I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

V naší ulici bydlí Čapkovi a Němcovi. Čapkovi mají dva syny, Karlíka a o dva roky staršího Pepíka. Němcovi mají dceru Bóžu. Narozeniny všech tří dětí slavívají obě rodiny společně, a to v den Karlíkových narozenin. Při letošní oslavě byla Bóža třikrát starší než Karlík. Za tři roky bude Karlíkovi a Pepíkovi dohromady stejně jako bude Bóže.

Kolik let bylo dětem při letošní oslavě? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Za tři roky bude součet věků Karlíka a Pepíka o šest let větší než nyní, zatímco věk Bóži se zvětší o tři roky. Protože tyto hodnoty mají souhlasit, je nynější věk Bóži o tři roky větší než součet věků obou chlapců.

Pepík je o dva roky starší než Karlík, tedy součet jejich věků je stejný jako dvojnásobek věku Karlíka a dva roky. Celkem máme věk Bóži vyjádřen jako dvojnásobek věku Karlíka a pět roků.

Ze zadání také víme, že Bóža je třikrát starší než Karlík. Porovnáním těchto dvou vyjádření dostáváme, že Karlíkovi je pět roků, a tedy Pepíkovi je sedm a Bóže patnáct.

Poznámka. Myšlenky prvních dvou odstavců lze zkráceně psát takto:

$$B = K + P + 3, \quad P = K + 2 \implies B = 2K + 5.$$

Porovnáním dvojího vyjádření věku Bóži dostáváme:

$$2K + 5 = 3K \implies K = 5.$$

Odtud pak plyne, že $P = 7$ a $B = 15$. Situaci je také možné (a vhodné) znázornit pomocí skládání úseček.

Jiné řešení. Se stejným značením jako v předchozí poznámce lze postupně vzhledem k věku Karlíka vyjadřovat věky ostatních a kontrolovat podmínku s rovností věků po třech letech:

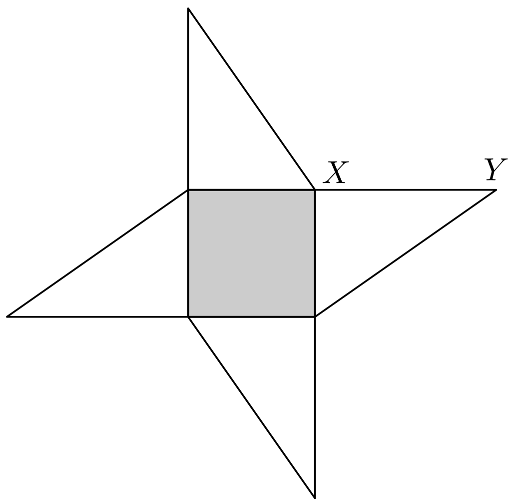
K	1	2	3	4	5	...
$P = K + 2$	3	4	5	6	7	...
$K + 3 + P + 3$	10	12	14	16	**18**	...
$B = 3K$	3	6	9	12	15	...
$B + 3$	6	9	12	15	**18**	...

Vyhovující řešení dostáváme pro $K = 5$, $P = 7$ a $B = 15$. Karlíkovi je pět roků, Pepíkovi sedm a Bóže patnáct.

Z5–I–2

Na obrázku je šedý čtverec se stranou délky 10 cm. Čtverec doplňují čtyři stejné pravoúhlé trojúhelníky do tvaru hvězdy. Součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce.

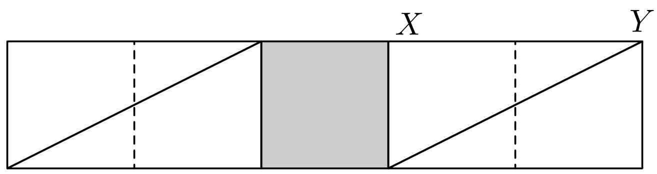
Určete délku strany XY. (*E. Semerádová*)



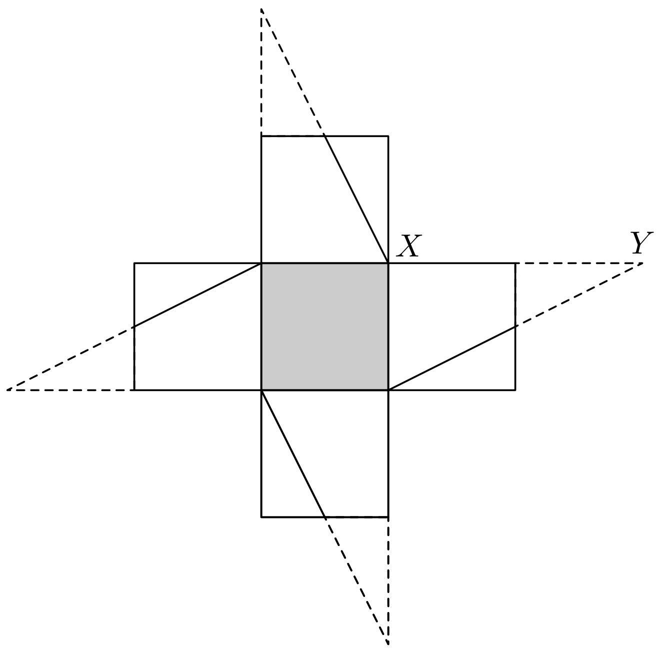
Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Z každých dvou bílých trojúhelníků lze složit obdélník, jehož jedna strana se shoduje se stranou šedého čtverce. Ze čtyř trojúhelníků lze složit dva obdélníky.

Součet obsahů dvou obdélníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce, právě když druhá strana obdélníku je dvojnásobkem strany čtverce. Tedy strana XY měří 20 cm.



Poznámka. Bílé trojúhelníky jsou všechny stejné, tedy každý z nich má stejný obsah jako šedý čtverec. Z každého trojúhelníku lze vytvořit čtverec ustřižením a přesunutím jeho části (v souladu s předchozím obrázkem) takto:



Z5–I–3

V následujícím příkladu je pětkrát použito znaménko + a výsledek je násobkem tří:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39.$$

Změňte dvě ze znamének + na znaménko − tak, aby výsledek nového příkladu byl opět násobkem tří. Najděte všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Jak původní, tak nový výsledek je násobkem tří. Tedy také součet odčítaných čísel musí být násobkem tří. Takové součty pro dvojice čísel od 4 do 8 jsou:

$$4 + 5 = 9, \quad 4 + 8 = 12, \quad 5 + 7 = 12, \quad 7 + 8 = 15.$$

Všechny možné záměny znamének (a odpovídající výsledky) jsou:

$$\begin{aligned} 9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 &= 21, \\ 9 - 8 + 7 + 6 + 5 - 4 &= 15, \\ 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 &= 15, \\ 9 - 8 - 7 + 6 + 5 + 4 &= 9. \end{aligned}$$

Poznámka. Počet možných záměn dvou znamének z pěti je deset. Bez úvodního postřehu lze postupovat tak, že se vypočte deset odpovídajících příkladů a vyberou se ty, jejichž výsledek je násobkem tří.

Z5–I–4

Pinocchio tvrdí, že číslo dne v datu jeho narození lze beze zbytku dělit třemi, čtyřmi, pěti a šesti. Tři z těchto čtyř informací jsou pravdivé, jedna je nepravdivá.

Kolikátý den v měsíci může mít Pinocchio narozeniny? Určete všechny možnosti.

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Postupně vylučujeme jednoho ze čtyř dělitelů a hledáme nejmenší čísla, která jsou beze zbytku dělitelná zbylými třemi čísly. Mezi nimi vybíráme ta, která nejsou dělitelná vyloučeným číslem (nevyhovující možnosti jsou v následující tabulce přeškrtnuty). Výsledek má představovat den v měsíci, tedy nás zajímají hodnoty nepřevyšující 31 (vyhovující možnosti jsou zvýrazněny tučně). Závěry jsou shrnuty zde:

ne	ano	možnosti
3	4, 5, 6	~~60~~, ...
4	3, 5, 6	**30**, ~~60~~, ...
5	3, 4, 6	**12**, **24**, 36, ...
6	3, 4, 5	~~60~~, ...

Pinocchio se mohl narodit 12., 24., nebo 30. dne v měsíci.

Jiné řešení. Po řádcích vypíšeme všechna čísla nepřevyšující 31, která jsou beze zbytku dělitelná třemi, čtyřmi, pěti a šesti:

3 6 9 **12** 15 18 21 **24** 27 **30**

4 8 **12** 16 20 **24** 28

5 10 15 20 25 **30**

6 **12** 18 **24** **30**

Čísla, která jsou dělitelná třemi ze čtyř uvedených dělitelů, jsou zvýrazněna tučně.

Pinocchio se mohl narodit 12., 24., nebo 30. dne v měsíci.

Poznámky. Pokud se Pinocchio narodil v únoru, pak poslední možnost (30.) odpadá.

U prvního uvedeného řešení lze možné hodnoty ve třetím sloupci tabulky určovat např. tak, že postupně pro násobky největšího z daných čísel ověřujeme, zda jsou beze zbytku dělitelné zbylými dvěma čísly. Nejmenší z uvedených hodnot je tzv. *nejmenší společný násobek* čísel.

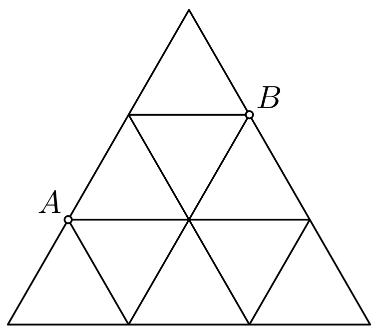
Úlohu lze řešit také tak, že se postupně pro čísla od 1 do 31 určí všichni dělitelé, kterými lze beze zbytku dělit, a mezi nimi se hledají tři ze čtyř daných dělitelů.

Z5–I–5

V síti stezek vyznačených na obrázku má každá stezka mezi sousedními křižovatkami délku 1 km.

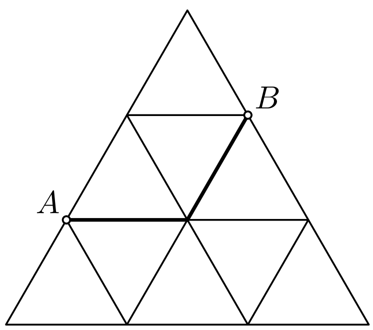
Kolik cest dlouhých nanejvýš 3 km vede po stezkách z místa A do místa B?

