejkratším možném zápisu) čísla 1/8, 1/32, 1/256. [Mají postupně 3, 5, 8 číslic. Kromě písemného vydělení to lze zjistit i rozšířením zlomku vhodnou mocninou pěti: $1/8 = 5^3/10^3$, $1/32 = 5^5/10^5$ a $1/256 = 5^8/10^8$.]

N2. Zjistěte, pro která kladná celá čísla n má číslo a) $n/3$, b) $n/30$, c) $n/18$ konečný desetinný zápis. Svá tvrzení zdůvodněte. [a), b) násobky tří, c) násobky devíti. Má-li zlomek ve jmenovateli mocninu čísla 10, má konečný desetinný zápis. Platí i opačná implikace. Toto pozorování je přesněji formulováno a dokázáno v následující návodné úloze. Zlomky $n/3$

a $n/30$ z částí a), b) obsahují ve jmenovateli prvočíslo 3. Mají-li konečný desetinný zápis, potom i jejich čitatel, tedy číslo n, musí být dělitelný třemi, jelikož mocniny 10 jsou dělitelné jedině prvočísly 2 a 5. Naopak pokud $n = 3k$ pro nějaké k, tak dostáváme zlomky $k/1$ a $k/10$ s konečným desetinném zápisem. V části c) je jmenovatel dělitelný 3^2, takže podobně dostaneme, že i n musí být dělitelné devíti. Konečně pokud $n = 9k$, tak $n/18 = k/2 = 5k/10$, což má konečný desetinný zápis.]

N3. Dokažte, že kladné racionální číslo q má ve svém nejkratším desetinném zápisu právě $d \geqq 1$ číslic za desetinnou čárkou právě tehdy, když $q = c/10^d$ pro nějaké kladné celé číslo c nedělitelné deseti. [Předpokládejme, že q má d číslic v desetinném zápise. Pokud v čísle q posuneme desetinnou čárku o d míst doprava, tedy jej vynásobíme číslem 10^d, dostaneme celé číslo $c = q \cdot 10^d$. Navíc c nemůže končit nulou, protože šlo o nejkratší možný zápis čísla q. Proto $q = c/10^d$. Naopak máme-li $q = c/10^d$ takto zapsané, potom po vydělení čísla c číslem 10^d dostaneme za desetinnou čárkou právě d posledních číslic čísla c. Jelikož c není dělitelné deseti, tak jde o nejkratší možný zápis.]

N4. Najděte všechna kladná celá čísla vyhovující části a) soutěžního úlohy. [Viz vzorové řešení.]

N5. Najděte všechny dvojice nesoudělných kladných celých čísel x, y, pro která platí a) $xy = 441$, b) $xy = 13^4 \cdot 14^n$, kde n je dané kladné celé číslo. [a) $(1, 3^2 \cdot 7^2)$, $(3^2, 7^2)$, $(7^2, 3^2)$, $(3^2 \cdot 7^2, 1)$, b) $(1, 13^4 \cdot 14^n)$, $(2^n, 13^4 \cdot 7^n)$, $(7^n, 13^4 \cdot 7^n)$, $(13^4, 14^n)$, $(14^n, 13^4)$, $(2^n \cdot 13^4, 7^n)$, $(7^n \cdot 13^4, 2^n)$, $(13^4 \cdot 14^n, 1)$. a) Rozložíme $441 = 3^2 \cdot 7^2$. Jelikož x a y jsou nesoudělná, tak prvočíslo 3 se může vyskytnout v prvočíselném rozkladu jen jednoho z čísel x, y. Totéž platí pro prvočíslo 7. Máme proto čtyři možné dvojice (x, y), jak jsme uvedli. Část b) řešíme podobně s tím, že uvažujeme rozklad $2^n \cdot 7^n \cdot 13^4$, který nyní obsahuje tři prvočísla. Dostaneme osm řešení.]

D1. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel (a, b), pro které platí

$$4^a = b^2 + 7.$$

[KMS 42. ročník, 1. část, 2. kolo]

D2. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je součin $(2^n + 1)(3^n + 2)$ dělitelný číslem 5^n. [61–A–S–3]

D3. Rozhodněte, zda existuje 2024 navzájem různých kladných celých čísel s následující vlastností: Uvážíme-li všechny možné podíly dvou různých čísel (uvažujeme a/b i b/a), dostaneme čísla s konečnými desetinnými rozvoji (za desetinnou čárkou) navzájem různých nenulových délek. [CAPS 2024, úloha 1]

D4. Rozhodněte, zda existují kladná celá čísla n a k taková, že

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla. [67–A–II–4]

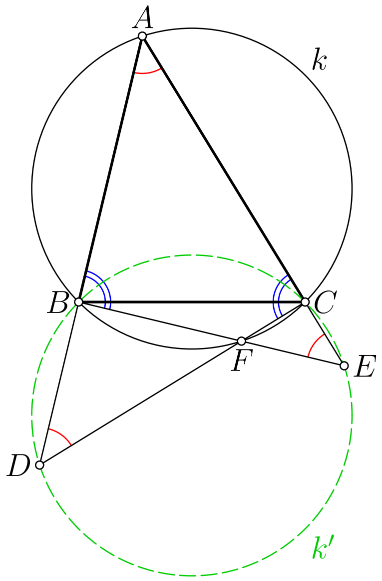
D5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru $2^a + 3^b - 5^c$, přičemž a, b, c jsou nezáporná celá čísla. [68–A–III–5]

Zájemcům o získání celistvějších poznatků z oblasti dělitelnosti celých čísel doporučujeme brožuru Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* z edice *Škola mladých matematiků* a také brožuru Aloise Apfelbecka *Kongruence*, která obsahuje širokou potřebnou teorii k práci se zbytky po dělení.

