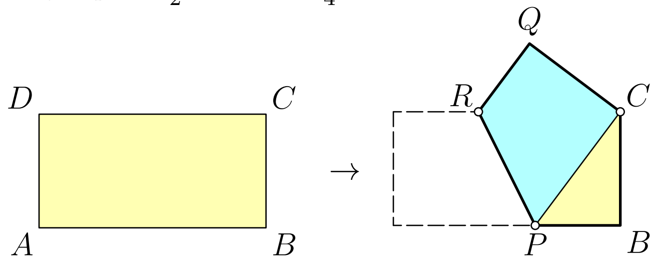
Úlohy domácího kola kategorie C

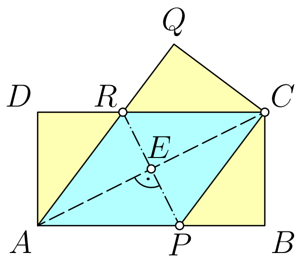
1. *List papíru ve tvaru obdélníku $ABCD$ o rozměrech $a \times b$, kde $a > b$, přeložíme jako na obrázku tak, že vrchol A splyne s bodem C. Zdůvodněte, proč pro obsah S výsledného pětiúhelníku $PBCQR$ platí $\frac{1}{2}ab < S < \frac{3}{4}ab$.*



(Josef Tkadlec)

Řešení. V tomto i dalších řešeních budeme výrazem $[XYZ]$ značit obsah mnohoúhelníku XYZ.

Nejdříve si uvědomme, že každým překládáním papíru dostaneme obraz překládané části v osové souměrnosti podle přímky, podél které papír překládáme. V našem případě je přeložená část papíru, tj. čtyřúhelník $PCQR$ osově souměrný, a tedy nepřímo shodný, s čtyřúhelníkem $PADR$ podle přímky PR.



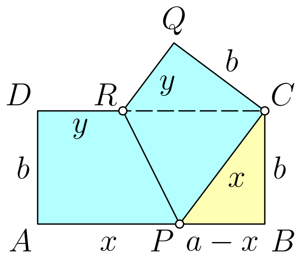
Bod A po přeložení papíru splyne s bodem C, osa souměrnosti PR je tak osou úsečky AC, a tedy prochází jejím středem E, který je průsečíkem úhlopříček obdélníku $ABCD$. Dle návodné úlohy N5 rozděluje úsečka PR obdélník $ABCD$ na dvě shodné části, proto $[APRD] = [PBCR]$. Odtud již plyne dolní odhad $S = [PBCQR] >$ $> [PBCR] = \frac{1}{2}ab$.

Pro důkaz horního odhadu si všimneme, že z osové souměrnosti dle PR jsou trojúhelníky ADR a CQR shodné. Platí tedy

$$S = [PBCR] + [CQR] = \frac{1}{2}[ABCD] + [ARD].$$

K dokončení důkazu stačí ukázat, že $[ARD] < \frac{1}{4}[ABCD]$. Protože $[ARD] = \frac{1}{2}|AD||DR|$ a $[ABCD] = |AD||CD|$, je poslední nerovnost ekvivalentní s $|DR| < \frac{1}{2}|CD|$, neboli $|DR| < |CR|$.

Můžeme si všimnout, že $|CR| = |AR|$ a $|AR|$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníku ARD s odvěsnou délky $|DR|$, proto $|DR| < |CR|$ a důkaz je hotov.



Jiné řešení. Lichoběžník $APRD$ po přeložení papíru přejde v lichoběžník $CPRQ$, tyto lichoběžníky jsou proto shodné, speciálně platí, že $|QC| = b$. Označme podle obrázku $|AP| = |PC| = x$ a $|DR| = |QR| = y$. Pak $|PB| = a - |AP| = a - x$.

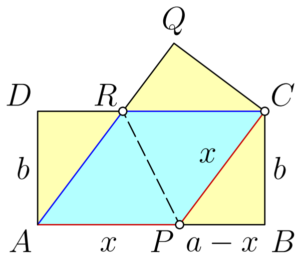
Obsah S hledaného pětiúhelníku (s využitím vzorců pro obsah lichoběžníku a obsah trojúhelníku) můžeme vyjádřit jako:

$$S = [PCQR] + [PBC] = \frac{(x+y)b}{2} + \frac{(a-x)b}{2} = \frac{yb}{2} + \frac{ab}{2}.$$

Tento výraz je jistě větší než $\frac{1}{2}ab$, dolní odhad je tedy dokázán. K dokázání horního odhadu nám stačí ukázat, že

$$\frac{yb}{2} < \frac{ab}{4}$$

neboli $a > 2y$. To plyne například z toho, že $a - y$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníku CQR, jehož odvěsna QR má délku y, tedy $a - y > y$.



Jiné řešení. Uvedeme ještě řešení, které je založené na vyjádření obsahu pětiúhelníku $PBCQR$ pomocí a a b. Podobně jako v prvním řešení plyne z osové souměrnosti shodnost trojúhelníků CQR a ADR a také rovnosti $|AR| = |CR|$ a $|AP| = |CP|$. Tedy $APCR$ je deltoid, který má navíc protilehlé strany AP a RC rovnoběžné. Podle návodné úlohy N6 je to tedy nutně kosočtverec. Odtud už plyne, že trojúhelníky ADR a CBP jsou shodné podle věty *sss*.

Nyní vyjádříme obsah pětiúhelníku $PBCQR$ pomocí délek stran a, b daného obdélníku. Označme x délku úsečky AP jako na obrázku. Pravoúhlý trojúhelník PBC má délky stran $x, a - x$ a b. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$(a - x)^2 + b^2 = x^2.$$

Tuto rovnost upravíme a vyjádříme neznámou x

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Odtud
$$a - x = a - \frac{a^2+b^2}{2a} = \frac{2a^2-(a^2+b^2)}{2a} = \frac{a^2-b^2}{2a}.$$
Obsah trojúhelníku PBC je proto $\frac{1}{2}(a-x)b = (a^2-b^2)b/(4a)$ a obsah trojúhelníku APR je $\frac{1}{2}xb = (a^2+b^2)b/(4a)$. Hledaný obsah pětiúhelníku je
$$[PBCQR] = 2[PBC] + [PCR] = 2\frac{(a^2-b^2)b}{4a} + \frac{(a^2+b^2)b}{4a} = \\ = \frac{2a^2b-2b^3+a^2b+b^3}{4a} = \frac{3a^2b-b^3}{4a} = \frac{3ab}{4} - \frac{b^3}{4a}.$$
Zjevně platí:
$$\frac{3ab}{4} - \frac{b^3}{4a} < \frac{3ab}{4},$$
čímž je dokázán horní odhad ze zadání. K důkazu dolního odhadu stačí ukázat, že
$$\frac{3ab}{4} - \frac{b^3}{4a} > \frac{ab}{2} \quad \text{neboli} \quad \frac{ab}{4} > \frac{b^3}{4a}.$$
To je ekvivalentní s $a^2 > b^2$, což platí, jelikož $a > b$.