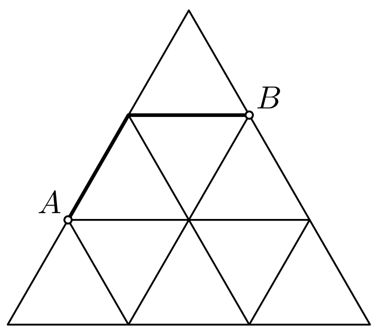
(*E. Semerádová*)



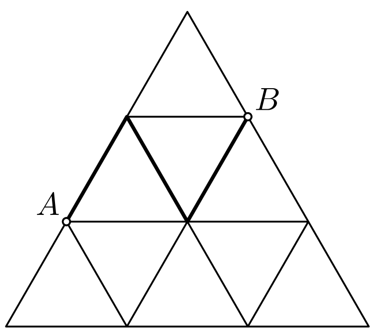
Možné řešení. Cesta délky 1 km není žádná.

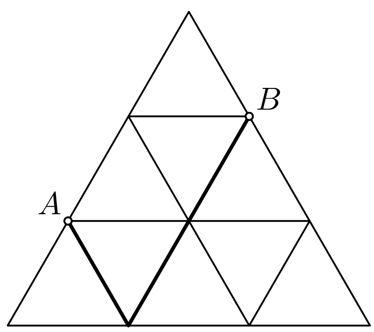
Cesty délky 2 km jsou dvě:

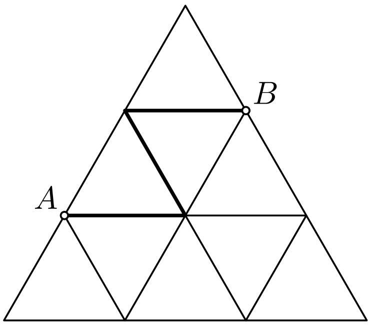


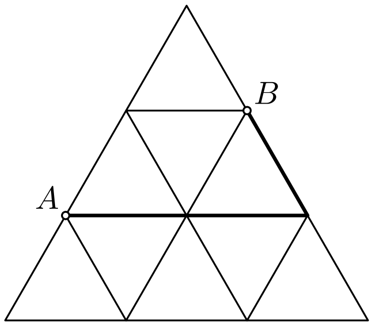


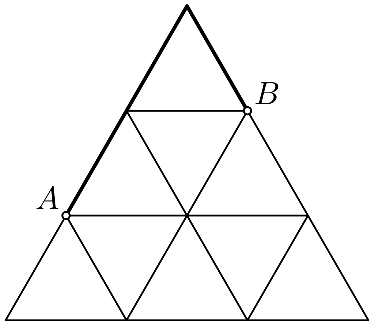
Cest délky 3 km je pět:











Mezi místy A a B je celkem sedm cest dlouhých nanejvýš 3 km.

Poznámka. Cesty délky 3 km jsou z předchozích cest odvozeny tak, že 1 km úseky byly systematicky nahrazovány dvěma 1 km úseky začínajícími a končícími ve stejných křižovatkách.

Z5–I–6

Andělka navléká na nit bez mezer za sebe korálky tří různých tvarů A, B, C. Postupuje tak, že tvary střídá ve stále stejném pořadí a postupně zvyšuje počty tvarů ve skupinách:

$$ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC\ldots$$

Korálek tvaru A zabírá 5 mm nitě, korálek tvaru B zabírá 4 mm, korálek tvaru C zabírá 3 mm.

Kolik korálků potřebuje Andělka k výrobě náhrdelníku dlouhého alespoň 50 cm?

(*L. Dedková*)

Možné řešení. Skupina tří korálků ABC zabírá 12 mm, skupina šesti korálků $AABBCC$ zabírá 24 mm, skupina devíti korálků $AAABBBCCC$ zabírá 36 mm atd.

$$\underbrace{ABC}_{12}\underbrace{AABBCC}_{24}\underbrace{AAABBBCCC}_{36}\underbrace{AAAABBBBCCCC}_{48\,(\mathrm{mm})}\ldots$$

První skupina zabírá 12 mm nitě, první dvě skupiny zabírají 36 mm, první tři skupiny zabírají 72 mm atd. Vzhledem k počtu korálků každého tvaru ve skupině, vyjádříme délku skupiny, celkový počet korálků a celkovou délku dosud zabrané nitě:

počet trojic ve skupině	1	2	3	4	5	6	7	8	9
délka skupiny (mm)	12	24	36	48	60	72	84	96	108
celkový počet korálků	3	9	18	30	45	63	84	108	135
celková délka (mm)	12	36	72	120	180	252	336	432	540

Délky 500 mm je dosaženo v rámci deváté skupiny. Poslední úplná skupina sestává z osmi korálků každého tvaru. Na konci této skupiny je celkem zabráno 432 mm nitě, zbývá 68 mm, dosud použitých korálků je 108.

Devět korálků tvaru A zabírá 45 mm. S těmito korálky je celkem zabráno 477 mm nitě, zbývá 23 mm, dosud použitých korálků je 117.

Šest korálků tvaru B zabírá 24 mm. S těmito korálky je celkem zabráno 501 mm nitě, dosud použitých korálků je 123.

Andělka potřebuje alespoň 123 korálků.

Poznámka. Postupné sčítání v předchozí tabulce lze nahradit dělením se zbytkem:

$$500 : 12 \text{ dává } 41 \text{ a zbytek } 8.$$

Tedy do 500 mm se může vlézt 41 trojic ABC a zbude 8 mm. Je však nutné zohlednit výskyt ve skupinách. V celých skupinách umíme dostat $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ trojic ABC (s devátou skupinou bychom měli $36 + 9 = 45$, což je víc než 41). Těchto 36 trojic celkem zabírá 432 mm nitě ($36 \cdot 12 = 432$) a obsahuje 108 korálků ($36 \cdot 3 = 108$).

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Pan Vaflička smaží a prodává koblížky, pan Koblížek peče a prodává vafličky. Oba cukráři mají každý týden otevřeno od pondělí do pátku. Libuška u nich kupuje každé pondělí dvě vafličky a jeden koblížek, každé úterý tři koblížky a jednu vafličku, každou středu čtyři koblížky, každý čtvrtek tři vafličky a každý pátek dva koblížky a dvě vafličky. Pan Koblížek si jednoho dne všiml, že od prvního pondělí tohoto měsíce prodal Libušce celkem 30 vafliček.

Kolik koblížků prodal Libušce za stejné období pan Vaflička? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Za jeden týden Libuška koupí 8 vafliček ($2 + 1 + 0 + 3 + 2 = 8$). Třicet prodaných vafliček odpovídá nákupu za tři celé týdny a šesti vafličkám ve čtvrtém týdnu ($30 = 3 \cdot 8 + 6$). Šest vafliček ve čtvrtém týdnu má po nákupu ve čtvrtek ($2 + 1 + 0 + 3 = 6$).

Za jeden týden Libuška koupí 10 koblížků ($1 + 3 + 4 + 0 + 2 = 10$). Počet koblížků, které jí pan Vaflička prodal za tři celé týdny a první čtyři dny ve čtvrtém týdnu, byl

$$3 \cdot 10 + 1 + 3 + 4 + 0 = 38.$$

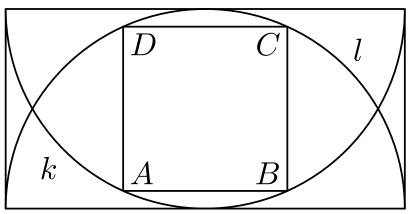
Poznámka. Ke stejnému výsledku lze dospět postupným vypisováním a sčítáním Libuščiných nákupů.

Z6–I–2

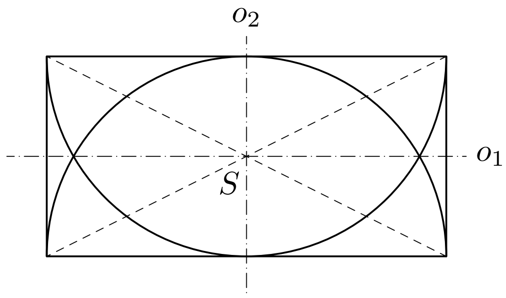
V obdélníku se stranami délek 4 cm a 8 cm jsou dány půlkružnice k a l, jejichž krajní body leží ve vrcholech obdélníku.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrcholy A a B ležely na půlkružnici k, vrcholy C a D ležely na půlkružnici l a strany čtverce byly rovnoběžné se stranami obdélníku.

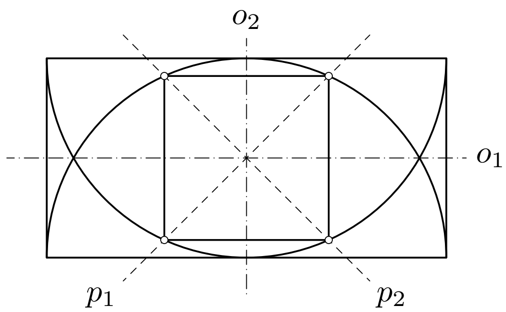
(*K. Pazourek*)



Možné řešení. Všechny souměrnosti obdélníku jsou též souměrnostmi doplněných půlkružnic. Jedná se o dvě osové souměrnosti (jejichž osy o_1, o_2 jsou osami dvojic protilehlých stran obdélníku) a středovou souměrnost (jejíž střed S je průsečíkem os souměrností neboli průsečíkem úhlopříček obdélníku).



Strany čtverce $ABCD$ mají být rovnoběžné se stranami obdélníku, proto výše popsané souměrnosti jsou také souměrnostmi čtverce. Zejména střed čtverce splývá se středem obdélníku. Navíc ve čtverci jsou úhlopříčky dalšími osami souměrností (které označíme p_1, p_2). Zejména tyto úhlopříčky jsou navzájem kolmé a půlí vnitřní úhly čtverce (stejně jako úhly vymezené osami o_1, o_2).