5. *Označme k kružnici opsanou ostroúhlému trojúhelníku ABC. Její obraz v souměrnosti podle přímky BC protíná polopřímky opačné k BA a CA po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že úsečky CD a BE se protínají na kružnici k. Určete všechny možné velikosti úhlu BAC.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ (obr. 1). Obraz kružnice k v osové souměrnosti podle přímky BC označíme k'. Oblouk BC kružnice k obsahující bod A se v této osové souměrnosti zobrazí na oblouk BC kružnice k' obsahující body D a E, protože body D a E podle zadání leží v polorovině opačné k BCA. Jelikož jde o shodné oblouky, tak jim přísluší shodné obvodové úhly (viz také návodnou úlohu N3), tedy platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CEB|$. Trojúhelníky CAD a BAE tedy mají dvě dvojice shodných úhlů, proto i $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle EBA|$.

Pokud předpokládáme, že se úsečky CD a BE protínají na kružnici k, tak součet velikostí shodných úhlů ACD a EBA je 180°, tedy $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle EBA| = 90°$. Z rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku CAD (resp. BAE) dostáváme, že $|\sphericalangle BAC| = 45°$, což je jediná možná velikost úhlu BAC.

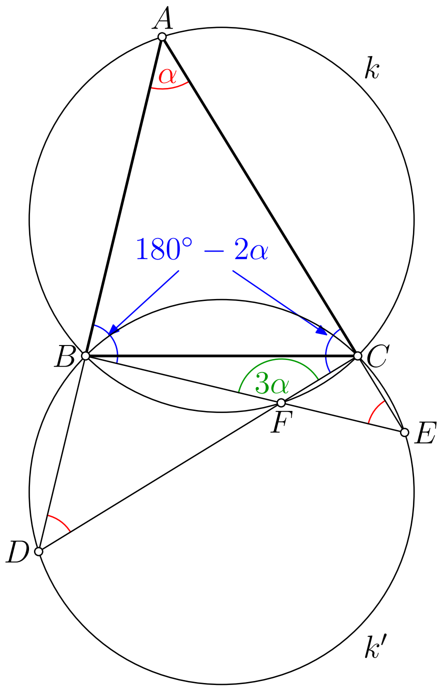


Obr. 1

Naopak pokud $|\sphericalangle BAC| = 45°$, tak rovnoramenné trojúhelníky CAD a BAE jsou pravoúhlé s pravými úhly ACD a ABE. Proto průsečík F přímek CD a BE vytvoří spolu s body B, A, C tětivový čtyřúhelník, tedy F leží na kružnici k.

JINÉ ŘEŠENÍ (obr. 2). Označme F průsečík úseček CD a BE a α hledanou velikost úhlu BAC. Stejným argumentem (o obvodových úhlech) jako v předchozím řešení dostaneme, že $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CEB| = \alpha$. Trojúhelníky CAD a BEA jsou tak rovnoramenné a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABE| = 180° - 2\alpha$. Úhel DBF je vedlejším k úhlu EBA, tudíž má velikost $180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$. Úhel CFB je vnějším úhlem při vrcholu F v trojúhelníku BFD. Vyjádříme jej jako součet zbylých dvou vnitřních úhlů, tedy $|\sphericalangle CFB| = |\sphericalangle BDF| + |\sphericalangle DBF| = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Bod F leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CFB| = \alpha + 3\alpha = 180°$, čili právě tehdy, když $\alpha = 45°$. Tím jsme určili jedinou možnou velikost úhlu BAC.



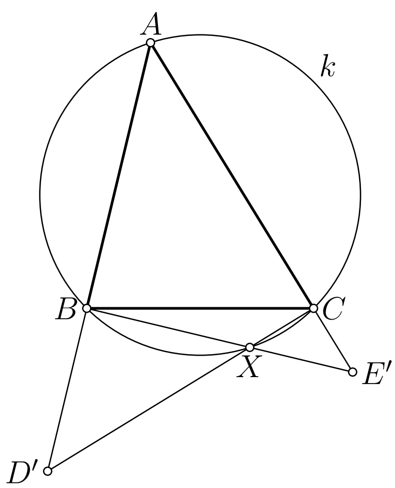
Obr. 2

Jiné řešení (obr. 3). Úlohu přeformulujeme následovně. Nejprve zvolíme bod X kratšího oblouku BC kružnice k opsané trojúhelníku ABC (který neobsahuje bod A). Poté označíme D' průsečík přímek CX, AB a E' průsečík přímek BX a AC (Uvažujeme jen ty body X, pro které tyto průsečíky existují a leží v polorovině BCA.). Úsečky CD a BE se protnou na kružnici k (v bodě X) právě tehdy, když body D' a E' leží na kružnici s ní souměrně sdružené podle přímky BC. Jelikož úhel ABC je vnějším úhlem trojúhelníku BCD' a úhel ACB je vnějším úhlem trojúhelníku BCE' platí

$$|\sphericalangle BD'C| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCX| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle CE'B| = |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle CBX|.$$