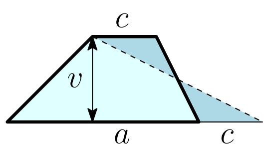
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Uvažujme čtverec $ABCD$, průsečík jeho úhlopříček označme E. Podle jaké přímky máme čtverec přeložit, aby bod A přešel do bodu E? [Podle osy úsečky AE.]

N2. Je daný trojúhelník ABC. Najděte všechny body X takové, že trojúhelníky ABC a ABX mají stejný obsah. [Všechny takové body tvoří dvě přímky rovnoběžné s AB ležící ve stejné vzdálenosti od této přímky jako bod C. Trojúhelníky se stejnou základnou mají totiž stejný obsah, právě když mají stejnou výšku.]

N3. Lichoběžník rozřízneme podél úhlopříčky. Který ze vzniklých trojúhelníků má větší obsah? [Ten, který obsahuje delší základnu, protože mají stejnou výšku k základnám lichoběžníku.]

N4. Připomeňte si, jak se počítá obsah lichoběžníku a proč tomu tak je. []



N5. Přímka procházející průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku $ABCD$ jej dělí na dva shodné útvary. Dokažte. [Označme E průsečík uhlopříček rovnoběžníku $ABCD$. Ať přímka procházející bodem E protne bez újmy na obecnosti strany AB, CD po řadě v bodech F a G. Pak trojúhelník AFE je shodný s trojúhelníkem CGE podle věty *usu* a také trojúhelníky ABC a CDA jsou shodné. Z toho už plyne dané tvrzení. Alternativně si můžeme uvědomit, že rovnoběžník $ABCD$ je středově souměrný podle bodu E a libovolná přímka procházející bodem E dělí rovnoběžník na dvě středově souměrné, tedy shodné části. Libovolný bod jedné části má totiž svůj obraz v druhé polorovině, takže v druhé části.]

N6. Dokažte, že deltoid, který má dvě protilehlé strany rovnoběžné, je nutně kosočtverec. [Nechť $ABCD$ je deltoid, pro který platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |AD|$ a AB je rovnoběžné s CD. Pak z rovnoběžnosti plyne $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD|$. Trojúhelníky ABC a ACD jsou tedy oba rovnoramenné se společnou základnou AC a se stejným úhlem u základny, tudíž jsou shodné podle věty *usu*. Čtyřúhelník $ABCD$ má tak všechny čtyři strany stejně dlouhé, tedy je to opravdu kosočtverec.]

N7. Je možné, aby v situaci ze soutěžní úlohy nastalo $|PB| > |AP|$? [Není to možné, protože $|AP| = |PC|$ z osové symetrie podle přímky PR. Zároveň $|PC|$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníku PBC, tj. jeho nejdelší strana a PB je jedna z odvěsen tohoto trojúhelníku.]

N8. Uvažujme situaci ze zadání soutěžní úlohy s tím, že $a = 3b = 3$. Vypočítejte obsah trojúhelníku PBC. [$\frac{2}{3}$. Pravoúhlý trojúhelník PBC má strany délek x, $3 - x$ a 1. Z Pythagorovy věty dostaneme $(3 - x)^2 + 1 = x^2$ a po úpravě (kvadratické členy se odečtou) $x = \frac{5}{3}$. Obsah trojúhelníku PBC je proto $\frac{2}{3}$.]

D1. Daný je lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a průsečíkem uhlopříček P. Víme, že obsah trojúhelníku ABP je 16 a obsah trojúhelníku BCP je 10. Vypočítejte obsah trojúhelníku ADP. [10. Obsah trojúhelníku ABC je stejný jako obsah trojúhelníku ABD, protože tyto trojúhelníky mají shodné základny a stejnou výšku (rovnou vzdálenosti obou základen). Obsah trojúhelníku ABC je součet obsahů trojúhelníků ABP a BPC, tedy 26. Obsah trojúhelníku ABD je proto také 26. Obsah trojúhelníku ADP je rozdíl obsahů trojúhelníků ABD a ABP, tedy je to $26 - 16 = 10$.]

D2. Vyjádřete obsah pětiúhelníku ze zadání soutěžní úlohy pomocí délek stran a, b daného obdélníku. [Viz poslední řešení úlohy.]

D3. Je dán čtverec se stranou délky 6 cm. Najděte množinu středů všech příček čtverce, které jej dělí na dva čtyřúhelníky, z nichž jeden má obsah 12 cm^2. (Příčkou čtverce rozumíme úsečku, jejíž krajní body leží na stranách čtverce.) [60–C–S–2]

D4. Uvažujme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC. Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X. Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A, S_B, S_C, S_D. a) Dokažte, že $S_B = S_D$. b) Vypočtěte rozdíl $S_C - S_A$. c) Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. [60–C–1–3]

2. *Přirozená čísla a, b jsou taková, že $a > b$, $a + b$ je dělitelné 9 a $a - b$ je dělitelné 11.*

a) Určete nejmenší možnou hodnotu čísla $a + b$.
b) Dokažte, že čísla $a + 10b$ i $b + 10a$ musí být dělitelná 99. (Jaromír Šimša)

Řešení. V části a) ukážeme, že hledaná hodnota je 27.

Z druhé podmínky ze zadání dostáváme, že $a+b$ je násobek 9, tj. 9, 18, 27 a tak dále. Z první a třetí podmínky máme $11 \mid a - b > 0$,* tj. $a - b \geqq 11$, takže i $a + b > a - b \geqq 11$. Proto $a + b \geqq 18$.

V případě $a + b = 18$ je $a - b < a + b = 18$, takže nutně platí $a - b = 11$, protože $11 \mid a - b > 0$. Řešením soustavy rovnic

$$a + b = 18 \quad \text{a} \quad a - b = 11$$

dostáváme $a = \frac{29}{2}$, $b = \frac{7}{2}$, což nevyhovuje zadání, protože to nejsou přirozená čísla.