Vrcholy čtverce lze sestrojit např. takto:

- S = průsečík úhlopříček obdélníku,
- o_1, o_2 = rovnoběžky se stranami obdélníku jdoucí bodem S,
- p_1, p_2 = osy úhlů daných přímkami o_1, o_2,
- A, B, C, D = průsečíky přímek p_1, p_2 s půlkružnicemi k, l.

Poznámky. Delší strana daného obdélníku je dvakrát delší než kratší strana, tedy půlkružnice k, l se dotýkají jeho delších stran. Jedna z os o_1, o_2 prochází těmito body dotyku, zatímco druhá prochází průsečíky půlkružnic k, l. Úloha včetně uvedeného řešení dává smysl i pro obecný poměr stran.

Z6–I–3

Pětimístným palindromem myslíme takové pětimístné číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě desetitisíců a na místě desítek stejnou číslici jako na místě tisíců.

Najděte nejmenší pětimístný palindrom dělitelný 36. (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Číslo 36 má mnoho dělitelů a každým z nich je hledaný palindrom také dělitelný. Vzhledem k tomu, že $36 = 4 \cdot 9$ a čísla 4 a 9 jsou nesoudělná, stačí kontrolovat dělitelnost právě těmito čísly:

- Dělitelnost čtyřmi znamená, že poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi. Nejmenší dvojčíslí dělitelné čtyřmi s nejmenší nenulovou číslicí na místě jednotek je 12, tedy palindrom je tvaru:

$$2\ 1 * 1\ 2$$

- Dělitelnost devíti znamená, že ciferný součet je dělitelný devíti. Nejmenší možné doplnění předchozího tvaru je:

$$2\ 1\ 3\ 1\ 2$$

Nejmenší pětimístný palindrom dělitelný 36 je 21312.

Jiné řešení. Každý dělitel čísla 36 je také dělitelem hledaného palindromu. Zejména je palindrom dělitelný dvěma a sudé pětimístné palindromy řazené vzestupně jsou:

20002, 20102, 20202, 20302, 20402, 20502, 20602, 20702, 20802, 20902,
21012, 21112, 21212, 21312, ...

Právě poslední uvedené číslo je první, který je dělitelné 36. Nejmenší pětimístný palindrom dělitelný 36 je 21312.

Z6–I–4

Šárka s Lubošem společně zasadili 70 tulipánů různých barev. Šárka nesázela žluté tulipány a pět devítin těch, které zasadila, byly červené. Luboš nesázel červené tulipány a dvě sedmnáctiny těch, které zasadil, byly žluté.

Kolik zasazených tulipánů mělo jinou barvu než červenou či žlutou? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počet tulipánů, které zasadila Šárka, byl násobkem 9, počet těch, které zasadil Luboš, byl násobkem 17 a společně jich zasadili 70. Pro násobky 17 nepřevyšující 70 vyjádříme rozdíl od 70 a ověříme dělitelnost devíti:

Luboš	17	34	51	68
Šárka	53	36	19	2
děl. 9	ne	ano	ne	ne

Luboš zasadil 34 tulipánů, Šárka jich zasadila 36.

Červené tulipány sázela Šárka a bylo jich $\frac{5}{9} \cdot 36 = 20$. Žluté tulipány sázel Luboš a bylo jich $\frac{2}{17} \cdot 34 = 4$. Jinou barvu než červenou či žlutou mělo $70 - 20 - 4 = 46$ tulipánů.

Z6–I–5

Tři kamarádky se po letech sešly a sdělovaly si, kde která z nich bydlí:

První: „Já bydlím v Hradci Králové."
Druhá: „Já nebydlím v Opavě."
Třetí druhé: „Ty nebydlíš ani v Jihlavě."

Kamarádky opravdu bydlí ve zmiňovaných městech, každá v jiném. Jedna z kamarádek neřekla ostatním pravdu a nebyla to ta z Opavy.

Rozhodněte, kde která z kamarádek bydlí. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Postupně prověříme tři případy podle toho, která z kamarádek nemluvila pravdu.

Předpokládejme, že lhala první (a druhá a třetí mluvily pravdu):

- První nemůže bydlet v Opavě (protože ta z Opavy nelže), ani v Hradci (protože pak by mluvila pravdu). Tedy první bydlí v Jihlavě.
- Druhá nebydlí v Opavě (protože mluvila pravdu), ani v Jihlavě (protože tam bydlí první). Tedy druhá bydlí v Hradci.
- Na třetí zbývá Opava, což není s ničím v rozporu (jako pravdomluvná tam bydlet může a její výrok souhlasí s předchozím závěrem o druhé kamarádce).

Předpokládejme, že lhala druhá:

- Druhá má bydlet v Opavě (protože její výrok není pravdivý) a současně tam bydlet nemůže (protože ta z Opavy nelže). To je rozporuplná situace.

Předpokládejme, že lhala třetí (a první a druhá mluvily pravdu):

- První bydlí v Hradci (protože mluvila pravdu).
- Druhá nebydlí v Opavě (protože mluvila pravdu), ani v Hradci (protože tam bydlí první). Tedy druhá bydlí v Jihlavě.
- Na třetí zbývá Opava, což je v rozporu s tím, že ta z Opavy nelže.

Pouze první případ nevedl k žádnému rozporu. Tedy první kamarádka bydlí v Jihlavě, druhá v Hradci Králové a třetí v Opavě.

Z6–I–6

Ve čtvercové síti bydlí tři kruhy a tři trojúhelníky, každý v jiném poli. Každý tvar má alespoň jednoho souseda, přičemž sousedé obývají pole se společnou stranou. Obydlená pole tvoří souvislou oblast, tedy od každého ke každému se lze dostat přes sousedy. Každou noc se každý tvar může změnit podle toho, jak přes den vypadali jeho sousedé:

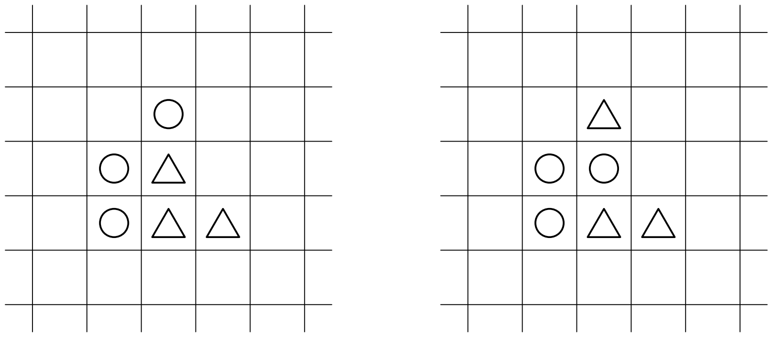
- pokud je tvar kruhem a mezi jeho sousedy bylo víc trojúhelníků než kruhů, tak se tvar změní na trojúhelník,
- pokud je tvar trojúhelníkem a mezi jeho sousedy bylo víc kruhů než trojúhelníků, tak se tvar změní na kruh,
- v ostatních případech se tvar nezmění.

Příklad obydlené čtvercové sítě a proměny po jedné noci je na obrázku níže.

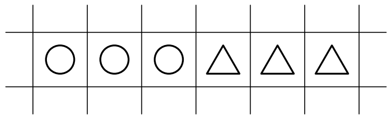
a) Rozmístěte tvary tak, aby se v noci neměnily.
b) Rozmístěte tvary tak, aby se každý tvar každou noc změnil.

c) Rozmístěte tvary tak, aby po několika nocích byly všechny tvary stejné.

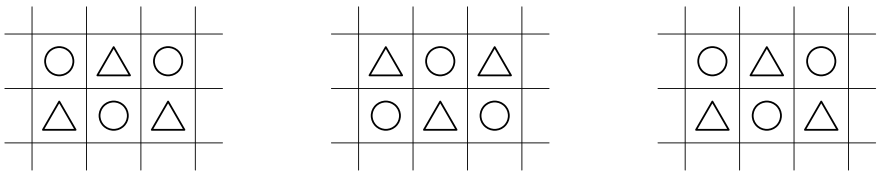
(I. Jančigová)



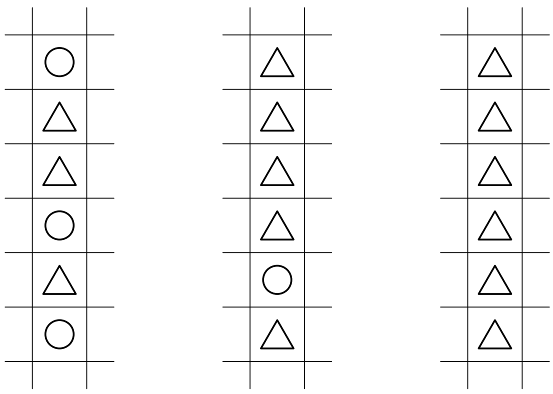
Možné řešení. a) Aby se žádné tvary neměnily, nemůže mít žádný kruh víc sousedů trojúhelníků a naopak. Rozmístění tvarů může vypadat takto:



b) Aby se všechny tvary měnily, musí mít každý kruh víc sousedů trojúhelníků a naopak. Rozmístění tvarů a následné změny mohou vypadat takto:



c) Aby se změny po čase ustálily, potřebujeme víc měnících se kruhů než trojúhelníků (či naopak). Rozmístění tvarů a následné změny mohou vypadat takto:



Poznámka. Systémy založené na podobných pravidlech mají zajímavé souvislosti a aplikace, viz např. Hru života.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Andulka a Zuzana pojídaly švestky. První den snědla Andulka tři čtvrtiny toho, co týž den snědla Zuzana. Druhý den snědla Zuzana tři poloviny toho, co týž den snědla Andulka. Dohromady za oba dny snědly 31 švestek a každé děvče každý den snědlo celý počet švestek.

Kolik švestek snědla za oba dny Andulka? (*L. Hozová*)

Možné řešení. První den Andulka snědla tři sedminy toho, co týž den snědly společně, druhý den snědla dvě pětiny toho, co týž den snědly společně. Zejména počet švestek společně snědených za první den byl násobkem 7, za druhý den násobkem 5. Celkem za oba dny snědly 31 švestek. Pro násobky 7 nepřevyšující 31 vyjádříme rozdíl od 31 a ověříme dělitelnost pěti:

1. den	7	14	21	28
2. den	24	17	10	3
děl. 5	ne	ne	ano	ne

První den společně snědly 21 švestek, druhý den jich snědly 10.