Proto

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BD'C| + |\sphericalangle CE'B| =& |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| - (|\sphericalangle BCX| + |\sphericalangle CBX|) = \\ =& 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - (180^\circ - |\sphericalangle BXC|) = 180^\circ - 2|\sphericalangle BAC|.\end{aligned}$$



Obr. 3

V zadané situaci však platí $D' = D$, $E' = E$ a zároveň úhly ADC, AEB a BAC mají stejnou velikost, jelikož přísluší stejně dlouhé tětivě ve shodných kružnicích. Z toho dostáváme, že $2|\sphericalangle BAC| = 180° - 2|\sphericalangle BAC|$, z čehož máme $|\sphericalangle BAC| = 45°$. Pro úplnost ještě dodáme, že úsečky CD a BE leží podle zadání v polorovině opačné k BCA, proto i jejich průsečík se bude nacházet na oblouku BC kružnice k neobsahujícím bod A.

Naopak pokud $|\sphericalangle BAC| = 45°$, tak za bod X zvolíme průsečík úsečky CD s kružnicí. Tehdy $D' = D$, $|\sphericalangle AD'C| = |\sphericalangle ADC| = 45°$ a $|\sphericalangle AE'B| = 180° - 2|\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle AD'C| = 45°$. Proto bod E' leží s body B, C, D na kružnici, což znamená, že $E' = E$. Úsečky CD a BE se tak protínají na kružnici k.

Návodné a doplňující úlohy:

Před řešením této úlohy vám doporučujeme seznámit se s větou o obvodovém a středovém úhlu a s vlastnostmi tětivových čtyřúhelníků. K objevení tohoto vztahu navádí první návodná úloha. Zájemcům doporučujeme brožurku Stanislava Horáka *Kružnice* z edice *Škola mladých matematiků*.

N1. Na kružnici k se středem O jsou dány body B a C tak, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Na delším oblouku BC zvolme bod A a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby měl úhel BAC co největší velikost. c) Jak se změní výsledek předešlé úlohy, pokud bod A můžeme zvolit libovolně na kružnici k (s výjimkou bodů B, C)? [V rovnoramenných trojúhelnících BOC, COA a AOB spočítejte úhly nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ. Dejte si pozor na správné sčítání, resp. odečítání úhlů podle toho, zda je bod O uvnitř nebo vně trojúhelníku ABC. V a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, stejně jako v b) nezávisle na volbě δ. V c) vyjde 120°. Řešení úkolu b) lze přímo zobecnit na důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu. Řešení úlohy c) zase ukazuje, že v tětivovém čtyřúhelníku je součet velikostí protilehlých úhlů roven 180°.]

N2. Připomeňte si následující tvrzení: Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet velikostí jeho protějších úhlů je 180°. [Důkaz naleznete například. na str. 20 (Věta 5) ve zmiňované brožuře *Kružnice*.]

N3. Dokažte, že obloukům stejné délky téže kružnice přísluší obvodové úhly stejné velikosti. [Označme uvažované oblouky AB a CD a S střed kružnice. Jelikož mají stejnou délku, tak jim přísluší shodné středové úhly ASB a CSD. Z rovnosti středových úhlů tak vyplývá i rovnost obvodových úhlů.]

N4. Označme S střed oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A. Dokažte, že AS je osou úhlu BAC. [Oblouky BS a SC jsou stejně dlouhé, proto jim přísluší stejné obvodové úhly BAS a CAS.]

N5. Dvě shodné kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Na kružnici k zvolíme bod C a na kružnici l bod D tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky CD. Dokažte, že $|BC| = |BD|$. [Úhly ACB a ADB jsou obvodové úhly příslušející delšímu oblouku AB shodných kružnic k a l, jsou tak shodné, z čehož přímo plyne $|BC| = |BD|$.]

N6. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané a M střed přepony AC. Předpokládejme, že body B, I, M, C leží na jedné kružnici. Určete velikost úhlu BAC. [60°. Jedná se o zjednodušenou úlohu 72–B–I–6.]

D1. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. [69–B–S–2]

D2. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. [63–B–I–3]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patami výšek D, E, F ležícími po řadě na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F ve středové souměrnosti podle středu strany AB leží na přímce DE. Určete velikost úhlu BAC. [57–A–II–3, slovenská verze]

D4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC? [68–A–II–3]

D5. Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu u vrcholu A, pokud mají kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod. [67–B–I–3]

6. *Kladná reálná čísla x, y, z splňují nerovnosti $xy \geqq 2$, $xz \geqq 3$, $yz \geqq 6$. Jakou nejmenší hodnotu může nabývat výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?* (Patrik Bak)

Řešení. Zkoumaný výraz doplníme na tři druhé mocniny dvojčlenů. Takové výrazy mají pouze nezáporné hodnoty, jelikož druhá mocnina každého reálného čísla je nezáporná. Doplnění zvolíme tak, aby nám mimo druhé mocniny zůstaly násobky výrazů xy, xz, yz, které odhadneme ze zadání:

$$\begin{aligned} 13x^2 + 10y^2 + 5z^2 &= 4x^2 + y^2 + 9x^2 + z^2 + 9y^2 + 4z^2 = \\ &= (2x - y)^2 + (3x - z)^2 + (3y - 2z)^2 + 4xy + 6xz + 12yz \geqq \\ &\geqq 4xy + 6xz + 12yz \geqq 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 6 = 98. \end{aligned}$$

Rovnost nastává pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, tedy nalezený dolní odhad je dosažitelný. Proto nejmenší hodnota zkoumaného výrazu je 98.