Pro $a + b = 27$ již získáme vyhovující řešení $a = 19$, $b = 8$, a to řešením soustavy $a + b = 27$, $a - b = 11$.

b) Všimneme si, že $a + 10b = (a + b) + 9b$, kde první sčítanec $a + b$ i druhý sčítanec $9b$ jsou dělitelné devíti. Tedy i jejich součet $a + 10b$ je dělitelný devíti. Chceme ještě ukázat, že číslo $a+10b$ je dělitelné i jedenácti. Použijeme podobnou úpravu $a+10b = (a-b)+11b$, kde oba sčítance na pravé straně rovnosti jsou dělitelné jedenácti. Číslo $a + 10b$ je tedy dělitelné devíti i jedenácti, proto je dělitelné i 99. Dělitelnost druhého čísla dokážeme podobným způsobem, rozepsáním na $b + 10a = (a + b) + 9a$ a $b + 10a = 11a - (a - b)$.

Jiné řešení části b). Sečteme-li obě čísla, dostaneme $(a+10b)+(b+10a) = 11(a+b)$. Ovšem podle zadání $9 \mid a + b$, číslo $11(a + b)$ je proto současně dělitelné 9 i 11, tedy i číslem 99. Podobně rozdíl uvažovaných dvou čísel je roven $(b+10a)-(a+10b) = 9(a-b)$. A protože $11 \mid a-b$, tento rozdíl je také dělitelný číslem 99. Protože 99 je liché číslo a dělí součet i rozdíl daných dvou čísel, z návodné úlohy N3 tak dostáváme, že i čísla samotná jsou dělitelná 99.

Jiné řešení části b). Podle zadání platí

$$a + b = 9c \quad \text{a} \quad a - b = 11d$$

pro vhodná přirozená čísla c a d. Sečtením, resp. odečtením těchto dvou rovností dostaneme po následném vydělení dvěma vyjádření čísel a, b ve tvaru

$$a = \frac{9c + 11d}{2} \qquad \text{a} \qquad b = \frac{9c - 11d}{2}.$$

Pro čísla $a + 10b$ a $b + 10a$ tak platí

$$\begin{aligned} a + 10b &= \tfrac{1}{2}(9c + 11d + 90c - 110d) = \tfrac{99}{2}(c - d),\\ 10a + b &= \tfrac{1}{2}(90c + 110d + 9c - 11d) = \tfrac{99}{2}(c + d). \end{aligned}$$

Jelikož levá strana je celé číslo a čísla 99 a 2 jsou nesoudělná, musí být čísla $c + d$ i $c - d$ sudá a obě čísla $a + 10b$ a $b + 10a$ jsou násobky 99, jak jsme měli dokázat.

* Zápis $a \mid b$ (v tomto pořadí) značí, že přirozené číslo a je dělitelem přirozeného čísla b, čteme a dělí b.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Anička si myslí dvě přirozená čísla, jejich součet je 16 a jejich rozdíl je 6. Jaká čísla si myslí? [11 a 5. Soustava rovnic $a + b = 16$ a $a - b = 6$ má jediné řešení $a = 11$, $b = 5$.]

N2. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, pro něž $a + b$ i $b + c$ jsou násobky sedmi. Dokažte, že pak i $a - c$ je násobek sedmi. [Vyjádříme $a - c = a + b - b - c = (a + b) - (b + c)$, což je rozdíl dvou čísel dělitelných sedmi.]

N3. Nechť k je liché přirozené číslo a a, b jsou taková přirozená čísla, že $a + b$ i $a - b$ jsou násobky čísla k. Dokažte, že pak a i b jsou násobky čísla k. [Zřejmě $k \mid (a+b)+(a-b) = 2a$. A protože k je liché, tak nutně $k \mid a$. Dále platí i $k \mid (a + b) - a = b$, jak jsme chtěli ukázat.]

N4. Nechť a, b, c, d, e jsou přirozená čísla, pro něž $a + b + c$, $b + c + d$, $c + d + e$, $d + e + a$ a $e + a + b$ jsou násobky jedenácti. Pak také $a + b + c + d + e$ je násobek jedenácti. [$3(a + b + c + d + e) = (a + b + c) + (b + c + d) + (c + d + e) + (d + e + a) + (e + a + b)$, na pravé straně je podle předpokladu součet čísel dělitelných jedenácti. Protože 3 a 11 jsou nesoudělná čísla, $a + b + c + d + e$ je násobek jedenácti.]

D1. V obchodě prodávali balíčky po 15, 30, 45, 85, 120 a 165 kuličkách. Bob a Bobek si jeden z balíčků koupili a kuličky si rozdělili tak, že Bob jich měl o 17 více než Bobek. Které z balíčků si mohli koupit? [45, 85 nebo 165. Označme a počet Bobových a b počet Bobkových kuliček. Je-li $a - b = 17$, musí $a + b = (a - b) + 2a$ být liché číslo větší než 17, tj. 45, 85 nebo 165. Na druhou stranu pro každou lichou hodnotu $k = a + b$, $k > 17$, dostaneme řešení $a = \frac{1}{2}((a + b) + (a - b)) = \frac{1}{2}(k + 17)$, $b = k - a = \frac{1}{2}(k - 17)$ v oboru přirozených čísel.]

D2. Pro jaké dvojice celých čísel (k, l) má soustava $a + b = k$, $a - b = l$ řešení v oboru celých čísel? [Právě když jsou čísla k, l obě sudá nebo obě lichá. To plyne ihned z vyjádření $a = (k + l)/2$, $b = (k - l)/2$.]

D3. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla x, y platí, že $50 \mid 19x + 3y$, právě tehdy když $50 \mid 23x + y$. [60–C–I–2]

D4. Je dáno sudé číslo $s > 2$. Přirozená čísla $a > b$ jsou taková, že součet $a + b$ je dělitelný číslem $s - 1$ a rozdíl $a - b$ je dělitelný číslem $s + 1$: a) Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$, b) Dokažte, že obě čísla $a + sb$ i $b + sa$ jsou dělitelná číslem $s^2 - 1$. [a) Ukážeme, že hledaná hodnota je $3s - 3$. Podle zadání je $a + b$ jedno z čísel $s - 1$, $2(s - 1)$, $3(s - 1)$, atd. Rovnost $a + b = s - 1$ nemůže nastat, neboť platí $a + b > a - b$ a přitom z $s + 1 \mid a - b > 0$ plyne $a - b \geqq s + 1$, takže i $a + b \geqq s + 1$. V případě $a + b = 2(s - 1)$ máme $a - b < a + b < 2(s + 1)$, takže $s + 1 \mid a - b$. S ohledem na $a - b > 0$ to znamená, že nutně $s + 1 = a - b$. Ze soustavy rovnic