První den Andulka snědla 9 švestek ($\frac{3}{7} \cdot 21 = 9$), druhý den snědla 4 švestky ($\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$). Andulka za oba dny snědla 13 švestek.

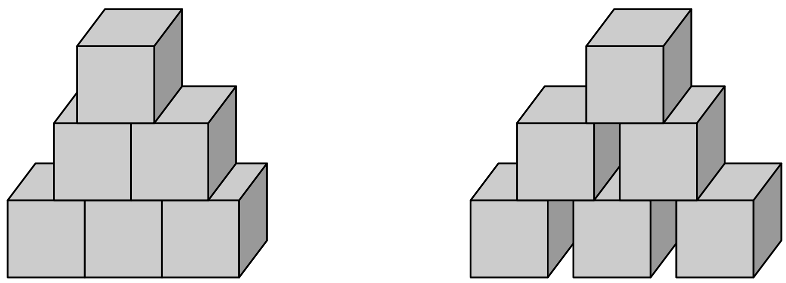
Poznámka. Přehledný záznam konzumace švestek vypadá takto:

	Andulka	Zuzana	celkem
1. den	9	12	21
2. den	4	6	10
celkem	13	18	31

Z7–I–2

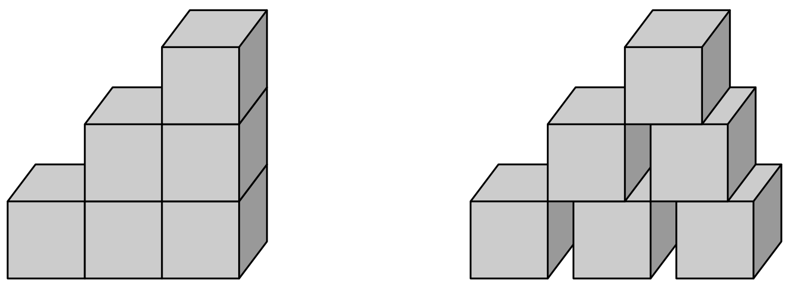
Mikuláš postavil pyramidu ze šesti stejných krychlí s hranami délky 7 cm. Spodní patro tvořily tři krychle, prostřední patro dvě krychle a horní patro jedna krychle. Sousední krychle v každém patře měly společnou stěnu, patra navzájem nepřečnívala. Vítězslav posunul krychle tak, že každá krychle v horních dvou patrech stála na dvou spodnějších krychlích a mezi sousedními krychlemi ve spodních dvou patrech byly mezery široké třetinu hrany krychle. Až na tyto mezery patra navzájem nepřečnívala.

O kolik cm^2 se liší povrchy původní a upravené pyramidy? (*V. Dedek*)



Možné řešení. Sousední krychle ve spodním a prostředním patře původní pyramidy měly 3 společné svislé stěny. Tedy posunutím krychlí vzniklo 6 svislých stěn navíc.

Ke změně povrchu přispívají také rozdíly na úrovni vodorovných rozhraní mezi patry. Ty nezávisí na míře posunutí pater vůči sobě. Pro vyjádření přírůstku povrchu je výhodné patra vhodně posunout (při zachování všech podmínek ze zadání). Pyramidy mohou vypadat např. takto:



V nové pyramidě přibyly 2/3 stěny mezi horním a prostředním patrem (1/3 na spodní stěně horní kostky a 1/3 na horní stěně pravé prostřední kostky) a 4/3 stěny mezi prostředním a spodním patrem (2/3 na spodních stěnách prostředních kostek a 2/3 na horních stěnách dvou spodních kostek).

Celkem je v povrchu nové pyramidy o osm stěn víc než v původní pyramidě ($6 + 2/3 + 4/3 = 8$). Jedna stěna má obsah $49\,\mathrm{cm}^2$ ($7 \cdot 7 = 49$). Povrchy původní a nové pyramidy se liší o $392\,\mathrm{cm}^2$ ($8 \cdot 49 = 392$).

Z7–I–3

Pankrác, Servác a Bonifác se ubytovali v hotelu. Čísla pokojů byla trojmístná a číslice na místě stovek určovala patro, na kterém se pokoj nacházel. U snídaně si podle přívěsků na klíčích od pokojů všimli, že:

- v číslech jejich pokojů jsou použity všechny číslice od 1 do 9,
- Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, Servácovo číslo je dělitelné osmi, Bonifácovo číslo je dělitelné sedmi,
- Bonifácovo číslo je čtyřikrát větší než Pankrácovo číslo,
- Servác bydlí na patře mezi Pankrácem a Bonifácem.

Určete čísla pokojů Pankráce, Serváce a Bonifáce. (*L. Hozová, E. Novotná*)

Možné řešení. Bonifácovo číslo je čtyřnásobkem Pankrácova čísla a Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, tedy Bonifácovo číslo je násobkem 36. Současně je Bonifácovo dělitelné sedmi, tedy je dělitelné 252 (čísla 36 a 7 jsou nesoudělná a $36 \cdot 7 = 252$).

Trojmístné násobky čísla 252 jsou

$$252, \quad 504, \quad 756,$$

a to jsou možná Bonifácova čísla. V prvním z těchto čísel se opakuje číslice 2, druhé obsahuje číslici 0. Oba tyto případy odporují zadání. Tedy Bonifácovo číslo může být jedině 756 a Pankrácovo číslo může být jedině $756 : 4 = 189$.

Dosud byly použity navzájem různé číslice od 1 do 9. Nebyly použity číslice 2, 3, 4, tedy Servácovo číslo může být jedno z následujících čísel:

$$234, \quad 324, \quad 342, \quad 432, \quad 423, \quad 243.$$

Každé z těchto čísel je mezi Pankrácovým a Bonifácovým číslem, dělitelné osmi je však pouze 432. Servácovo číslo může být jedině 432. To spolu Pankrácovým a Bonifácovým číslem vyhovuje všem podmínkám ze zadání.

Pankrác měl pokoj číslo 189, Servác 432 a Bonifác 756.

Poznámka. S podmínkami dělitelnosti lze nakládat různě. Např. také Pankrácovo číslo musí být dělitelné sedmi, současně je dělitelné devíti, takže je dělitelné 63.

Z7–I–4

V jedné z pěti nádob očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 je mince. Doprovodné nápisy oznamují:

„Mince je v nádobě s lichým číslem.“
„Mince je v nádobě s číslem větším než 3.“
„Mince je v nádobě s číslem menším než 4.“

Pravdomluvný hlídač s bezchybným úsudkem dodává:

„Jeden z nápisů není pravdivý, zbylé dva pravdivé jsou. Přestože vím, který nápis pravdivý není, neumím určit, ve které nádobě je mince.“

Rozhodněte, který z nápisů není pravdivý. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Postupně prověříme tři případy podle toho, který nápis nebyl pravdivý.

- Předpokládejme, že pravdivý nebyl první nápis (a zbylé dva byly pravdivé). Pak by mince měla být v nádobě se sudým číslem větším než 3 a současně menším než 4. To není možné.
- Předpokládejme, že pravdivý nebyl druhý nápis (a zbylé dva byly pravdivé). Pak by mince měla být v nádobě s lichým číslem menším než 4. To je možné a mince by v takovém případě byla buď v nádobě 1, nebo 3.
- Předpokládejme, že pravdivý nebyl třetí nápis (a zbylé dva byly pravdivé). Pak by mince měla být v nádobě s lichým číslem větším než 3 a ne menším než 4. To je možné a mince by v takovém případě byla v nádobě 5.

Možné případy jsou poslední dva. Přitom nádoba, ve které se mince nachází, je jednoznačně určena ve třetím případě, zatímco ve druhém případě nikoli. Nepravdivý nápis je ten druhý.

Poznámka. Druhý a třetí nápis si odporují, takže nemohly být oba pravdivé. Nepravdivý nápis byl jen jeden, tedy to byl buď druhý, nebo třetí; první nápis byl nutně pravdivý.

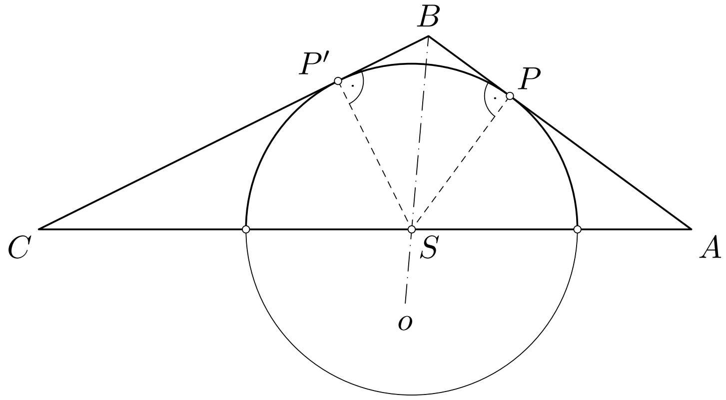
Z7–I–5

Je dán trojúhelník ABC s délkami stran $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$.

Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně AC a která se dotýká stran AB a BC. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Aby se půlkružnice dotýkala stran AB a BC, musí mít střed na ose úhlu ABC. Aby krajní body půlkružnice ležely na straně AC, musí mít střed na této straně.

Tedy střed hledané půlkružnice je průsečíkem osy úhlu ABC a strany AC. Poloměr je pak určen patou kolmice ze středu k přímce AB či k přímce BC. (Tyto úsečky jsou shodné právě proto, že střed leží na ose úhlu ABC, viz shodnost trojúhelníků BSP a BSP' na obrázku.)



Konstrukce:

- $o =$ osa úhlu ABC,
- $S =$ průnik přímek o a AC,
- $P =$ pata kolmice z bodu S k přímce AB (či BC),
- kružnice se středem S a poloměrem SP,
- půlkružnice vymezená přímkou AC a bodem P.

Poznámka. Zadaný trojúhelník je tupoúhlý s tupým úhlem u vrcholu B a dotykové body půlkružnice vskutku vychází na stranách trojúhelníku. V obecném trojúhelníku úloha řešení mít nemusí. Omezující jsou právě zúžení na strany (necelé přímky) a půlkružnice (necelé kružnice).