Komentář. Přestože uvedené řešení je stručné, není přímočaré na něj přijít. Proto teď ilustrujme myšlenky, které k němu mohou vést. První ideou je získat dolní odhad vhodným doplněním na tři čtverce (druhé mocniny) dvoučlenů. Z každého čtverce dostaneme dva z členů x^2, y^2, z^2 a jeden z členů xy, xz, yz. Členy xy, xz a yz nám pak zůstanou mimo čtverce a ty odhadneme podle zadání. Klíčovým krokem je správně naložit s konstantami, které jsou u x^2, y^2 a z^2. K tomu nám pomůže pozorování, že všechny tyto tři konstanty umíme vyjádřit jako součet čtverců: $13 = 2^2 + 3^2$, $10 = 1^2 + 3^2$ a $5 = 1^2 + 2^2$. To nám napovídá, že vhodný rozklad na tři čtverce bychom mohli získat vytvořením vhodných dvojic z těchto šesti členů. Máme celkem 8 možností. Můžeme vyzkoušet všechny, například z rozkladu

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = (2x - 3y)^2 + (3x - z)^2 + (y - 2z)^2 + 12xy + 6xz + 4yz \geqq 66$$

získáme slabý odhad, kterého nelze dosáhnout. Zkoušení si umíme usnadnit uhodnutím (např. na základě vyzkoušení několika trojic), že nejmenší hodnota výrazu nastane pro $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Čtverce pak zvolíme tak, aby pro tuto trojici nabývaly nuly.

Stejnou myšlenku lze podat mírně odlišným způsobem. Sečteme nerovnosti, které jsou speciálními případy známé nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ (viz návodnou úlohu N1)

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &\geqq 4xy \geqq 8, \\ 9x^2 + z^2 &\geqq 6xz \geqq 18, \\ 9y^2 + 4z^2 &\geqq 12yz \geqq 72, \end{aligned}$$

z čehož $13x^2 + 10y^2 + 5z^2 \geqq 98$. Rovnost nastává pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, čili skutečně jde o hledané minimum.

Jiné řešení. Označme $xy = 2a$, $xz = 3b$, $yz = 6c$ pro reálná čísla a, b, c, která podle zadání musí být větší nebo rovna 1. Pak platí $x^2 = 2a \cdot 3b/(6c) = ab/c$, podobně $y^2 = 4ac/b$, $z^2 = 9bc/a$, čímž úkol převedeme na hledání nejmenší hodnoty výrazu

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = 13 \cdot \frac{ab}{c} + 40 \cdot \frac{ac}{b} + 45 \cdot \frac{bc}{a} \tag{1}$$

pro reálná čísla $a, b, c \geqq 1$. Ukážeme, že nejmenší hodnota uvedeného výrazu je 98. Hodnotu 98 dosáhneme volbou $a = b = c = 1$.

Předpokládejme, že pro nějaká čísla $a, b, c \geqq 1$ nabývá výraz hodnoty menší než 98. Při řešení opakovaně využijeme tvrzení z doplňující úlohy D4: funkce $kx + \ell/x$ s kladnou reálnou proměnnou x a kladnými reálnými konstantami k, ℓ nabývá v bodě $x = M = \sqrt{\ell/k}$ minima o hodnotě $2\sqrt{k\ell}$ a pro $x \geqq M$ je rostoucí.

Výraz (1) lze vyjádřit jako funkci proměnné c předpisem $f(c) = kc + \ell/c$, kde $k = 40a/b + 45b/a$ a $\ell = 13ab$. Ta dosahuje pro kladné c minimum v bodě $M_c = \sqrt{13ab/(40a/b + 45b/a)}$. Nejprve vyloučíme případ, kdy $M_c > 1$, a pak vyřešíme zbývající případ, kdy $M_c \leqq 1$. Pokud $M_c > 1$, pak výraz (1) nabývá minima v bodě $c = M_c$, jehož hodnota je

$$2\sqrt{13ab \cdot (40a/b + 45b/a)} > \frac{2\sqrt{13ab \cdot (40a/b + 45b/a)}}{M_c} = 2\left(40 \cdot \frac{a}{b} + 45 \cdot \frac{b}{a}\right),$$

přičemž jsme využili, že $1 > 1/M_c$. Na získaný výraz se podíváme jako na funkci proměnné a/b a odhadneme jeho nejmenší hodnotu z doplňující úlohy D4 (resp. můžeme použít i nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem z doplňující úlohy D1), čímž dostaneme

$$2\left(40 \cdot \frac{a}{b} + 45 \cdot \frac{b}{a}\right) \geqq 2 \cdot 2\sqrt{40 \cdot 45} > 98,$$

což je spor s předpokladem, že výraz nabývá hodnotu menší než 98. Proto $M_c < 1$ a výraz (1) nabývá minima pro $c = 1$. Zbývá nám tak najít minimum výrazu

$$13ab + 40 \cdot \frac{a}{b} + 45 \cdot \frac{b}{a}. \tag{2}$$

Podobně jako v předchozím odstavci zkoumejme nyní výraz (2) jako funkci proměnné b. Nechť $M_b = \sqrt{40a/(13a + 45/a)}$. Pokud $M_b > 1$, tak řešením nerovnice $40a > 13a + 45/a$ dostaneme, že musí platit $a > \sqrt{5/3}$. V tomto případě má výraz (2) minimum

$$2\sqrt{40a\,(13a + 45/a)} = 2\sqrt{40}\sqrt{13a^2 + 45} \geqq 2\sqrt{40}\sqrt{13 \cdot 5/3 + 45} \geqq 98.$$

Proto platí $M_b \leqq 1$ a výraz (2) nabývá minima v bodě $b = 1$.