$$a + b = 2(s - 1) \quad \text{a} \quad a - b = s + 1$$

ovšem dostáváme $a = \frac{1}{2}(3s - 1)$ a $b = \frac{1}{2}(s - 3)$, což však nejsou celá čísla, neboť s je sudé, a tak $3s - 1$ i $s - 3$ jsou lichá čísla. Pro $a + b = 3(s - 1)$ můžeme uvažovat $a - b = s + 1$, což vede na soustavu rovnic

$$a + b = 3(s - 1) \quad \text{a} \quad a - b = s + 1.$$

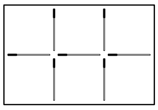
Ta má řešení $a = 2s - 1$ a $b = s - 2$, s ohledem na podmínku $s > 2$ jsou to skutečně dvě přirozená čísla, přitom zřejmě $a > b$ (plyne to i z rovnice $a - b = s + 1$). b) Uplatněním podmínek $s - 1 \mid a + b$ a $s + 1 \mid a - b$ na rovnosti

$$a + sb = (a + b) + (s - 1)b = (a - b) + (s + 1)b$$

dostáváme, že číslo $a + sb$ je dělitelné oběma čísly $s - 1$ a $s + 1$, a tedy i jejich součinem $s^2 - 1$, neboť $s - 1$ a $s + 1$ jsou lichá čísla s rozdílem rovným 2, tudíž jsou to čísla nesoudělná. Tvrzení o druhém čísle $b + sa$ plyne obdobným postupem z rovností

$$b + sa = (a + b) + (s - 1)a = (s + 1)a - (a - b).]$$

3. *Rámeček* 2×3 *lze rozdělit na čtverce* 1×1 *umístěním* 7 *zápalek jako na obrázku. Které rámečky* $a \times b$*, kde* $a \leqq b$*, lze takto rozdělit pomocí právě* 110 *zápalek? Určete všechny možnosti.* (Josef Tkadlec)



Řešení. Nechť a je výška rámečku a b jeho šířka. Vodorovné zápalky leží v b sloupcích, každý z nich obsahuje $a - 1$ zápalek, svislé zápalky leží v a řádcích, každý z nich obsahuje $b - 1$ zápalek. Celkový počet zápalek potřebných na rozdělení rámečku $a \times b$ tak je $a(b - 1) + b(a - 1)$. Hledáme tedy přirozená čísla a, b, která vyhovují rovnici $a(b - 1) + b(a - 1) = 110$. Roznásobením získáme na její levé straně $2ab - a - b$. Tento výraz rozložíme jako v návodné úloze N4 na $(2a - 1)(b - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$, rovnice tedy přejde do tvaru $(2a - 1)(b - \frac{1}{2}) = 110 + \frac{1}{2}$. Protože nás zajímají celočíselná řešení, vynásobíme rovnici dvěma a dostaneme součinový tvar

$$(2a - 1)(2b - 1) = 221.$$

Jelikož jsou čísla $2a - 1$ a $2b - 1$ přirozená a všechny možné rozklady čísla 221 na součin dvou přirozených čísel jsou $221 = 1 \cdot 221 = 13 \cdot 17$, všechny vyhovující dvojice (a, b) jsou $(1, 111)$ a $(7, 9)$.

Jiné řešení. Podobně jako v prvním řešení hledáme všechny dvojice přirozených čísel (a, b), $a \leqq b$, která splňují $a(b - 1) + b(a - 1) = 110$. Vyjádříme jednu proměnnou, například a, dostaneme

$$a = \frac{b + 110}{2b - 1}.$$

Čitatel pravé strany upravíme podobně jako v návodné úloze N2 c) do tvaru $b + 110 = \frac{1}{2}(2b - 1) + \frac{221}{2}$, abychom mohli zlomek upravit do tvaru, kde b je jen ve jmenovateli

$$a = \frac{(2b - 1)\frac{1}{2} + \frac{221}{2}}{2b - 1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{221}{2b - 1}\right)$$

neboli

$$2a = 1 + \frac{221}{2b - 1}.$$

Jelikož $2a$ a 1 jsou přirozená čísla a $2a > 1$, musí $2b - 1$ být přirozeným dělitelem čísla 221. Všichni dělitelé 221 jsou 1, 13, 17 a 221. Ke každé hodnotě $2b-1$ nyní dopočítáme a a b, a protože $a \leqq b$, získáme dvě vyhovující dvojice (a, b), a to $(1, 111)$ a $(7, 9)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna $n \in \mathbb{Z}$, pro která je zlomek $7/(n + 2)$ celé číslo. [Čísla n z množiny $\{-1, 5, -3, -9\}$. Ve jmenovateli zlomku může být jenom $\{1, 7, -1, -7\}$, takže $n + 2 \in \{1, 7, -1, -7\}$, a tedy $n \in \{-1, 5, -3, -9\}$. Alternativně hledáme celočíselná řešení rovnice $k(n + 2) = 7$.]

N2. Určete všechna $n \in \mathbb{Z}$, pro která je zlomek

$$a)\ \frac{n + 3}{n - 2}, \qquad b)\ \frac{2n + 3}{n - 2}, \qquad c)\ \frac{n + 3}{2n + 1}$$

celé číslo. [a) $n \in \{3, 7, 1, -3\}$. Provedeme následující úpravu a daný zlomek vyjádříme jako součet celého čísla a zlomku, jehož čitatel nezávisí na neznámé n:

$$\frac{n + 3}{n - 2} = \frac{n - 2 + 5}{n - 2} = 1 + \frac{5}{n - 2}.$$

Zlomek $(n+3)/(n-2)$ bude celým číslem právě tehdy, když bude celým číslem zlomek $5/(n-2)$. A to je už úloha podobná N1: $n-2 \in \{1,5,-1,-5\}$. b) $n \in \{3,9,1,-5\}$. Řešení je podobné jako u části a), jen má dva kroky:

$$\frac{2n+3}{n-2} = \frac{n-2+n+5}{n-2} = 1 + \frac{n-2+7}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}.$$

Oba kroky můžeme samozřejmě udělat i najednou:

$$\frac{2n+3}{n-2} = \frac{2(n-2)+7}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}.$$

To znamená, že $n-2 \in \{1,7,-1,-7\}$. c) $n \in \{0,2,-1,-3\}$. Řešení je podobné jako u části b):

$$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{5}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n+1)}.$$

To znamená, že $2n+1 \in \{1,5,-1,-5\}$. Ve všech případech se vlastně jedná o dělení polynomů se zbytkem, například $(n+3):(2n+1) = \frac{1}{2}$, zbytek $\frac{5}{2}$.]