Z7–I–6

Káťa a Škubánek smaží každý na své pánvičce jednu palačinku za druhou. Oba začali smažit současně, Kátě trvá každá palačinka tři minuty, Škubánkovi trvá každá palačinka čtyři minuty. Každých pět minut od začátku smažení se objeví mlsný kocour Luciáš. Pokud se Káťa i Škubánek věnují smažení, tak jim jednu hotovou palačinku ukradne, pokud zrovna přendávají palačinku z pánvičky na talíř, tak se schová a palačinky nechá být.

Kolik palačinek musí Káťa se Škubánkem usmažit, aby jim zbylo 150? Jak dlouho jim to bude trvat? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Přehled prvních 20 minut smažení vypadá takto:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Káťa			+			+			+			+			+			+		
Škubánek				+				+				+				+				+
Luciáš					−					−					=					=

Zde + značí jednu palačinku na talíři navíc, − značí o jednu palačinku méně při úspěšném Luciášově pokusu a = značí žádnou změnu při neúspěšném Luciášově pokusu.

Nejmenší časový úsek, na jehož konci se potkávají všichni tři, trvá 60 minut (nejmenší společný násobek intervalů Káti, Škubánka a Luciáše). Během této doby se předchozí schéma zopakuje třikrát. Tedy Káťa usmaží 20 palačinek, Škubánek usmaží 15 palačinek a Luciáš se objeví 12krát. Luciáš se potkává s Káťou v minutách 15, 30, 45, 60, se Škubánkem v minutách 20, 40, 60 (přičemž v 60 minutě se potkává s oběma) a v těchto minutách nekrade. Ve svých zlodějských pokusech je tedy úspěšný jen šestkrát. Celkem za 60 minut Káťa se Škubánkem usmaží 35 palačinek, ale na talíři jich zbude 29.

Za pět hodin Káťa se Škubánkem usmaží 175 palačinek, na talíři jich zbude 145. Z úvodního přehledu je patrné, že k chybějícím pěti palačinkám se dopracují po dalších 12 minutách — celkem jich usmaží sedm, ale dvě jim Luciáš ukradne.

Káťa se Škubánkem musí usmažit 182 palačinek a bude jim to trvat 5 hodin a 12 minut.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Ivan, Jarek, Kája a Luboš mají dohromady 90 známek. Kdyby měl Ivan o dvě známky méně, Jarek o dvě více, Kája dvojnásobek a Luboš polovinu toho, co nyní, měli by všichni stejně.

Kolik známek má každý z chlapců? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počty známek jednotlivých chlapců označíme jejich počátečními písmeny. Podle zadání platí

$$I + J + K + L = 90,$$
$$I - 2 = J + 2 = 2K = \frac{L}{2}.$$

Hodnotu na druhém řádku označíme Z, pomocí ní vyjádříme ostatní neznámé,

$$I = Z + 2, \quad J = Z - 2, \quad K = \frac{Z}{2}, \quad L = 2Z,$$

dosadíme do první rovnice a dostáváme $\frac{9}{2}Z = 90$. Tedy $Z = 20$ a z předchozího vyjádření máme

$$I = 22, \quad J = 18, \quad K = 10, \quad L = 40.$$

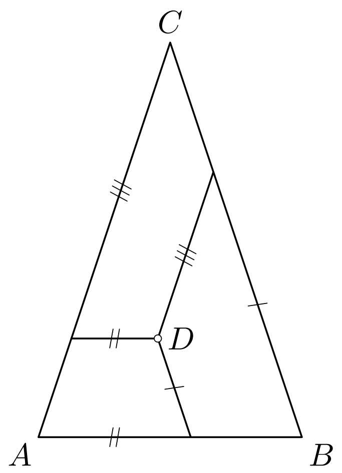
Ivan má 22 známek, Jarek 18, Kája 10 a Luboš 40.

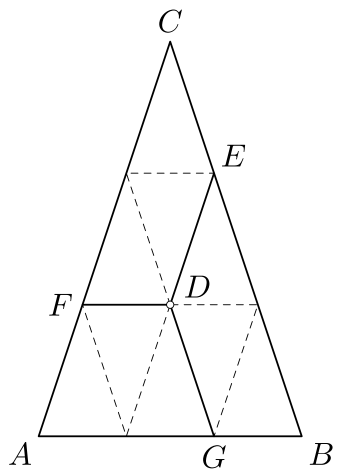
Z8–I–2

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 12 cm a výškou k základně velikosti 18 cm. Rozdělte trojúhelník na tři lichoběžníky o stejném obsahu. (*L. Dedková*)

Možné řešení. Základny lichoběžníku jsou rovnoběžné. Strany hledaných lichoběžníků buď náleží stranám trojúhelníku, nebo jsou s nimi rovnoběžné. Rozborem možností zjistíme, že žádná strana žádného lichoběžníku nemůže zabírat celou stranu trojúhelníku a že žádná strana trojúhelníku nemůže být tvořena dvěma rameny, ani dvěma základnami lichoběžníků. Dělení trojúhelníku na lichoběžníky je dáno jedním bodem uvnitř trojúhelníku a třemi rovnoběžkami se stranami trojúhelníku (viz první z níže uvedených obrázků).

Potřebujeme najít dělicí bod (společný bod lichoběžníků) tak, aby obsahy lichoběžníků byly stejné. Pro tento účel je vhodné využít obvyklá dělení trojúhelníku na menší shodné trojúhelníky. V našem případě pomáhá rozdělení na trojúhelníky s třetinovými stranami vzhledem k danému trojúhelníku. Takových trojúhelníků je devět a každý z hledaných lichoběžníků je složen ze tří (viz druhý obrázek).



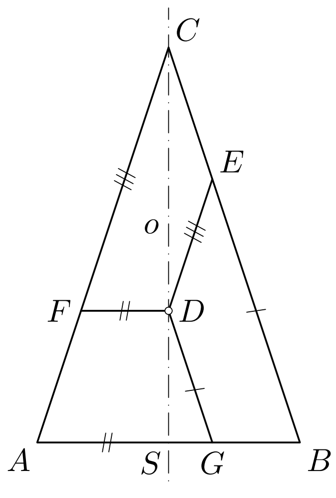


Konstrukce rovnoramenného trojúhelníku ABC pro danou základnu a výšku:

- úsečka AB velikosti $12\,\mathrm{cm}$,
- $o =$ osa úsečky AB a $S =$ střed úsečky AB,
- $C =$ bod na přímce o ve vzdálenosti $|SC| = 18\,\mathrm{cm}$,
- trojúhelník ABC.

Úsečka SC je výškou rovnoramenného trojúhelníku a výše vyznačené příčky trojúhelníku ji protínají ve třetinách (zejména $|SD| = \frac{1}{3}|SC| = 6\,\mathrm{cm}$). Konstrukce dělicího bodu a lichoběžníků vypadá takto:

- $D =$ bod na úsečce SC ve vzdálenosti $|SD| = 6\,\mathrm{cm}$,
- rovnoběžky se stranami trojúhelníku ABC jdoucí bodem D,
- E, F, $G =$ průsečíky těchto rovnoběžek se stranami trojúhelníku,
- lichoběžníky $AGDF$, $BEDG$, $CFDE$.



Poznámky. Představené dělení je platné v obecném trojúhelníku a dělicí bod D je jeho těžištěm. Rovnoramennost trojúhelníku má za následek jen to, že jedna z těžnic je výškou a dva ze tří lichoběžníků jsou shodné.

Jinou konstrukci bodu D a lichoběžníků lze založit na třetinovém dělení stran trojúhelníku ABC a vhodném spojování takto vzniklých bodů (viz druhý z výše uvedených obrázků).

Z8–I–3

Pro čísla a, b, c, d platí:

- číslo a dává po dělení třemi zbytek 1,
- číslo b dává po dělení šesti zbytek 2,
- $a - b = d - c$,
- číslo d je dělitelné třemi.

Jaký zbytek po dělení devíti může dávat číslo c? Najděte všechny možnosti.

(*E. Semerádová*)

Možné řešení. Možná čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 1, resp. po dělení šesti zbytek 2, jsou

$$a = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \dots$$
$$b = 2,\ 8,\ 14,\ 20,\ 26,\ \dots$$

Nezáporné rozdíly $a - b$ řazené vzestupně jsou

$$a - b = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \dots$$

Sousední čísla v tomto výpisu se liší o 3 a nejmenší číslo je 2, tedy zbytek po dělení $a - b$ třemi je 2. Opačný rozdíl $b - a$ pak po dělení třemi dává zbytek 1.

Z podmínky $a - b = d - c$ máme $c = d + b - a$, kde číslo d je dělitelné třemi a $b - a$ dává po dělení třemi zbytek 1. Proto také číslo c dává po dělení třemi zbytek 1:

$$c = 1,\ 4,\ 7, 10,\ 13,\ 16,\ \dots \tag{$*$}$$

Možné zbytky po dělení čísla c devíti jsou 1, 4, 7.

Poznámky. Čtveřic čísel a, b, c, d splňujících podmínky ze zadání je nepřeberné množství a všechny uvedené zbytky po dělení čísla c devíti opravdu mohou nastat. Pro příklad stačí uvážit čísla $a = 4$ a $b = 2$ a posloupnost čísel c jako v $(*)$, pro niž odpovídající posloupnost čísel d je

$$d = 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ \dots$$

Dělení se zbytkem je platné v oboru všech celých čísel (ne jen těch nezáporných). Tedy např. čísla, která po dělení třemi dávají zbytek 1, jsou také

$$a = -2, -5, -8, -11, -14, \dots$$

To, že jsme se v řešení úlohy omezili na nezáporná čísla, ničemu nevadí, neboť nás zajímaly hlavně zbytky.