Zbývá nám najít minimum výrazu $53a + 45/a$. Jelikož $M_a = \sqrt{45/53} < 1$, tak hledané minimum je 98 pro $a = 1$.

Zkoumaný výraz (1) tedy nabývá minima pro $a = b = c = 1$, čemuž odpovídají hodnoty $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Jiné řešení. Řešení založíme na intuitivním pozorování: nejmenší hodnotu má zadaný výraz tehdy, když jsou hodnoty x, y, z co nejmenší, přičemž jejich zmenšování je limitováno jistými nerovnostmi. Uvažujme libovolnou trojici x, y, z splňující nerovnosti ze zadání. Pokud v nejvíce jedné nerovnosti nastává rovnost, tak existuje proměnná, která se nachází ve dvou ostrých nerovnostech. Předpokládejme, že se jedná o proměnnou x, tedy že platí $xy > 2$ a $xz > 3$ (zbývající dva případy jsou analogické). Obě hodnoty $2/y$ a $3/z$ jsou menší než x. Zmenšíme tedy číslo x na číslo x' rovné maximu těchto dvou hodnot. Potom pro trojici x', y, z platí $x'y \geqq 2$, $x'z \geqq 3$, přičemž v alespoň jednom případě nastává rovnost. Stále platí $yz \geqq 6$, avšak $13x'^2 + 10y^2 + 5z^2 < 13x^2 + 10y^2 + 5z^2$. Každou trojici x, y, z můžeme touto úvahou, příp. ještě jejím zopakováním, nahradit trojicí, pro kterou v alespoň dvou nerovnostech nastává rovnost, přičemž nestoupne hodnota zkoumaného výrazu. Proto se nám stačí omezit na trojice, kde alespoň ve dvou ze zadaných nerovností nastává rovnost.

Uvažujme případ, kdy $xy = 2$ a $xz = 3$. Dosazením $y = 2/x$, $z = 3/x$ do zkoumaného výrazu dostáváme

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = 13x^2 + \frac{40}{x^2} + \frac{45}{x^2} = 13x^2 + \frac{85}{x^2}. \tag{3}$$

Zbývá nám tedy minimalizovat výraz s jednou proměnnou x. Ta však nemůže být libovolná. Musí totiž platit

$$6 \leqq yz = \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x} = \frac{6}{x^2}, \qquad \text{tedy} \qquad x \leqq 1.$$

Výraz (3) tedy minimalizujeme pro $x \in (0, 1\rangle)$. Tento výraz má tvar $f(x) = kx^2 + \ell/x^2$ (pro vhodné kladné konstanty k, ℓ). Podle doplňující úlohy D3 funkce f nabývá minima pro $x = \sqrt[4]{85/13}$, což je více než 1, a pro menší kladné hodnoty x je klesající. Proto minimum na intervalu $(0, 1\rangle$ nastane v hraničním případě $x = 1$. V tomto případě dostáváme $y = 2$, $z = 3$ a nejmenší hodnotu výrazu $13 \cdot 1^2 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 = 98$.

Zbývající dva případy prověříme analogicky. Pokud $xy = 2$ a $yz = 6$, tak dosadíme $x = 2/y$ a $z = 6/y$ a minimalizujeme funkci

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = \frac{52}{y^2} + 10y^2 + \frac{180}{y^2} = 10y^2 + \frac{232}{y^2}$$

za podmínky $3 \leqq xz = 2 \cdot 6/y^2$, tedy $y \leqq 2$. Analogicky jako v prvním případě určíme, že tato funkce nabývá minima pro $y = \sqrt[4]{232/10} > 2$ a pro $y \in (0, 2\rangle$ je klesající. V naší situaci proto nejmenší hodnotu získáme pro $y = 2$, což opět vede ke trojici $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Pokud $xz = 3$ a $yz = 6$, tak dosadíme $x = 3/z$ a $y = 6/z$ a minimalizujeme funkci

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = \frac{117}{z^2} + \frac{360}{z^2} + 5z^2 = 5z^2 + \frac{477}{z^2}$$

za podmínky $2 \leqq xy = 3 \cdot 6/z^2$, tedy $z \leqq 3$. Tato funkce nabývá minima pro $z = \sqrt[4]{477/5} > 3$ a pro menší hodnoty je klesající, proto minimum výrazu 98 dosáhneme v tomto případě pro $z = 3$, tedy také pro trojici $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Ve všech třech případech jsme zjistili, že hodnota zkoumaného výrazu je alespoň 98. Navíc jsme ukázali, že této hodnoty je dosaženo pro $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Tím je řešení ukončeno.