N3. Najděte všechna řešení rovnice $ab+a+b=21$ v množině přirozených čísel. [$(10,1)$, $(1,10)$. Nabízí se zkoušení možností, kterých není mnoho, protože a i b jsou nutně menší než 21. Jiná cesta je zkusit vyjádřit z rovnice jednu z proměnných a pak zlomek upravit jako u předchozí úlohy:

$$a(b+1) = 21-b,$$
$$a = \frac{21-b}{b+1} = \frac{(-b-1)+22}{b+1} = -1 + \frac{22}{b+1}.$$

Odtud $b+1$ musí být přirozený dělitel čísla 22. Číslo 22 má celkem čtyři dělitele: 1, 2, 11, 22. To vede k řešením $(a,b)=(10,1)$ a $(a,b)=(1,10)$. Uvědomme si, že poslední rovnost lze jednoduše přepsat do ekvivalentního tvaru

$$a+1 = \frac{22}{b+1} \qquad \text{neboli} \qquad (a+1)(b+1) = 22.$$

Alternativně šlo tedy danou úlohu řešit tak, že najdeme výše zmíněný rozklad.]

N4. Najděte všechna přirozená řešení rovnice $6mn-4n+3m=23$ úpravou levé strany do tvaru $(\square m+\square)(\square n+\square)+\square$, kde na místě $\square$ jsou vhodné konstanty. [$(m,n)=(1,10),(3,1)$. Člen $6mn$ získáme např. jako $3m\cdot 2n$. Z tvaru $(3m+\square)(2n+\square)$ vidíme, že na první místo máme dosadit -2, abychom získali člen $-4n$, na druhé místo 1, abychom dostali člen $3m$. Máme tedy $(3m-2)(2n+1) = 6mn-4n+3m-2$ a zadaná rovnice přejde do tvaru $(3m-2)(2n+1)=21$. První závorka může být 1 nebo 7, což dává uvedená řešení. Pokud se rozhodneme člen $6mn$ rozložit na $2m\cdot 3n$, také se dostaneme k řešení, ale komplikovanější cestou.]

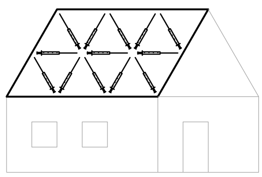
N5. Uvažujme v soutěžní úloze rámeček 20×30. Kolik zápalek potřebujeme na jeho rozdělení? [1150. Počet svislých zápalek bude $20\cdot 29$ a vodorovných $19\cdot 30$.]

D1. Najděte všechny dvojice celých čísel (m,n), pro něž je hodnota výrazu

$$\frac{m+3n-1}{mn+2n-m-2}$$

celé kladné číslo. [58–B–I–6]

D2. Rovnoběžníku s celočíselnými délkami stran a jedním vnitřním úhlem velikosti $60°$ budeme říkat *střecha*. Na střechu se stranami délek 2 a 3 lze položit 13 stříbrných stříkaček jako na obrázku a tím ji rozdělit na rovnostranné trojúhelníky o straně 1. Které střechy lze takto rozdělit pomocí právě 333 stříbrných stříkaček?



Určete všechny možnosti. [Řešíme rovnici $ab + a(b-1) + b(a-1) = 333$, kterou upravíme na $(3a-1)(3b-1) = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Řešením jsou dvojice (a, b) z množiny $\{(1, 167), (2, 67), (3, 42), (7, 17)\}$.]

D3. Najděte všechna celočíselná řešení $a \leqq b \leqq c$ rovnice

$$abc + a + b + c = 6 + ab + ac + bc.$$

[Rozložíme na součin: $(a-1)(b-1)(c-1) = 5$. Řešení jsou trojice (a, b, c) z množiny $\{(2, 2, 6), (-4, 0, 2), (0, 0, 6)\}$.]

D4. Na tabuli je napsáno pět (ne nutně různých) prvočísel, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla. [70–A–I–1a]

4. *Šachovnicově obarvenou tabulku 4×4 s černým levým horním polem vyplňujeme jedničkami a nulami. V každém čtverci 2×2, který má černé levé horní pole, je stejný počet nul jako jedniček. Kolika různými způsoby lze tabulku vyplnit?*

(Ján Mazák)

Řešení. Začneme tím, že vyplníme středový čtverec 2×2 požadovaným způsobem. Máme 6 možností, jak to udělat: ze čtyř polí vybíráme dvě, kde budou jedničky (zbylá dvě pak vyplní nuly). Pro první jedničku máme čtyři možnosti, kam ji umístit, pro druhou už jen tři, to je dohromady $4 \cdot 3 = 12$ možností. Protože nezáleží na pořadí, ve kterém jedničky umisťujeme, všech možností je ve skutečnosti jenom polovina, tj. 6 (každou možnost jsme počítali dvakrát). Každý z rohových čtverců 2×2 má po vyplnění středového čtverce již jedno pole vyplněné a je možné jej doplnit třemi způsoby. Vybíráme jedno pole ze tří pro 1 nebo 0, v závislosti na tom, co je na již vyplněném poli. Pokud obsahuje vyplněné pole jedničku, vybíráme jedno ze zbývajících tří polí pro druhou jedničku, pokud vyplněné pole obsahuje nulu, vybíráme jedno ze zbývajících tří polí pro druhou nulu. Doplnění každého z těchto čtyř rohových čtverců je nezávislé na vyplnění ostatních rohových čtverců. Výsledek je proto $6 \cdot 3^4 = 486$.

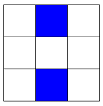
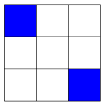
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pavel má v sešitě nakreslenou čtvercovou tabulku 3×3 a chce ji vybarvit dvěma barvami – bílou a červenou. Kolika způsoby může tabulku vybarvit, pokud chce mít a) právě 1 červený čtverec a 8 bílých čtverců? b) 2 červené a 7 bílých čtverců? c) Kolik je celkově možností, jak vybarvit tabulku dvěma barvami? [a) 9. Červený čtverec může být na 9 místech. b) 36. První červený čtverec může být na 9 místech, druhý na 8. Vynásobením 9 krát 8 ale každou možnost počítáme dvakrát, možností je tedy $9 \cdot 8 : 2 = 36$. c) 512. Všech možností obarvení je $1 + 9 + \frac{9\cdot8}{2} + \frac{9\cdot8\cdot7}{6} + \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{24} + \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{24} + \frac{9\cdot8\cdot7}{6} + \frac{9\cdot8}{2} + 9 + 1 =$ $= 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$. Naznačme, jak vypočítáme například kolika možnostmi můžeme vybarvit tři červené čtverce: první červený čtverec může být na 9 místech, druhý na 8, třetí na 7 místech. Vynásobením 9 krát 8 krát 7 ale každou možnost započítáme šestkrát, protože uspořádat tři políčka lze právě 6 způsoby, (3 možnosti pro první, 2 pro druhý), tedy $9 \cdot 8 \cdot 7 : 6 = 36$. Uvědomme si, že tento výsledek můžeme dostat i přímo. Každý čtverec má dvě možnosti, jakou barvou může být obarven nezávisle na ostatních. Těchto čtverců máme 9, tedy počet všech obarvení je 2^9.]