Předchozí výčty a úvahy vedoucí k $(*)$ je možné nahradit následujícími obecnými vyjádřeními. Čísla a, b, d jsou podle zadání tvaru

$$a = 3k + 1, \quad b = 6l + 2, \quad d = 3m,$$

kde k, l, m jsou celá čísla. Číslo c je pak vyjádřeno jako

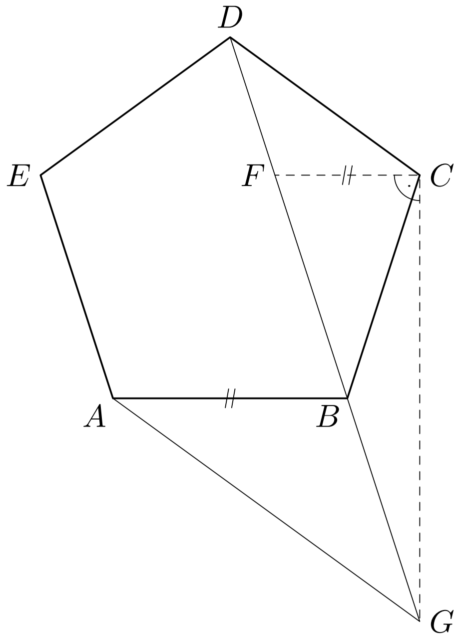
$$c = d + b - a = 3(m + 2l - k) + 1.$$

Vskutku číslo c po dělení třemi dává zbytek 1.

Z8–I–4

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem C protíná přímku BD v bodě F. Kolmice k přímce CF procházející bodem C protíná přímku BD v bodě G.

Určete velikost úhlu AGF. (*P. Bak*)



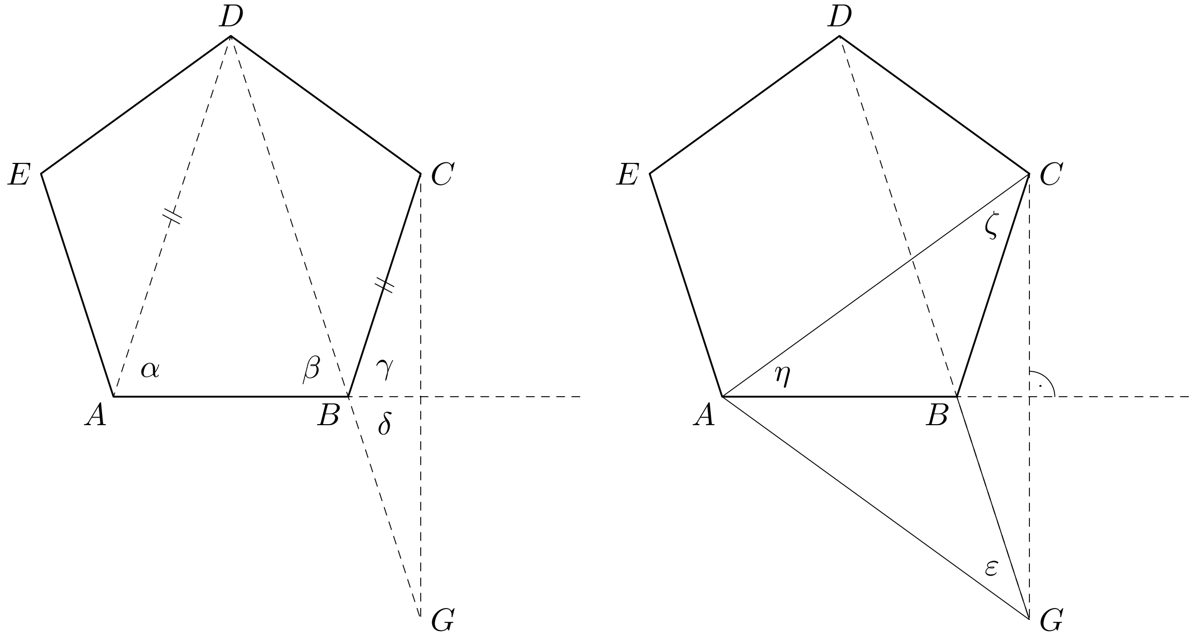
Možné řešení. V následujících úvahách budeme používat několik vlastností pravidelného pětiúhelníku:

- V pravidelném pětiúhelníku jsou všechny strany navzájem shodné a stejně tak všechny úhlopříčky. Tedy jakýkoli trojúhelník tvořený třemi vrcholy pravidelného pětiúhelníku je rovnoramenný.
- Pravidelný pětiúhelník je osově souměrný podle pěti různých os. Při každé z těchto souměrností se vždy jedna strana a nepřiléhající úhlopříčka zobrazují samy na sebe, tedy jsou navzájem rovnoběžné.
- Obecný pětiúhelník sestává ze tří trojúhelníků, tedy součet velikostí jeho vnitřních úhlů je $3 \cdot 180° = 540°$. Pravidelný pětiúhelník má všechny vnitřní úhly shodné, tedy velikost vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku je $540° : 5 = 108°$.

V našem příkladu ukážeme, že trojúhelník ABG je shodný s trojúhelníkem ABC, tedy hledaný úhel najdeme mezi úhly vymezenými stranami a úhlopříčkami pětiúhelníku. Začneme tím, že si uvědomíme několik vztahů mezi úhly vyznačenými na prvním z níže uvedených obrázků.

Trojúhelník ABD je rovnoramenný, tedy úhly u základny jsou shodné, $\alpha = \beta$. Přímky AD a BC jsou rovnoběžné, tedy souhlasné úhly u vrcholů A a B jsou shodné, $\alpha = \gamma$. Úhly β a δ jsou vrcholové úhly s vrcholem B, tedy jsou také shodné, $\beta = \delta$. Celkem tak platí, že všechny vyznačené úhly jsou navzájem shodné.

Přímka CG je kolmá k přímce CF, a ta je rovnoběžná s přímkou AB. Tedy přímky CG a AB jsou kolmé. To spolu s předchozím poznatkem ($\gamma = \delta$) znamená, že body C a G jsou osově souměrné podle přímky AB. Proto také trojúhelníky ABC a ABG jsou osově souměrné a hledaný úhel u vrcholu G je shodný s vnitřním úhlem trojúhelníku ABC u vrcholu C. To se značením jako na druhém obrázků znamená, že $\varepsilon = \zeta$.



Trojúhelník ABC je rovnoramenný, tedy úhly u základny jsou shodné, $\zeta = \eta$. Vnitřní úhel u vrcholu B je vnitřním úhlem pětiúhelníku, tedy jeho velikost je $108°$. Součet vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku je $2\zeta + 108° = 180°$, odkud dostáváme $\zeta = 36°$.

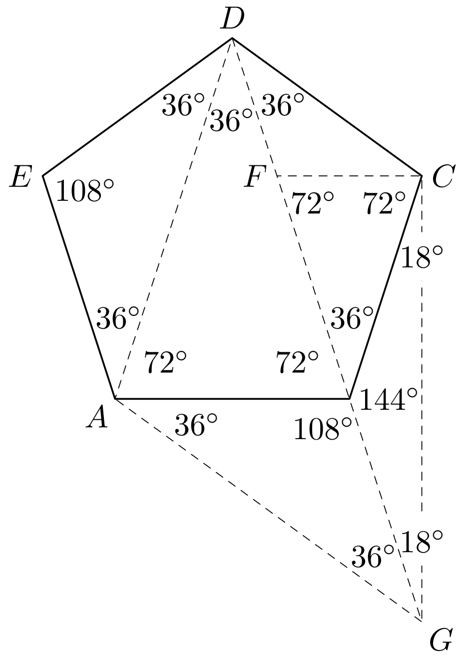
Velikost úhlu AGF je $36°$.

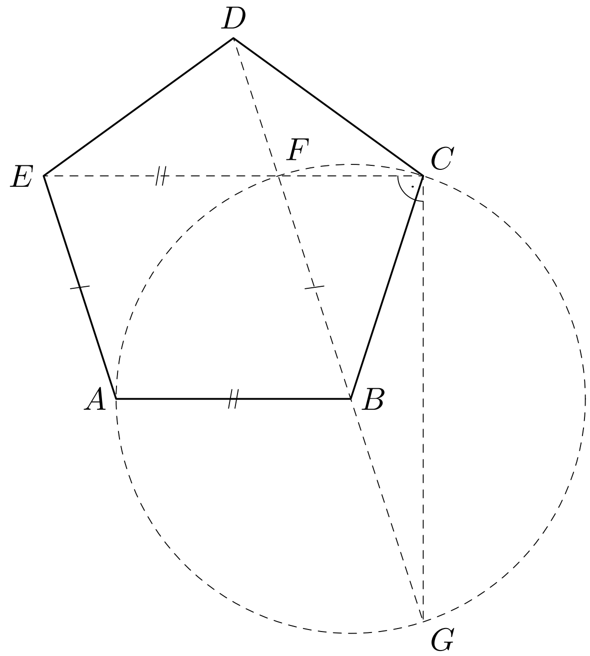
Poznámky. Shodnost úhlů γ a δ je ekvivalentní shodnosti sousedních úhlů ABC a ABG, a tu lze zdůvodnit takto: Úhel ABG se shoduje s úhlem BAE (střídavé úhly vzhledem k rovnoběžkám $AE \| BD$), úhel BAE se shoduje s úhlem ABC (vnitřní úhly pravidelného pětiúhelníku), tedy úhel ABG se shoduje s úhlem ABC.

Velikosti zmiňovaných úhlů (a mnohých dalších) lze snadno vyjádřit, i když k dořešení úlohy to nutné není. Možnosti jejich odvození jsou rozmanité, viz též úlohu **Z8–I–3** v loňském ročníku MO. Pro představu některé hodnoty shrnujeme v prvním z níže uvedených obrázků.

Bod F nebyl nijak podstatný, potřebovali jsme pouze rovnoběžnost přímek CF a AB. Bod F je vlastně průsečíkem úhlopříček BD a CE.

Se znalostí Thaletovy věty, resp. věty opačné lze shodnost úseček BC a BG odvodit takto: Protože $AB \| CE$, $AE \| BD$ a strany AB, AE jsou shodné, je čtyřúhelník $ABFE$ kosočtvercem. Všechny strany kosočtverce jsou shodné a shodují se také se stranou BC, zejména úsečky BF a BC jsou shodné. Protože trojúhelník FCG je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C, leží tento bod na (Thaletově) kružnici s průměrem FG. Protože BF se shoduje s BC, je bod B středem této kružnice a úsečky BF, BC, BG jsou jejími poloměry, viz druhý obrázek.





Z8–I–5

Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75. Součet čísel a a b je větší než 100 a menší než 200.

Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Největší společný dělitel čísel a a b označíme D. Čísla a a b jsou pak tvaru

$$a = A \cdot D, \quad b = B \cdot D,$$

kde A a B jsou nesoudělná čísla. Protože pořadí čísel není důležité, budeme v dalším pro zjednodušení předpokládat, že $a < b$ neboli $A < B$.

S tímto značením je nejmenší společný násobek čísel a a b vyjádřen jako $A \cdot B \cdot D$. Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75, tedy

$$A \cdot B = 75.$$

Protože $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$ a čísla A a B jsou nesoudělná, platí buď $A = 1$ a $B = 75$, nebo $A = 3$ a $B = 25$. V každém z těchto případů zjistíme, pro které hodnoty D platí podmínka o součtu $a + b$.

- Pro $A = 1$ a $B = 75$ dostáváme:

D	a	b	$100 < a + b < 200$
1	1	75	ne
2	2	150	ano
3	3	225	ne

- Pro $A = 3$ a $B = 25$ dostáváme:

D	a	b	$100 < a + b < 200$
1	3	25	ne
2	6	50	ne
3	9	75	ne
4	12	100	ano
5	15	125	ano
6	18	150	ano
7	21	175	ano
8	24	200	ne

S rostoucím D se zvětšuje i součet $a + b$, tedy není třeba dalšího zkoušení. Všechny možné dvojice čísel a, b s uvedenými vlastnostmi (až na pořadí) jsou:

$$2, 150; \quad 12, 100; \quad 15, 125; \quad 18, 150; \quad 21, 175.$$

Poznámka. Pokud N označíme nejmenší společný násobek čísel a a b, pak z úvodního rozboru máme $N = A \cdot B \cdot D$, a tedy

$$N \cdot D = (A \cdot D) \cdot (B \cdot D) = a \cdot b.$$

Vyjádřeno slovy: součin nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou čísel je roven součinu těchto čísel. S tímto postřehem lze pracovat od začátku a zjednodušit některá značení.

Z8–I–6

Rybář Štika chytil několik ryb. Když prodal tři nejtlustší ryby majiteli místní restaurace, snížil celkovou hmotnost svého úlovku o 35 %. Když dal tři nejhubenější ryby svému psovi, snížil hmotnost zbývajících ulovených ryb o pět třináctin.

Kolik ryb chytil pan Štika? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Tři nejtlustší ryby odpovídají 35 % váhy celého úlovku, zbývající ryby odpovídají 65 %. Pět třináctin tohoto zbytku tvoří čtvrtinu ($\frac{5}{13} \cdot \frac{65}{100} = \frac{1}{4}$), tedy tři nejhubenější ryby odpovídají 25 % váhy celého úlovku. Zbylý neznámý počet ryb tak odpovídá 40 % váhy celého úlovku ($100 - 35 - 25 = 40$).

Protože zbylé ryby váží víc než tři nejtlustší, byly alespoň čtyři. Protože zbylé ryby váží méně než dvojnásobek váhy tří nejhubenějších, bylo jich nanejvýš pět. Dále ryba ze skupiny tří nejtlustších váží průměrně $11{,}\overline{6}$ % váhy celého úlovku ($35 : 3 = 11{,}\overline{6}$) a ryba ze skupiny tří nejhubenějších váží průměrně $8{,}\overline{3}$ % váhy celého úlovku ($25 : 3 = 8{,}\overline{3}$). S těmito poznatky rozhodneme o počtu zbylých ryb:

- Kdyby zbylých ryb bylo pět, pak by jedna vážila průměrně 8 % váhy celého úlovku ($40 : 5 = 8$), což je méně než průměrná váha nejhubenějších ryb. To není možné.
- Kdyby zbylé ryby byly čtyři, pak by jedna vážila průměrně 10 % váhy celého úlovku ($40 : 4 = 10$), což je mezi průměrnými váhami nejtlustších a nejhubenějších ryb. To je možné.

Zbylé ryby byly čtyři. Pan Štika chytil deset ryb.

Poznámka. Pokud označíme n celkový počet ryb, potom vztahy mezi průměrnými vahami tří nejtlustších, $n - 6$ zbylých a tří nejhubenějších ryb jsou:

$$\frac{35}{3} \geqq \frac{40}{n-6} \geqq \frac{25}{3}.$$

To po úpravách vede k nerovnostem $n \geqq \frac{330}{35}$ a $n \leqq \frac{270}{25}$. Jediné vyhovující přirozené číslo je $n = 10$.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y$ je 16. *(P. Bak)*

Možné řešení. Hledáme celá čísla x, y vyhovující podmínkám

$$3x + 5y = 16, \quad x + y = p,$$

kde p je neznámé prvočíslo. Z druhé rovnice vyjádříme $y = p - x$ a dosadíme do první rovnice. Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 3x + 5(p - x) &= 16, \\ 5p - 2x &= 16, \\ 5p &= 2(8 + x). \end{aligned}$$

Na pravé straně poslední upravené rovnice je sudé číslo, tedy p musí být sudé prvočíslo neboli $p = 2$. Odtud po dosazení dostáváme

$$5 = 8 + x, \quad y = 2 - x.$$

Jediná vyhovující dvojice čísel je $x = -3$ a $y = 5$.

Jiné řešení. Číslo $3x + 5y = 16$ je sudé, tedy x a y musí mít stejnou paritu (jinak by uvedená kombinace byla lichá). Proto také součet $x + y$ je sudý a jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $p = 2$ a dostáváme soustavu rovnic:

$$3x + 5y = 16, \quad x + y = 2.$$

Obvyklými úpravami (jako např. u předchozího řešení) zjistíme, že jediným řešením této soustavy je dvojice čísel $x = -3$ a $y = 5$.

Jiné řešení. Začneme tím, že popíšeme všechna celočíselná řešení rovnice $3x + 5y = 16$ a poté ověříme druhou podmínku. Postupně pro násobky 5 vyjádříme rozdíl od 16 a ověříme dělitelnost třemi:

$5y$	...	-5	0	5	10	...
$16 - 5y$	...	21	16	11	6	...
děl. 3	...	ano	ne	ne	ano	...

Prvnímu vyhovujícímu případu v tabulce odpovídá dvojice $x_1 = 7$ a $y_1 = -1$, druhému dvojice $x_2 = 2$ a $y_2 = 2$. Rozdíly mezi těmito dvěma řešeními (stejně jako mezi jakýmikoli dvěma sousedními řešeními) jsou $x_1 - x_2 = 5$ a $y_1 - y_2 = -3$. Všechna celočíselná řešení rovnice $3x + 5y = 16$ jsou tvaru

$$x = 2 + 5k, \quad y = 2 - 3k, \tag{$*$}$$

kde k je celé číslo. Pomocí tohoto mezivýsledku vyjádříme součet,

$$x + y = 4 + 2k = 2(2 + k),$$

což znamená, že $x+y$ je sudé číslo. Současně $x+y$ má být prvočíslo a jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $k = -1$ a po dosazení do $(*)$ dostáváme jedinou vyhovující dvojici čísel $x = -3$ a $y = 5$.

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem $864\,\mathrm{cm}^3$ a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. (*V. Dedek*)

Možné řešení. Označíme velikost hrany podstavy a, velikost výšky hranolu v a velikost jeho tělesové úhlopříčky u (vše v cm). Obsah podstavy je pak vyjádřen jako a^2, objem hranolu jako a^2v a obsah pláště jako $4av$. Ze zadání máme vztahy

$$a^2v = 864, \quad 4av = 2a^2,$$

z nichž vyjádříme a, v a následně dopočítáme u.

Po krácení z druhého vztahu (velikost a je nenulová) plyne $a = 2v$ a dosazením do prvního vztahu dostáváme $4v^3 = 864$. Tedy

$$v = \sqrt[3]{216} = 6, \quad a = 2 \cdot 6 = 12.$$

Tělesová úhlopříčka hranolu je přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je úhlopříčkou podstavy a druhá výškou hranolu. Dvojím užitím Pythagorovy věty dostáváme

$$u = \sqrt{2a^2 + v^2} = \sqrt{324} = 18.$$

Tělesová úhlopříčka hranolu měří 18 cm.

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ sestávající z prvních n přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.

Najděte největší možné n, pro které to je možné. (*T. Bárta*)

Možné řešení. Abychom mohli rozdělovat do pěti množin, musí být n alespoň pět.

Pro $n = 5$ je rozdělení jediné možné:

$$\{1\}, \ \{2\}, \ \{3\}, \ \{4\}, \ \{5\}.$$

Pro $n = 6$ je jedno z možných rozdělení toto:

$$\{1, 2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}.$$

Pro rostoucí n můžeme zkoušet hledat rozdělení s požadovanými vlastnostmi. Budeme úspěšní až po $n = 11$, kde jedno z možných rozdělení je toto:

$$\{1, 2\},\ \{3, 4\},\ \{5, 6\},\ \{7, 8\},\ \{9, 10, 11\}.$$

Pro $n \geqq 12$ je v dané množině alespoň šest sudých čísel 2, 4, 6, 8, 10, 12, která máme rozdělit do pěti podmnožin. Tedy alespoň v jedné podmnožině se sejdou alespoň dvě sudá čísla. Každá dvě sudá čísla však mají společného dělitele, proto rozdělení s požadovanými vlastnostmi pro žádné $n \geqq 12$ není možné.

Největší možné n je 11.

Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. (*T. Bárta*)

Možné řešení. Po přičtení jednomístného čísla se má ciferný součet podstatně zmenšit. To se může stát v čísle s hodně devítkami za sebou, které se změní na nuly. Např. číslo 9994 s ciferným součtem 31 se po přičtení 6 změní na číslo 10000 s ciferným součtem 1.

V našem případě se má ciferný součet zmenšit o $2024 - 74 = 1950$. Přitom platí $1950 = 216 \cdot 9 + 6$, tedy budeme potřebovat 216 devítek. Rozdílu 1950 v ciferných součtech lze dosáhnout tak, že k číslu sestávajícího z 216 devítek a sedmičky (které má ciferný součet $216 \cdot 9 + 7 = 1951$) přičteme 3, čímž dostaneme číslo sestávající z jedničky a 217 nul (které má ciferný součet 1).