KOMENTÁŘ. Rozbor jednotlivých případů můžeme zkrátit, uhodneme-li minimum (třeba na základě náčrtu grafu funkce). Např. pro výraz (3) nám stačí dokázat, že $13x^2 + 85/x^2 \geqq 98$. To lze udělat ekvivalentní úpravou na nerovnost $(1 - x^2)(85 - 13x^2) \geqq 0$, která pro $x \in (0, 1\rangle$ zjevně platí.

Na závěr ještě dodáme, že tato metoda je z uvedených řešení nejobecnější a dají se pomocí ní snadno řešit i variace této úlohy, např. pokud bychom místo výrazu v zadání měli hledat nejmenší možnou hodnotu výrazu $84x^2+3y^2+z^2$. V posledních dvou případech nám také vyjde nejmenší možná hodnota 105 pro trojici $(x,y,z) = (1,2,3)$. Avšak v prvním případě dospějeme k funkci $84x^2 + 21/x^2$, která dosahuje nejmenší možné hodnoty 84 pro $x = \sqrt[4]{21/84} = 1/\sqrt{2}$ (následně $y = 2\sqrt{2}$ a $z = 3\sqrt{2}$, čili $yz = 12 > 6$). Vidíme, že obecně nemáme zaručeno, že nejmenší hodnoty výrazu dosáhneme tehdy, když ve všech třech nerovnostech ze zadání nastanou rovnosti. Proto řešení soutěžní úlohy založené na úvaze, že pro dosažení nejmenší hodnoty výrazu musí nastat všechny tři z rovností $xy = 2$, $xz = 3$ a $yz = 6$, obecně není správné, i když pro zadaný výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$ vede ke správnému výsledku.

Návodné a doplňující úlohy:

Návodné úkoly N1 až N3 jsou zaměřeny na úpravy výrazů na *čtverce*, čímž myslíme druhé mocniny mnohočlenů (v našem případě dvojčlenů). Takové úpravy jsou často klíčové při dokazování nerovností či hledání extrémů výrazů, což si můžete vyzkoušet v úlohách N4 a N9. Úloha N7 upozorňuje na nesprávné řešení úlohy N5, která je podobná i samotné soutěžní úloze. Úloha N8 naznačuje, jak lze tuto nesprávnou úvahu opravit.

N1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b$. [Dokazovanou nerovnost ekvivalentně upravíme na $(a-b)^2 \geqq 0$.]

N2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$, přičemž rovnost nastává jedině pro $a = b = c$. [Naznačíme dva důkazy. První: ekvivalentní úpravy začínající vynásobením dvěma vedoucí k nerovnosti $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqq 0$; rovnost nastává právě tehdy, když všechny závorky jsou rovny nule, tedy když $a = b = c$. Druhý: sečteme nerovnosti $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $b^2+c^2 \geqq 2bc$, $c^2+a^2 \geqq 2ca$ a vydělíme dvěma.]

N3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí
a) $5a^2 + 6b^2 + 7c^2 \geqq 4ab + 6ac + 8bc$,
b) $3a^2 + 3b^2 + 8c^2 \geqq 4(ab + ac + bc)$,
c) $5a^2 + 5b^2 + 2c^2 \geqq 2ab + 4ac + 4bc$.

Určete všechny trojice čísel a, b, c, pro které nastává rovnost. [a) Nerovnost získáme součtem nerovností $2a^2 + 2b^2 \geqq 4ab$, $3a^2 + 3c^2 \geqq 6ac$, $4b^2 + 4c^2 \geqq 8bc$, které jsme dostali vynásobením nerovnosti z úlohy N1 vhodnými konstantami. Rovnost musí nastat ve všech třech nerovnostech, z čehož máme $a = b = c$. b) Sečteme nerovnosti $2a^2 + 2b^2 \geqq 4ab$, $a^2+(2c)^2 \geqq 4ac$, $b^2+(2c)^2 \geqq 4bc$. Rovnost nastává pro $a = b = 2c$. c) Sečteme nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $4a^2 + c^2 \geqq 4ac$, $4b^2 + c^2 \geqq 4bc$. Rovnost nastává pro $a = b = c/2$. Všechny tři nerovnosti lze také dokázat úpravou na $2(a-b)^2 + 3(a-c)^2 + 4(b-c)^2 \geqq 0$, $2(a-b)^2 + (a-2c)^2 + (b-2c)^2 \geqq 0$, resp. $(a-b)^2 + (2a-c)^2 + (2b-c)^2 \geqq 0$.]

N4. Kladná reálná čísla x, y splňují $xy \geqq 2$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $4x^2 + 9y^2$? [24. Platí $4x^2 + 9y^2 = (2x-3y)^2 + 12xy \geqq 12xy \geqq 24$. Tuto hodnotu dostaneme, pokud $2x = 3y$ a $xy = 2$, tedy pokud $x = \sqrt{3}$ a $y = 2\sqrt{3}/3$.]