N2. Michal má v sešitě nakreslenou obdélníkovou tabulku 3×6 a chce ji vybarvit dvěma barvami. Tabulku má rozdělenou na dva shodné čtverce 3×3. Kolika způsoby může tabulku vybarvit, pokud chce mít v každém z nich 2 červené a 7 bílých menších čtverců? [1296. Každý ze čtverců lze vybarvit 36 způsoby (návodná úloha N1 b). Každou možnost obarvení levého čtverce lze zkombinovat s každou možností obarvení pravého čtverce, proto všech obarvení je $36 \cdot 36 = 1296$.]

N3. Kolika způsoby lze vepsat jedničky a nuly do tabulky 2×3, aby každý čtverec 2×2 obsahoval právě dvě nuly a dvě jedničky? [Deseti. Vyplníme nejprve prostřední sloupec. Pokud v něm budou dvě nuly nebo dvě jedničky, pak už je vyplnění levého a pravého sloupce jednoznačné. Takto získáme 2 možná vyplnění. Pokud v prostředním sloupci bude jedna nula a jedna jednička, pak v každém ze dvou sousedních sloupců musí být také jedna nula a jedna jednička. Pro každý sloupec máme 2 možnosti, tj. zbývajících $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností.]

D1. Maruška chce ušít patchworkovou čtvercovou přikrývku složenou z 9 menších čtverců modré nebo bílé barvy. Přikrývky, které dostaneme otočením jedné z druhé, považujeme za stejné. Kolika způsoby může přikrývku ušít, pokud použije a) právě 1 modrý čtverec a 8 bílých čtverců? b) 2 modré a 7 bílých čtverců? [a) 3. Modrý může být rohový čtverec, čtverec uprostřed strany čtverce, nebo čtverec ve středu, všechny další možnosti už dostaneme otočením přikrývky. b) 10. Uvědomme si, že pokud budeme počítat jako v návodné úloze 1b), tak možnosti započítáme vícekrát. Většinu možností započítáme čtyřikrát (protože máme 4 otočení). Některé možnosti jsou po dvou otočeních stejné, ty započítáme pouze dvakrát. Můžeme si rozmyslet, že toto se stane pouze u následujících dvou možností:

Tyto dvě možnosti přispívají počtem 4 do celkového počtu 36, každou ze zbývajících 32 možností započítáváme čtyřikrát. Počet různých přikrývek je tedy $32 : 4 + 4 : 2 = 10$.]

D2. Tabulku 4×4 vyplňujeme jedničkami a nulami. V každém čtverci 2×2 je stejný počet nul jako jedniček. Kolika různými způsoby lze tabulku vyplnit? [30. Uvědomme si rozdíl v zadání oproti soutěžní úloze, podmínka ze zadání bude muset být splněna v každém z 9 čtverců 2×2. Rozmyslíme si, že pokud jsou vedle sebe dvě jedničky, pak pod nimi a nad nimi musí být dvě nuly a pod/nad nimi zase musí být dvě jedničky. Analogicky, pokud jsou dvě jedničky nad sebou, tak z obou stran vedle nich musí být jen nuly a tak dále. Odtud už také plyne, že jsou-li někde dvě jedničky nebo dvě nuly vedle sebe, pak nemohou zároveň někde být dvě jedničky či nuly pod sebou. Nyní si rozmyslíme, jak je vyplněný první řádek. Dvě z celkového počtu $2^4 = 16$ vyplnění jsou taková, že se střídají jedničky a nuly. Ostatních 14 pak obsahuje buď dvě nuly nebo dvě jedničky vedle sebe. Ta vyplnění prvního řádku, která obsahují dvě stejné číslice vedle sebe, mají jednoznačné rozšíření do zbytku čtverce, protože pod jedničkami musí být nuly a pod nulami jedničky. Máme tedy 14 vyplnění, v nichž se vyskytují dvě stejné číslice vedle sebe. Podobně máme dalších 14 vyplnění, v nichž se vyskytují dvě stejné číslice pod sebou. Zbývají vyplnění, v niž ani jedna z těchto možností nenastane. Taková jsou jen dvě šachovnicová vyplnění. Celkem je přípustných vyplnění $2 \cdot 14 + 2 = 30$. Alternativně můžeme začít počítat v prostředním čtverci. Naznačíme takové řešení: Opět je 6 možností jak vyplnit prostřední čtverec. Dále musíme rozlišit dvě situace. První možnost je, že jedničky jsou umístěny buď ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci – jsou celkem 4 takové možnosti, a lehce si rozmyslíme, že každou z nich můžeme doplnit 4 způsoby. Druhá možnost je, že ve středovém čtverci budou jedničky umístěny na diagonále – to lze udělat dvěma způsoby a každý z nich lze doplnit požadovaným způsobem 7 způsoby. Takže celkový počet možností je $4 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 30$.]

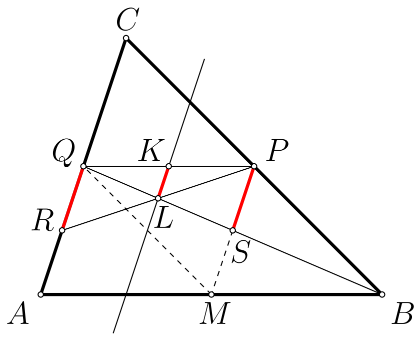
D3. Šachovnicově obarvenou tabulku 4×4 vyplňujeme jedničkami a nulami. V každém z devíti čtverců 2×2, je stejný počet nul. Kolika různými způsoby lze tabulku vyplnit? [56. Uvědomme si rozdíl v zadání oproti předchozí úloze. Všechny nalezené možnosti z předchozí úlohy vyhovují i zadání této úlohy. Navíc máme ještě další možná vyplnění – když v každém ze čtverců budou samé jedničky nebo samé nuly (2 možnosti) a když v každém ze čtverců budou tři nuly a jedna jednička nebo tři jedničky a jedna nula. Rozebereme nyní možnost, kdy jsou v každém čtverci 2×2 jedna jednička a tři nuly. V každém ze čtyř rohových disjunktních čtverců 2×2 bude nutně právě jedna jednička, proto do celého čtverce potřebujeme umístit právě čtyři jedničky. Ve středovém čtverci jsou celkem 4 možnosti kam umístit jednu jedničku. Lehce si rozmyslíme, že v osmi polích kolem této jedničky musí být samé nuly a že další tři jedničky lze umístit třemi způsoby. Máme tedy $4 \cdot 3 = 12$ vyplnění, kde bude v každém čtverci 2×2 právě jedna jednička. Podobně máme 12 vyplnění, kde bude v každém čtverci 2×2 právě jedna nula. Všech možností je tedy $30 + 2 + 2 \cdot 12 = 56$.]