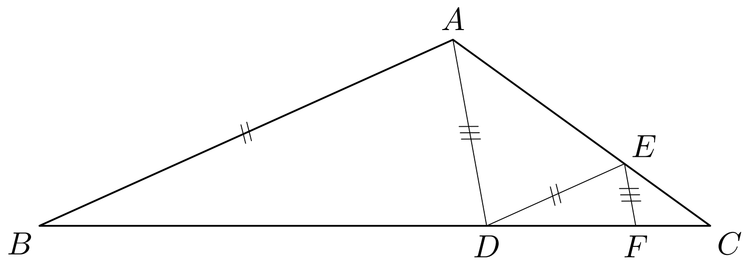
Nyní stačí předchozí nápad upravit tak, aby původní číslo mělo ciferný součet 2024. Protože $2024 = 1951 + 73$, stačí zleva přidat libovolnou posloupnost číslic se součtem 73 a jednu nulu. Vyhovující odpovědí může být např. číslo sestávající ze 73 jedniček, jedné nuly, 216 devítek a sedmičky:

1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111-
0999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999-
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999-
999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999997

Z9–I–5

V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F.

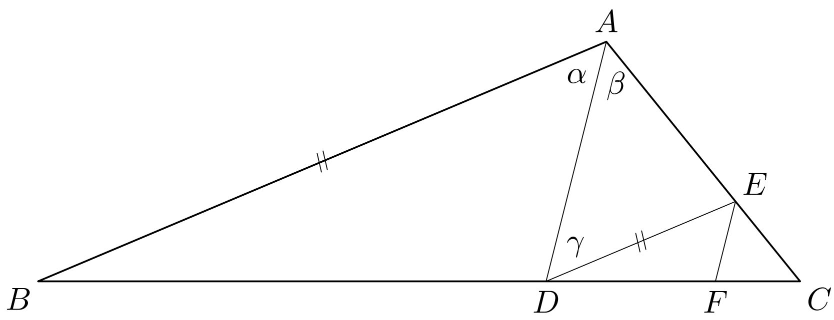
Určete poměr úseček AD a EF. (*M. Dományová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Díky rovnoběžnosti $AD \| EF$ jsou trojúhelníky CAD a CEF podobné a hledaný poměr úseček odpovídá koeficientu této podobnosti. Díky rovnoběžnosti $AB \| ED$ jsou také trojúhelníky CAB a CED podobné. Koeficient podobnosti pro první i pro druhou dvojici trojúhelníků je stejný, neboť je určen týmž bodem E na straně AC. Tento poměr odvodíme z daného poměru stran trojúhelníku ABC.

Začneme tím, že si uvědomíme několik vztahů mezi úhly vyznačenými na následujícím obrázku:



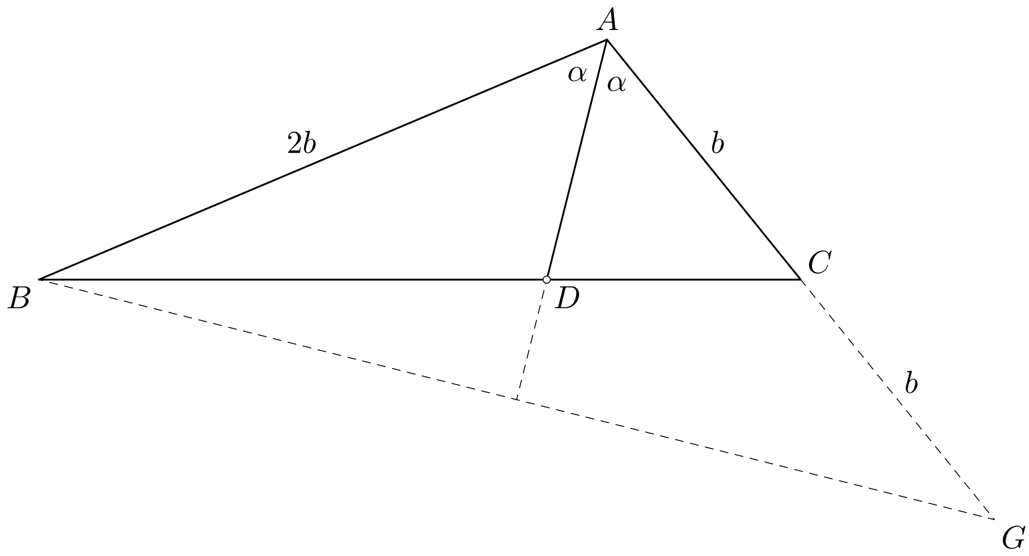
Přímka AD je osou úhlu BAC, tedy sousední úhly α a β jsou shodné. Přímky AB a ED jsou rovnoběžné, tedy střídavé úhly α a γ u vrcholů A a D jsou shodné. Celkem platí, že úhly β a γ jsou shodné. Tedy trojúhelník ADE je rovnoramenný se shodnými rameny AE a ED.

Trojúhelníky CAB a CED jsou podobné, tedy odpovídající si poměry stran jsou stejné. Zejména $|ED| : |EC| = |AB| : |AC|$, a tento poměr je podle zadání $2 : 1$. Dohromady s předchozím poznatkem ($|AE| = |ED|$) dostáváme $|AE| : |EC| = 2 : 1$ neboli $|AC| : |EC| = 3 : 1$. To je hledaný poměr podobnosti trojúhelníků CAD a CEF.

Úsečky AD a EF jsou v poměru $3 : 1$.

Poznámky. Obecně platí, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protilehlou stranu ve stejném poměru, v jakém jsou přilehlé strany. V našem případě to znamená $|BD| : |DC| = |BA| : |AC|$ a obdobně (ze vzájemné podobnosti) $|DF| : |FC| = |DE| : |EC|$. Tento poměr však známe ze zadání, tj. $|DF| : |FC| = 2 : 1$ neboli $|DC| : |FC| = 3 : 1$. To je hledaný poměr podobnosti trojúhelníků CAD a CEF, a tedy i úseček AD a EF.

Všechny zmiňované dvojice podobných trojúhelníků jsou stejnolehlé se středem v bodě C. Hledaný poměr velikosti úseček AD a EF je koeficientem této stejnolehlosti, zejména platí $|AD| : |EF| = |BC| : |DC|$. To, že tento poměr je $3 : 1$, plyne z interpretace bodu D jakožto těžiště ve vhodném trojúhelníku:



Zde bod G je doplněn jako bod souměrný s bodem A podle středu C. Bod C je středem úsečky AG, tedy přímka BC je těžnicí trojúhelníku ABG. Trojúhelník ABG je rovnoramenný a přímka AD je osou úhlu vymezeného rameny AB a AG, tedy to je také těžnice. Proto je bod D těžištěm trojúhelníku ABG.

Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. (*L. Hozová*)

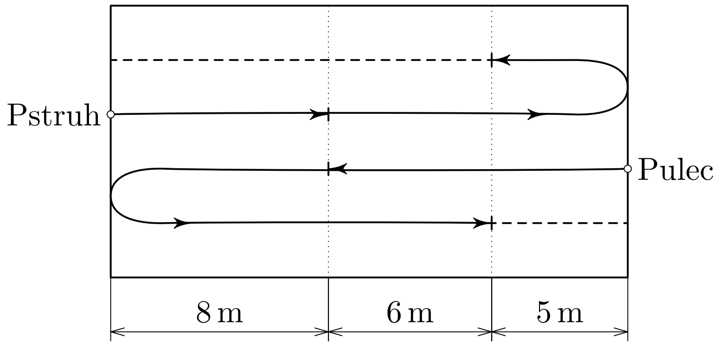
Možné řešení. Druhé míjení proběhlo blíž od Pulcova břehu než první míjení od Pstruhova břehu. Tedy Pulec plaval rychleji než Pstruh, a proto po zásluze vyhrál.

Při prvním míjení měli Pstruh a Pulec v součtu uplavánu jednu délku bazénu, při druhém míjení měli v součtu tři délky bazénu. Pokud označíme t čas prvního míjení, pak v čase $2t$ měl Pulec otočku za sebou, zatímco Pstruh před sebou, a v čase $3t$ se míjeli podruhé.

Pstruh za čas t uplaval 8 metrů, tedy za čas $3t$ uplaval 24 metrů. Současně v čase $3t$ přeplaval celý bazén a dalších 5 metrů po otočce. Bazén měl na délku 19 metrů $(24-5=19)$.

Poznámky. Pro kontrolu můžeme vyjádřit vzdálenost mezi místy míjení jako $19-8-5=$ $=6\,(\mathrm{m})$. Pulec za časový interval délky t uplaval $5+6=11\,(\mathrm{m})$. Mezi časy t a $2t$ doplaval na konec bazénu, otočil se a přidal $11-8=3\,(\mathrm{m})$. Mezi časy $2t$ a $3t$ uplaval dalších $11\,\mathrm{m}$ a na druhý konec bazénu mu chybělo $19-3-11=5\,(\mathrm{m})$. To souhlasí s údajem ze zadání.

Přikládáme pokus o znázornění celé situace:



Jiné řešení. K délce bazénu se lze dopočítat pomocí neznámé x, která značí vzdálenost v metrech mezi místy prvního a druhého míjení:

Z předchozího řešení víme, že vzdálenost, kterou uplaval každý z plavců od prvního míjení po druhé míjení, je dvojnásobkem vzdálenosti, kterou uplaval od startu po první míjení. Vyjádříme-li tyto vzdálenosti pro Pstruha, dostáváme

$$x + 10 = 2 \cdot 8,$$

a tedy $x = 6$. Bazén měl na délku 19 metrů $(8 + 6 + 5 = 19)$.

Poznámky. Pro kontrolu můžeme vyjádřit uvedené vzdálenosti pro Pulce: dostáváme rovnici

$$16 + x = 2(5 + x)$$

s týmž řešením $x = 6$.

Předchozí vztahy pro Pstruha a Pulce lze souhrnně zapsat takto:

$$\frac{x + 10}{8} = \frac{16 + x}{5 + x} = 2.$$

Bez úvodního postřehu o poměrech uplavaných vzdáleností mezi startem a místy míjení máme jen rovnici

$$\frac{x + 10}{8} = \frac{16 + x}{5 + x}.$$

Ta po úpravách vede ke kvadratické rovnici

$$x^2 + 7x - 78 = 0,$$

která má kořeny $x = 6$ a $x = -13$. Řešení naší úlohy odpovídá kladný kořen.