N5. Nezáporná reálná čísla x, y, z splňují $x + y \geqq 6$, $x + z \geqq 8$, $y + z \geqq 10$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2+y^2+z^2$? [56. Pokud $z > 8$, pak $x^2+y^2+z^2 \geqq z^2 > 64$. Pokud $z \leqq 8$, tak čísla $8 - z$ a $10 - z$ jsou kladná, proto platí $x^2+y^2+z^2 \geqq$ $\geqq (8-z)^2 + (10-z)^2 + z^2 = 3(z-6)^2 + 56 \geqq 56$. Hodnota 56 je menší než v případě $z \geqq 8$ a je dosažena pro $(x,y,z) = (2,4,6)$ (dokonce je to jediný případ). Proto 56 je hledaná nejmenší hodnota. Ukážeme ještě jeden způsob, jak ukázat nerovnost $x^2+y^2+z^2 \geqq 56$, na kterém ilustrujeme několik užitečných myšlenek. Budeme se opírat o hypotézu, že nejmenší hodnoty bude výraz nabývat pro $(x,y,z) = (2,4,6)$. (K této hypotéze lze dojít na základě zkoušení různých hodnot.) Budeme vycházet z nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ z úlohy N1. Na levé straně chceme dostat nějaké z výrazů x^2, y^2, z^2 a na pravé straně nějaké z výrazů x, y, z. To dostaneme, pokud do nerovnosti z role N1 dosadíme jednu proměnnou a jednu konstantu. Dosadíme-li proměnnou x, tak chceme zvolit konstantu 2, aby rovnost nastávala v případě $x = 2$ jako v naší hypotéze. Tak dostaneme, že platí nerovnost $x^2+2^2 \geqq 4x$. Podobně platí i $y^2+4^2 \geqq 8y$ a $z^2+6^2 \geqq 12z$.

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $x^2+y^2+z^2 \geqq 4x+8y+12z-56$. Pro dokončení důkazu nám stačí vhodně odhadnout hodnotu výrazu $4x + 8y + 12z$, k čemuž můžeme využít nerovnosti ze zadání. Konkrétně platí $4x + 8y + 12z - 56 = 4(x + z) + 8(y + z) - - 56 \geqq 4 \cdot 8 + 8 \cdot 10 - 56 = 56$, čímž je důkaz ukončen. Ještě vysvětlíme, jak jsme přišli k úpravě $4x+8y+12z = 4(x+z)+8(y+z)$. Obecně chceme najít takové konstanty a, b, c, pro které bude platit $4x + 8y + 12z = a(x + y) + b(x + z) + c(y + z)$. Po roznásobení a porovnání koeficientů při x, y, z dostaneme, že musí platit $a+b = 4$, $a+c = 8$, $b+c = 12$. Vyřešením této soustavy dostaneme, že $(a, b, c) = (0, 4, 8)$.]

N6. Nezáporná reálná čísla x, y, z splňují $x + y \geqq 4$, $x + z \geqq 8$, $y + z \geqq 10$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + y^2 + z^2$? [56. Úlohu lze řešit stejně jako předchozí.]

N7. Rozhodněte, zda je následující řešení úlohy N5 úplné a korektní: Jelikož chceme dostat co nejmenší hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$, tak chceme, aby i výrazy $x + y$, $x + z$, $y + z$ nabývaly co nejmenší hodnoty, tedy aby v nich byla rovnost. Dostáváme tak soustavu tří rovnic $x + y = 6$, $x + z = 8$, $y + z = 10$, která má jediné řešení $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. Nejmenší hodnota je tedy dosažena u tohoto řešení a je to $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$. [Řešení není správné, neboť neobsahuje korektní důkaz, že při jiných volbách čísel nemůžeme dostat hodnotu výrazu menší než 56. To, že taková úvaha není korektní, lze vidět, když ji použijeme k řešení úlohy N6. Tehdy dostaneme soustavu $x+y = 4$, $x+z = 8$, $y+z = 10$ s řešením $(x, y, z) = (1, 3, 7)$, pro které $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 3^2 + 7^2 = 59$. Avšak nejmenší možná hodnota je stále 56, protože jsme v řešení úlohy N5 nerovnost $x+y \geqq 6$ nevyužili.]

N8. Dokažte, že při řešení úlohy N5 se stačí omezit na trojice x, y, z, pro které platí alespoň dvě z rovností $x+y = 6$, $x+z = 8$, $y+z = 10$. [Na začátek uvedeme, že pro $(x, y, z) = (2, 4, 6)$ nabývá výraz hodnoty 56 a jsou splněny všechny tři rovnosti. Vezměme si trojici (x, y, z), pro kterou platí nejvýše jedna z uvedených rovností. Vyřešíme případ, kdy $x + y > 6$ a $x + z > 8$; zbývající dva případy jsou analogické. Nechť $x' = \max(6 - y, 8 - z)$. Pokud x' není kladné, tak platí $y \geqq 6$ a $z \geqq 6$. Zkoumaný výraz má tak hodnotu alespoň $6^2 + 8^2 = 100$, což je více než hodnota 56 pro $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. V opačném případě je x' kladné a platí $x' + y \geqq 6$, $x' + z \geqq 8$ a alespoň v jedné z nerovností nastává rovnost. Avšak $x' < x$, tedy hodnotu výrazu jsme tím zmenšili a zvýšili počet dosažených rovností. Pokud i po této úpravě platí nejvýše jedna z rovností, tak můžeme úpravu ještě jednou zopakovat. Proto pro každou trojici (x, y, z), pro kterou nastává rovnost v nejvíce jedné z nerovností, má výraz větší hodnotu než pro některou trojici s alespoň dvěma dosaženými rovnostmi.]