D4. Tomáš postupně několikrát vyplnil tabulku 5×4 tak, že v každém čtverečku 2×2 bylo každé z čísel $1, 2, 3, 4$ právě jednou. Po každém vyplnění si zapsal součet všech čísel v tabulce. Kolik nejvíce různých součtů mohl takto získat? [9. Nejprve si uvědomme, že součet čísel v prvních 4 sloupcích je vždy $4(1+2+3+4)$, zajímá nás proto jenom poslední sloupec. V něm není možné, aby byla dvě stejná čísla vedle sebe. Součet čísel v posledním sloupci bude proto minimálně 6 $(1, 2, 1, 2)$ a maximálně 14 $(3, 4, 3, 4)$. Každý se součtů mezi 6 a 14 lze taky dosáhnout: $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 3, 1, 3)$, $(1, 3, 1, 4)$, $(1, 4, 1, 4)$, $(2, 4, 1, 4)$, $(2, 4, 2, 4)$, $(2, 4, 3, 4)$. Lehce si rozmyslíme, že každé z uvedených vyplnění posledního sloupce lze doplnit do vyplnění celé tabulky.]

D5. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. [72–B–I–2]

5. *Nechť P, Q jsou po řadě středy stran BC, AC trojúhelníku ABC. Rovnoběžka s AC procházející středem K úsečky PQ protíná přímku BQ v bodě L a přímka PL protíná úsečku AC v bodě R. Dokažte, že R je středem úsečky AQ.* (Jaroslav Švrček)

ŘEŠENÍ. Nechť M je střed strany AB. Potom úsečky PQ, QM, MP jsou střední příčky trojúhelníku ABC, takže $AMPQ$ a $MBPQ$ jsou oba rovnoběžníky, protože střední příčka a polovina strany, se kterou je rovnoběžná, jsou stejně dlouhé. Nechť S je střed rovnoběžníku $MBPQ$, takže je i středem jeho úhlopříček PM a BQ, protože uhlopříčky v rovnoběžníku se půlí.

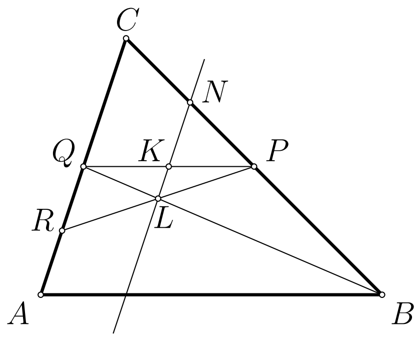


Protože úsečka KL je rovnoběžná s QR i s PS a prochází středem úsečky PQ, je to střední příčka trojúhelníků PQS i PQR. Platí tedy

$$|QR| = 2|KL| = |PS| = \frac{1}{2}|PM| = \frac{1}{2}|QA|,$$

takže R je střed úsečky AQ.

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme N průsečík přímky KL se stranou BC. Protože přímka KL prochází středem úsečky PQ a je rovnoběžná s QC, je úsečka NK střední příčkou trojúhelníku PCQ. Současně je KL střední příčkou trojúhelníku PQR. Odtud plyne, že NL je střední příčka trojúhelníku PCR.



Dále je zřejmé díky rovnoběžnosti úseček NL a CQ, že trojúhelníky BNL a BCQ jsou podobné s poměrem podobnosti $3:4$, neboť ve stejném poměru jsou délky stran BN a BC obou trojúhelníků. Platí tedy $|NL| : |CQ| = 3 : 4$. Protože úsečka NL je střední příčkou trojúhelníku PCR, platí

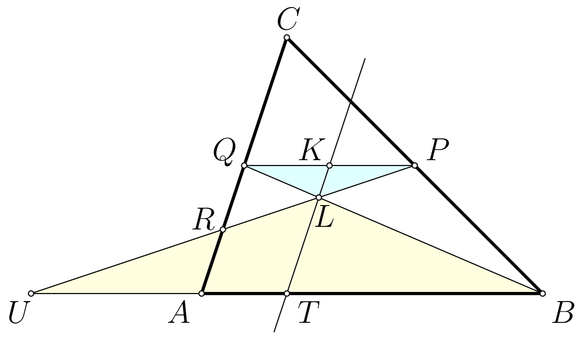
$$|CR| = 2 \cdot |NL| = 2 \cdot \frac{3}{4}\,|CQ| = \frac{3}{4} \cdot 2\,|CQ| = \frac{3}{4}\,|AC|,$$

tedy $|AR| = \frac{1}{4}\,|AC| = \frac{1}{2}\,|AQ|$, což dokazuje dané tvrzení.

Jiné řešení. Úsečka QP je střední příčkou trojúhelníku ABC, je tak rovnoběžná se stranou AB a má poloviční délku. Označme U průsečík přímky PL s přímkou AB. Z podobnosti trojúhelníků BLU a QLP je průsečík T přímek KL a AB středem úsečky UB. Platí

$$|AT| = |QK| = \frac{1}{2}|QP| = \frac{1}{4}|AB|,$$

tedy $|UT| = |TB| = |AB| - |AT| = \frac{3}{4}|AB|$, odkud dostáváme $|UA| = |UT| - |AT| = = \frac{1}{2}|AB| = |PQ|$. Trojúhelníky UAR a PQR jsou pak shodné podle věty *usu*, a proto platí i $|AR| = |RQ|$, což jsme měli dokázat.



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán trojúhelník ABC, označme K, L, M po řadě středy jeho stran AB, BC, CA. Dokažte, že těžnice KC půlí střední příčku LM. [Označme N střed střední příčky ML. Protože $|AC| = 2|MC|$, $|BC| = 2|LC|$ a $|AB| = 2|ML|$, kde poslední rovnost plyne z vlastností střední příčky, trojúhelník MLC je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti 2. Opět z vlastností střední příčky je ML rovnoběžná s AB, navíc platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LMC|$ a také $|\sphericalangle AKC| = |\sphericalangle MNC|$ (souhlasné úhly na rovnoběžkách). Proto i trojúhelník MNC je podobný trojúhelníku AKC s koeficientem podobnosti 2 podle věty *usu*. Z toho již plyne, že $|AK| = 2|MN|$, což jsme měli dokázat.]

N2. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Označme S průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že rovnoběžka se stranou AB procházející bodem S protne stranu DA v jejím středu. [Úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem S obsahuje střední příčku trojúhelníku ABD, proto protne stranu DA v jejím středu.]

N3. Nechť $ABCD$ a $ABEF$ jsou dva rovnoběžníky se stejnou základnou a stejnou výškou ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou AB. Nechť S, R jsou po řadě průsečíky jejich úhlopříček. Dokažte, že RS je rovnoběžná s AB. [Postupovat lze různě, naznačíme jedno z řešení: Je třeba si uvědomit, že trojúhelníky ABR a ABS mají stejnou výšku k základně AB, a to poloviční oproti výšce rovnoběžníků. To plyne např. z N2: rovnoběžka s AD procházející bodem S protne úsečku AB v bodě X, který půlí AB. Tedy trojúhelníky ABD a XBS jsou podobné v poměru $2:1$ a to je i poměr jejich výšek.]

N4. Nechť D je střed strany AB trojúhelníku ABC a E bod jeho strany AC, pro který platí $|AE| = 2|CE|$. Označme F průsečík přímek BE a CD. Dokažte, že platí $|BE| = = 4|EF|$. [Označme M střed úsečky AE. Úsečka EF je střední příčkou trojúhelníku CMD a úsečka MD je střední příčkou trojúhelníku ABE. Odtud již plyne dokazované tvrzení.]

D1. Nechť K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník. [Úsečky KL a MN jsou střední příčky trojúhelníků ABC a CDA, jsou tak shodné a rovnoběžné. (Podobně bychom dokázali shodnost a rovnoběžnost úseček LM a KN.)]

D2. Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC po řadě v bodech K, L,

M, N. a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$. b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$. [60–C–I–6]

D3. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE, CDE, BCE, jež označíme po řadě K, L, M, tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel. b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$. [60–C–II–3]

6. *Čtyřmístné číslo* $\overline{abcd}$ *s nenulovými číslicemi nazveme* zrcadlitelné*, právě když přičtením devítinásobku nějakého trojmístného čísla zapsaného pomocí tří stejných číslic vznikne číslo* $\overline{dcba}$*. Kolik zrcadlitelných čísel existuje?*

(Mária Dományová, Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Nejprve poznamenejme, že číslice a, b, c, d mohou být všechny navzájem různé nebo některé mohou být stejné, ze zadání jsou všechny možnosti přípustné. Trojmístné číslo se třemi stejnými číslicemi označme jako $\overline{eee}$. Zrcadlitelné číslo musí splňovat rovnici

$$\overline{abcd} + 9 \cdot \overline{eee} = \overline{dcba},$$

což můžeme zapsat jako

$$(1000a + 100b + 10c + d) + 9(100e + 10e + e) = 1000d + 100c + 10b + a,$$

a dále ekvivalentně upravit

$$\begin{aligned} 999a - 999d + 9 \cdot 111e &= 90c - 90b, \\ 999(a - d + e) &= 90(c - b), \\ 111(a - d + e) &= 10(c - b). \end{aligned} \tag{1}$$

Všimněme si, že levá strana poslední rovnosti je dělitelná 111. Tedy i pravá strana musí být dělitelná 111. To může nastat pouze pokud $c = b$, protože $-80 \leqq 10(c-b) \leqq 80$. Pak je ale pravá strana rovnosti (1) nulová, a tedy nutně $d = a + e$, což znamená, že d musí být větší než a.

Zrcadlitelné číslo tedy musí splňovat $b = c$ a $d > a$. Zároveň každé číslo splňující podmínky $b = c$, $d > a$ je zrcadlitelné. Z výše uvedených výpočtů totiž plyne, že trojmístné číslo $\overline{eee}$, kde $e = d - a$ vyhovuje podmínce ze zadání. Spočítejme nyní počet čtyřmístných čísel $\overline{abcd}$ s nenulovými číslicemi, která splňují $b = c$ a $d > a$. Za $b = c$ můžeme zvolit libovolnou z devíti nenulových číslic. Dvojic (d, a) různých číslic je $9 \cdot 8 = 72$ (d vybíráme z devíti hodnot, a už jen ze zbývajících osmi), pouze polovina z nich (tj. 36) splňuje, že $d > a$. Celkem je tedy zrcadlitelných čísel $9 \cdot 36 = 324$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Číslo 49 má tu vlastnost, že je rovno součtu svého ciferného součinu a svého ciferného součtu: $4 \cdot 9 + 4 + 9 = 49$. Kolik dvojmístných čísel má tuto vlastnost? [9. Libovolné dvojmístné číslo můžeme zapsat jako $10a + b$, kde a je první číslice a b je druhá číslice. Dostaneme tedy $ab + a + b = 10a + b$, což upravíme na $a(b - 9) = 0$. Odtud plyne, že $b = 9$ a a může být libovolné nenulové. Řešením je tedy 9 čísel: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.]

N2. Najděte a) jedno libovolné, b) všechna řešení rovnice

$$11x = 7y$$

v množině přirozených čísel. [a) Jedno řešení najdeme snadno: $x = 7, y = 11$. b) Všechna řešení jsou $x = 7a$, $y = 11a$ pro libovolné přirozené číslo a. Žádná další řešení neexistují, protože levá strana naší rovnice je vždy dělitelná číslem 11, proto musí být i pravá strana dělitelná 11, tj. $y = 11a$. Dopočteme $x = 7a$.]

N3. Dvojmístné číslo $\overline{ab}$ s nenulovými číslicemi nazveme *čtvercovaté*, právě když přičtením čísla s obráceným pořadím číslic dostaneme druhou mocninu přirozeného čísla. Kolik čtvercovatých čísel existuje? [Dané dvojciferné číslo si opět zapíšeme ve tvaru $10a+b$. Číslo $\overline{ab}$ má tedy splňovat, že $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$ je druhá mocnina přirozeného čísla. Zřejmě $11 \mid 11(a+b)$. Pokud má být číslo druhou mocninou, pak musí platit $11 \mid a+b$. Protože ale $2 \leqq a + b \leqq 18$, tak už nutně $a + b = 11$. Existuje tedy 8 čtvercovatých čísel a to 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 a 92.]

D1. Najděte největší pětimístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu. [52–B–S–1]

D2. Určete počet všech pětimístných palindromů, které jsou dělitelné číslem 37. (Palindromem nazýváme číslo, jehož zápis v desítkové soustavě se čte zepředu stejně jako zezadu.) [53–A–II–1]

D3. Najděte všechna čtyřmístná čísla n, která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n, je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi. [58–C–I–3]