N9. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $9x^2+36/x^2$, pokud a) $x \in (0,\infty)$, b) $x \in (0, 1\rangle$, c) $x \in \langle 2,\infty)$. [a) 36, b) 45, c) 45. Výraz lze doplnit na čtverec $9x^2 + 36/x^2 = = (3x - 6/x)^2 + 36 \geqq 36$. Rovnost nastane, když je argumentem druhé mocniny nula, tedy pro $x = \sqrt{2} \in (0,\infty)$. Tím jsme ukázali, že 36 je nejmenší hodnota výrazu pro část a). Uvnitř druhé mocniny je výraz, který je rostoucí pro $x \in (0,\infty)$. To plyne z faktu, že pro $0 < x_1 < x_2$ lze nerovnost $3x_1 - 6/x_1 < 3x_2 - 6/x_2$ ekvivalentně upravit na $0 < (x_2 - x_1)(3 + 6/(x_1x_2))$. Výraz $3x - 6/x$ nabývá nulové hodnoty pro $x = \sqrt{2}$. Pro $x \in (0, \sqrt{2}\rangle$, a tedy i pro $x \in (0, 1\rangle$, je výraz rostoucí a záporný, proto jeho druhá mocnina $(3x - 6/x)^2$ je klesající. Nejmenší možnou hodnotu výrazu pro část b) tak dostaneme pro největší možné x, tedy pro $x = 1$, což odpovídá hodnotě 45. V části c) je výraz $3x - 6/x$ kladný a rostoucí, tedy i jeho druhá mocnina bude kladná a rostoucí. Nejmenší možnou hodnotu výrazu tak získáme pro $x = 2$, což odpovídá hodnotě 45.]

D1. Dokažte, že pro libovolná dvě nezáporná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x = y$.* [Jelikož na obou stranách máme nezáporná čísla, nerovnost je ekvivalentní s $(x + y)^2/4 \geqq xy$, a ta zase s $(x - y)^2 \geqq 0$.]

---

* Této nerovnosti se říká nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem a platí i pro více než dvě čísla, tedy $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n \geqq \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$ platí pro libovolných n nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D2. Dokažte, že pro libovolné kladné reálné konstanty k, ℓ je funkce $y = kx - \ell/x$ pro kladná čísla x rostoucí. [Funkce kx je rostoucí a funkce ℓ/x je pro $x > 0$ klesající, tedy funkce $-\ell/x$ je rostoucí. Zkoumaná funkce $kx + (-\ell/x)$ je tedy součet dvou rostoucích funkcí, a proto je rostoucí. Jiným řešením je ukázat, že pro libovolné $0 < x_1 < x_2$ platí $kx_1 - \ell/x_1 < kx_2 - \ell/x_2$, jelikož je tato nerovnost ekvivalentní $(x_1 - x_2)(k + \ell/(x_1x_2))) < 0$, což v našem případě zjevně platí.]

D3. Uvažujme funkci $y = kx^2 + \ell/x^2$ pro kladné reálné číslo x a kladné reálné konstanty k, ℓ. Nechť $M = \sqrt[4]{\ell/k}$. Dokažte, že tato funkce nabývá minima pro $x = M$, přičemž pro $x \in (0, M\rangle$ je klesající a pro $x \in \langle M, \infty)$ je rostoucí. [Jde o obecnou verzi úlohy N9. Předpis funkce vhodně doplníme na čtverec: $y = (\sqrt{k} \cdot x - \sqrt{\ell}/x)^2 + 2\sqrt{k\ell}$. Výraz v závorce je podle úlohy D2 rostoucí a nabývá nuly právě pro $x = M$. Proto je výraz v závorce pro $x \leqq M$ záporný, tedy jeho absolutní hodnota, a tedy i druhá mocnina klesá. Pro $x \geqq M$ je zase kladný, a proto funkce pro $x \geqq M$ roste.]

D4. Uvažujme funkci $y = kx + \ell/x$ pro kladné reálné číslo x a kladné reálné konstanty k, ℓ. Nechť $M = \sqrt{\ell/k}$. Dokažte, že tato funkce nabývá minima pro $x = M$, přičemž pro $x \in (0, M\rangle$ je klesající a pro $x \in \langle M, \infty)$ je rostoucí. [Podobně jako v předchozí úloze řešení vyplývá z úpravy $y = (\sqrt{kx} - \sqrt{\ell/x})^2 + 2\sqrt{k\ell}$. Důkaz, že funkce $\sqrt{kx} - \sqrt{\ell/x}$ je rostoucí, je podobný důkazu v úloze D2.]

D5. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

kde x je libovolné reálné číslo. Pro která x výraz V této hodnoty nabývá? [64–B–II–2]

D6. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

[68–B–II–1]

D7. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

[68–B–I–4]

D8. Reálná čísla a, b splňují vztah $a - b \geqq 2$. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $a^4 + b^4$. [Hledaná nejmenší hodnota je 2, které dosáhneme pro $a = 1$, $b = -1$. Důkaz nerovnosti $a^4 + b^4 \geqq 2$ naleznete v řešení 3. úlohy 1. letního kola KMS 2012/2013.]

D9. Najděte maximální hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ pro reálná čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ jsou z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. [68–A–II–4]

D10. Součet 74 (ne nutně různých) reálných čísel z uzavřeného intervalu $\langle 4, 10\rangle$ je 356. Určete největší možnou hodnotu součtu jejich druhých mocnin. [73–A–II–4]